I VALEUR ABSOLUE

1 – FONCTION VALEUR ABSOLUE

VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x est égale à la distance de ce nombre à 0. Elle est notée $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

EXEMPLES :

$|2| = 2$; $|-3| = 3$; $\left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4}$; $1 - \left|-\dfrac{4}{3}\right| = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$

REMARQUES :

$|x| = |-x|$;
$|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

ÉTUDE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

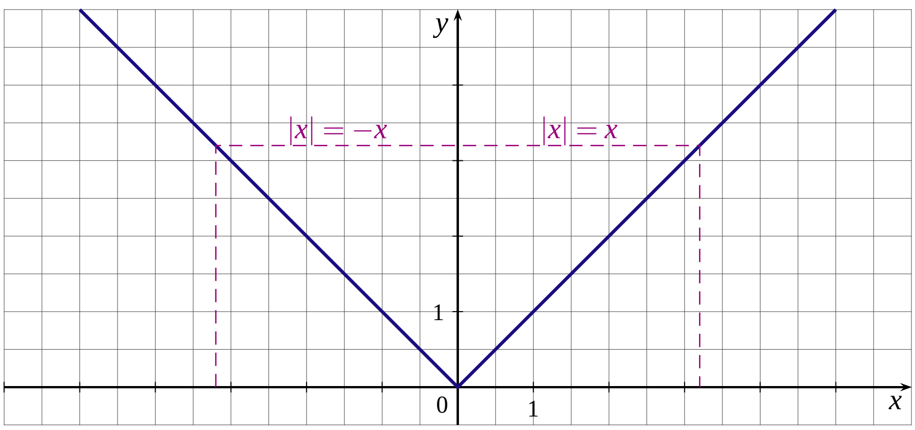
La fonction $f : x \mapsto |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine par morceaux. En effet :
– sur l'intervalle $]-\infty; 0]$, $f(x) = -x$;
– sur l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) = x$.

VARIATIONS :

La fonction valeur absolue définie pour tout réel x par $f(x) = |x|$ est :
– strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$;
– strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

COURBE REPRÉSENTATIVE :



2 – VALEUR ABSOLUE D'UNE FONCTION

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. La fonction $f = |u|$ est définie pour tout réel x appartenant à I par :
- $f(x) = u(x)$ lorsque $u(x) \geqslant 0$;
- $f(x) = -u(x)$ lorsque $u(x) \leqslant 0$.

VARIATIONS :

- Les fonctions $f = |u|$ et u ont les mêmes variations sur tous les intervalles où $u(x) \geqslant 0$
- Les fonctions $f = |u|$ et u ont des variations contraires sur tous les intervalles où $u(x) \leqslant 0$

EXEMPLE :

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x - 8$. Le tableau de variation de la fonction u est :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$u(x)$		↘	0	↘	-9	↗	0	↗	

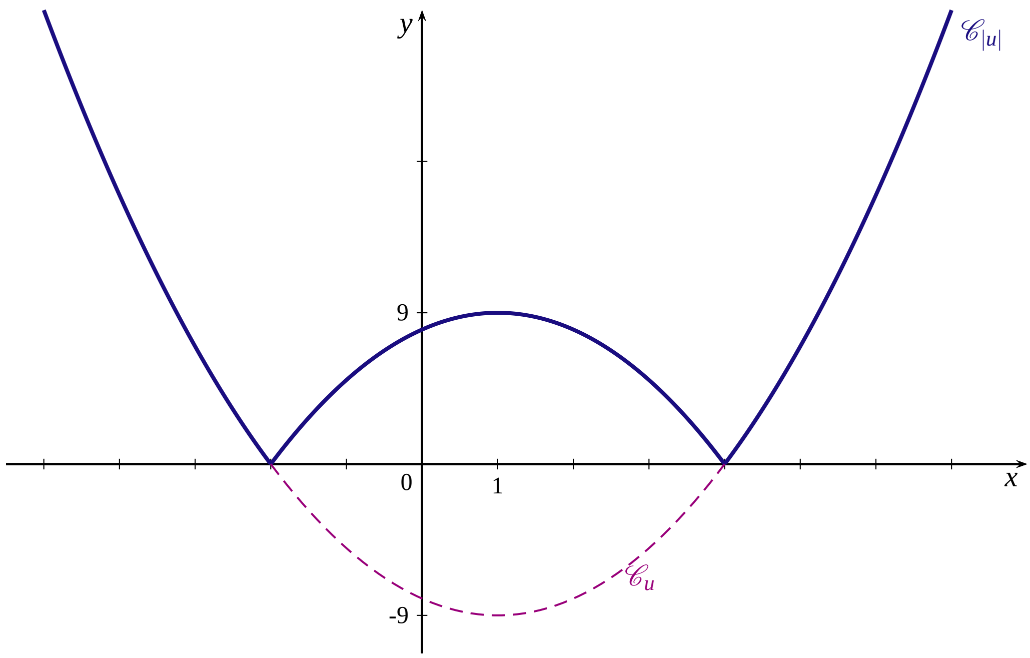
Le tableau des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right|$ est :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f(x) = \lvert u(x) \rvert$		↘	0	↗	9	↘	0	↗	

