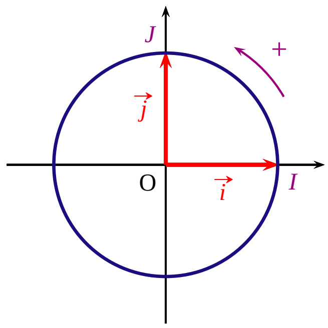
I ANGLE ORIENTÉ

1 – CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.

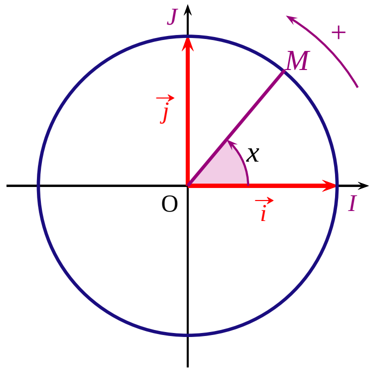


REPÉRAGE D'UN POINT SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ on peut associer à tout réel x un unique point M de $\mathscr{C}$
Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x+k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

2 – MESURES D'UN ANGLE ORIENTÉ

Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique repéré par x.
On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$.
Par convention on note alors $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=x+2k\pi$ où k est un entier relatif et on dit que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$ à pour mesure x radians à 2π près.



REMARQUE :

La mesure d'un angle géométrique en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π

MESURE PRINCIPALE

La mesure principale d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

EXEMPLE :

Déterminer la mesure principale des angles de mesures respectives $\dfrac{39\pi}{7}$ et $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right)$

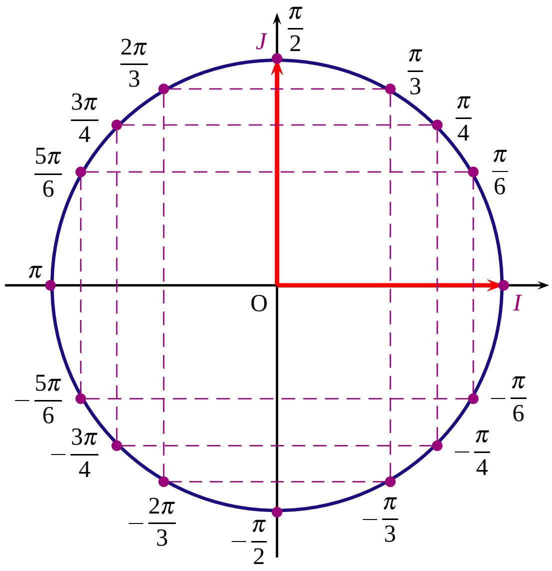
— On cherche α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et un entier k tel que $\dfrac{39\pi}{7}=\alpha+k\times 2\pi$.

Comme $5<\dfrac{39\pi}{7}<6$ et 6 pair, alors $-1<\dfrac{39\pi}{7}-6<0$ donc la mesure principale de $\dfrac{39\pi}{7}$ est $\left(\dfrac{39\pi}{7}-6\pi\right)$ soit $-\dfrac{3\pi}{7}$

— On cherche α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et un entier k tel que $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right)=\alpha+k\times 2\pi$.

Comme $-4<-\dfrac{11}{5}<-3$ et 4 pair, alors $0<-\dfrac{18}{5}+4<1$ donc la mesure principale de $\left(-\dfrac{18\pi}{5}\right)$ est $\left(-\dfrac{18\pi}{5}+4\pi\right)$ soit $\dfrac{2\pi}{5}$

MESURES PRINCIPALES REMARQUABLES