COURBE REPRÉSENTATIVE :

- La courbe représentative $\mathscr{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est confondue avec celle de la fonction u sur tous les intervalles où $u(x) \geqslant 0$
- La courbe représentative $\mathscr{C}_{|u|}$ de la fonction $|u|$ est symétrique de la courbe de la fonction u sur tous les intervalles où $u(x) \leqslant 0$

EXEMPLE :



II FONCTION $f: x \mapsto u(x)+k$

1 – VARIATIONS

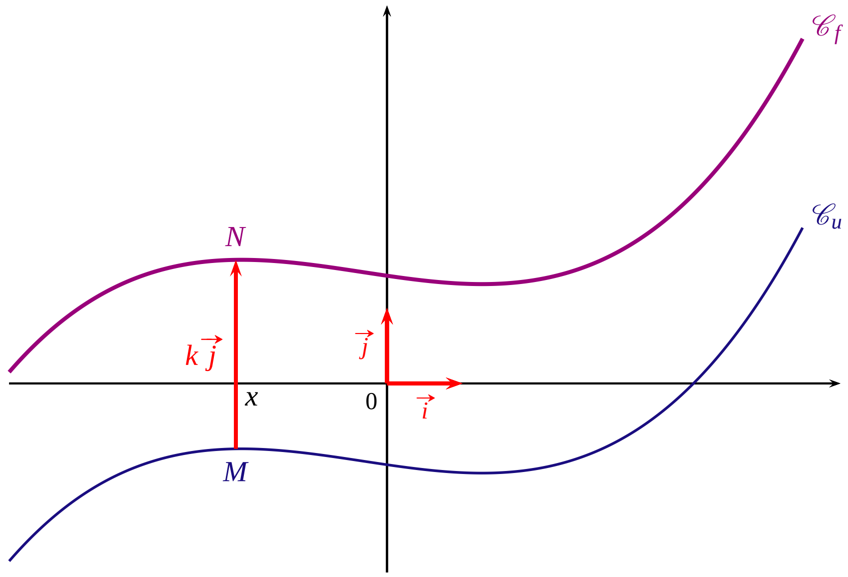
Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
f est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle I par $f(x)=u(x)+k$.
Les fonctions u et f ont les mêmes variations sur I

❊ DÉMONSTRATION

Supposons que la fonction u soit strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$ de I.
Pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[a;b]$, si $x_1<x_2$ alors $u(x_1)<u(x_2)$, d'où $u(x_1)+k<u(x_2)+k$, soit $f(x_1)<f(x_2)$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$.
On démontre de la même manière que si u est strictement décroissante sur un intervalle $[a;b]$ de I, alors f est aussi strictement décroissante sur $[a;b]$.

2 – COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
f est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle I par $f(x)=u(x)+k$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, est l'image de la courbe $\mathscr{C}_u$, représentative de la fonction u, par la translation de vecteur $k\vec{j}$



❊ DÉMONSTRATION

Soit $N(x;y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ alors

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=u(x)+k \Leftrightarrow y-k=u(x)$$

Donc le point $M(x;y-k)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_u$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\overrightarrow{MN}(0;k)$ d'où $\overrightarrow{MN}=k\vec{j}$.
Par conséquent, N est l'image du point M par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

III FONCTION $f : x \mapsto u(x+k)$

1 – VARIATIONS

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un réel fixé.
J est l'intervalle constitué des réels $x-k$, avec x dans I.
f est la fonction définie sur l'intervalle J par $f(x) = u(x+k)$.
Pour tout intervalle $[a;b]$ où u est monotone, la fonction f a les mêmes variations sur $[a-k;b-k]$ que la fonction u sur $[a;b]$

REMARQUE :

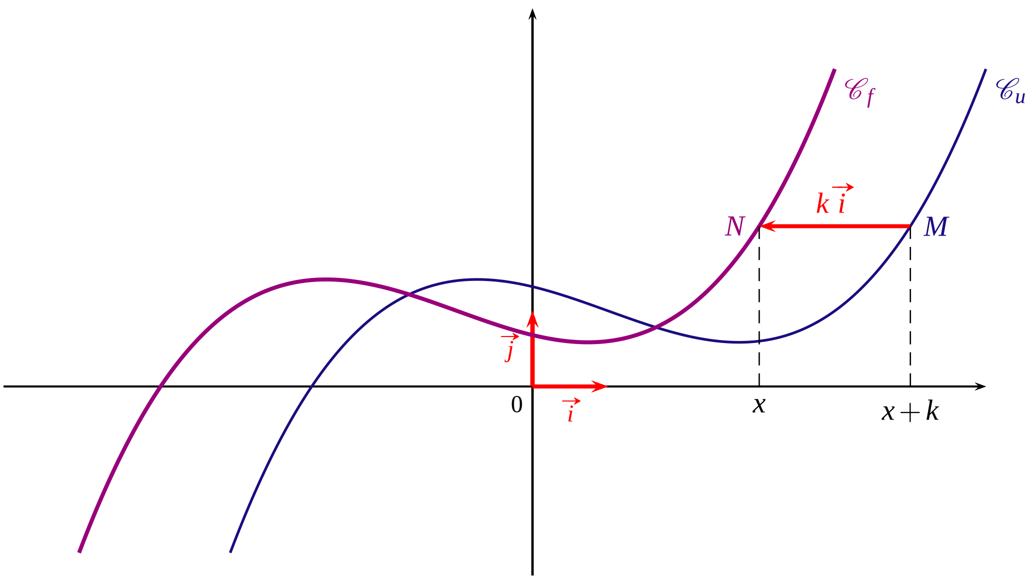
Si la fonction u est définie sur un intervalle $[a;b]$, on peut calculer $u(x+k)$ seulement lorsque $x+k \in [a;b]$ soit pour $x \in [a-k;b-k]$.

❊ DÉMONSTRATION

Supposons que la fonction u soit strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tous nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[a-k;b-k]$, si $x_1 < x_2$ alors $x_1+k < x_2+k$ avec x_1+k et x_2+k dans l'intervalle $[a;b]$, d'où $u(x_1+k) < u(x_2+k)$, soit $f(x_1) < f(x_2)$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[a-k;b-k]$.
On démontre de la même manière que si u est strictement décroissante sur un intervalle $[a;b]$, alors f est aussi strictement décroissante sur $[a-k;b-k]$.

2 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f définie par $f(x) = u(x+k)$, est l'image de la courbe $\mathscr{C}_u$, représentative de la fonction u, par la translation de vecteur $-k\vec{i}$



❊ DÉMONSTRATION

Soit $N(x;y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = u(x+k)$$

Donc le point $M(x+k;y)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_u$
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\overrightarrow{MN}(-k;0)$ d'où $\overrightarrow{MN} = -k\vec{i}$.
Par conséquent, N est l'image du point M par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

EXERCICE 1

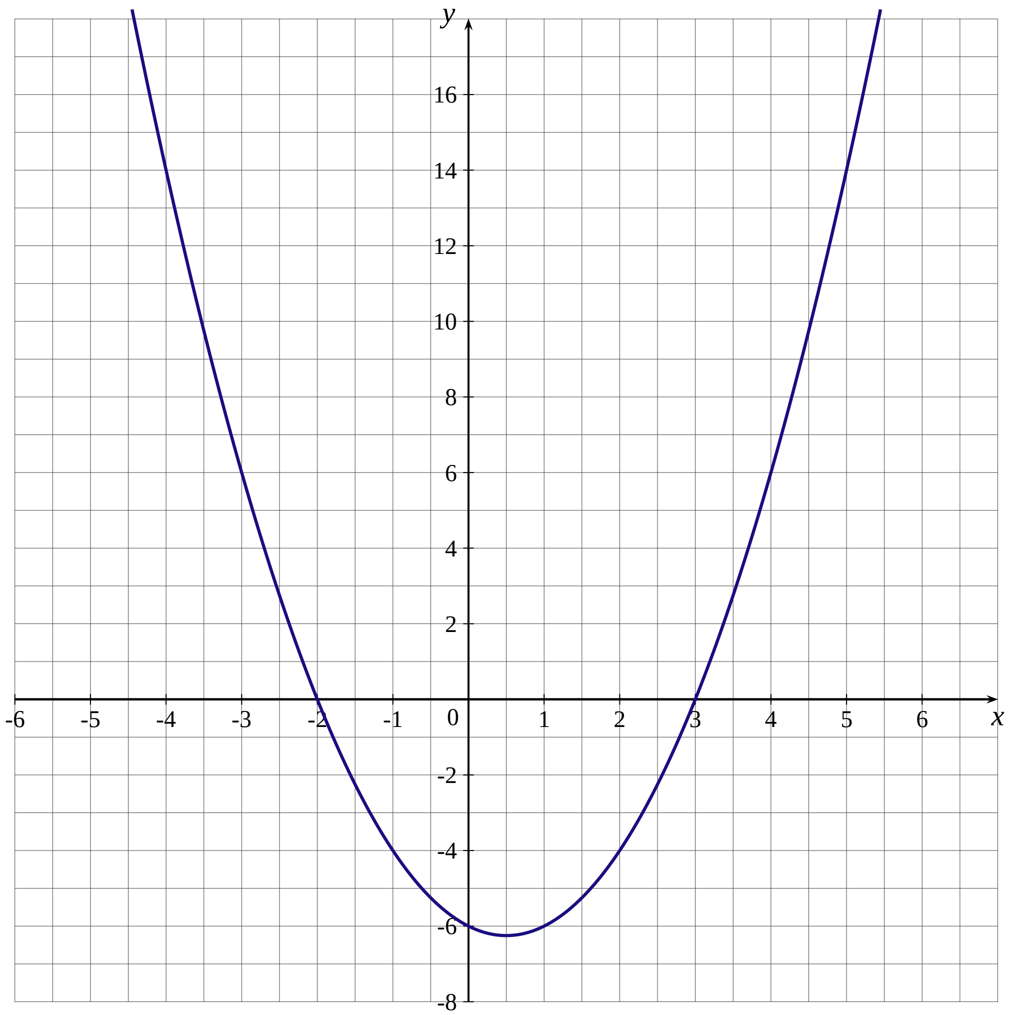
Soit f la fonction affine telle que $f(-1) = 3$ et $f(3) - f(-2) = 2$.

1. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
2. Donner le tableau de signes de la fonction f.
3. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = |f(x)|$.
   a) Donner une expression de $g(x)$.
   b) Tracer la courbe représentative de la fonction g.

EXERCICE 2

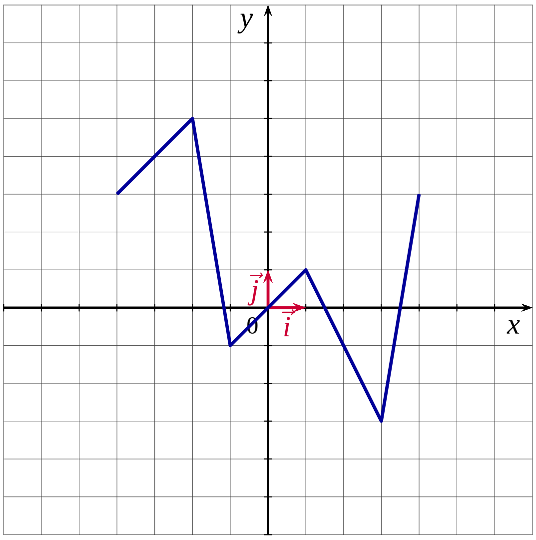
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - x - 6$. On note C_u sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. La parabole C_u est tracée en annexe ci-dessous.

1. Étudier les variations de la fonction u.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_u avec l'axe des abscisses.
3. Étudier le signe de $u(x)$.
4. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = |u(x)|$.
   a) Donner une expression de $f(x)$.
   b) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le même repère que la fonction u.



EXERCICE 3

Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$ dont la courbe représentative C_u dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donnée ci-dessous.



Tracer les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto u(x) - 3$ et $g : x \longmapsto u(x-2)$.

EXERCICE 4

Soit u une fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ dont le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
variations de u	↘	-1	↗ ‖ ↗	2	↘

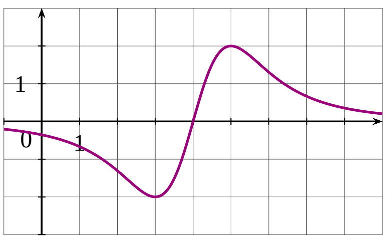
Dresser le tableau des variations des fonctions $f : x \longmapsto u(x+3)$ et $g : x \longmapsto u(x) + 1$.

EXERCICE 5

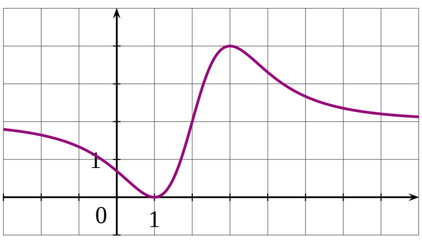
Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$u(x)$	0 ↘	-2 ↗	2 ↘	0

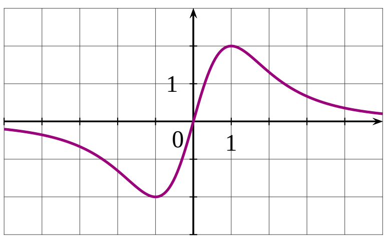
Parmi les trois courbes suivantes, quelle est celle qui représente la fonction $f : x \longmapsto u(x+2)$?



Courbe C_1



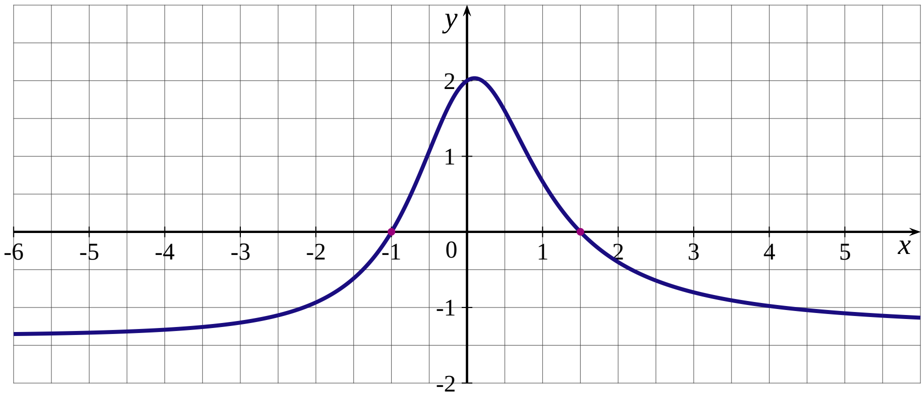
Courbe C_2



Courbe C_3

EXERCICE 6

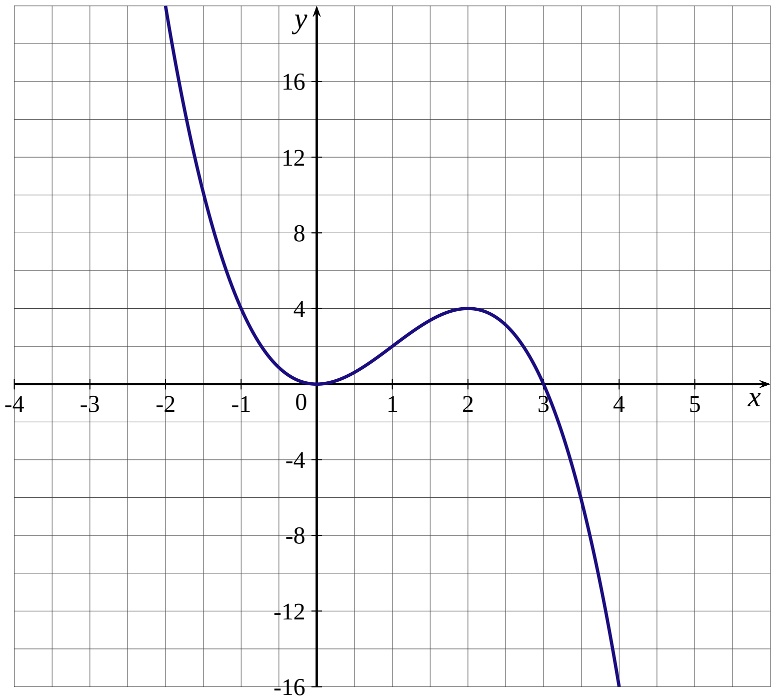
La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$.



1. a) Dessiner la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = u(x-1)$
   b) Dessiner la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = |u(x)|$
2. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{-4x^2+2x+6}{3x^2+3}$
   a) Donner une expression de $f(x)$.
   b) Donner une expression de $g(x)$.

EXERCICE 7

La courbe tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x^3$.



1. Dessiner la courbe représentative de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = f(x) - 4$
2. Soit f_2 la fonction définie par $f_2(x) = f(x-2)$
   a) Dessiner la courbe représentative de la fonction f_2.
   b) Donner une expression de $f_2(x)$.
   c) Établir le tableau des variations de la fonction f_2.
3. Soit f_3 la fonction définie par $f_3(x) = |f(x)|$.
   a) Donner une expression de $f_3(x)$.
   b) Établir le tableau des variations de la fonction f_3.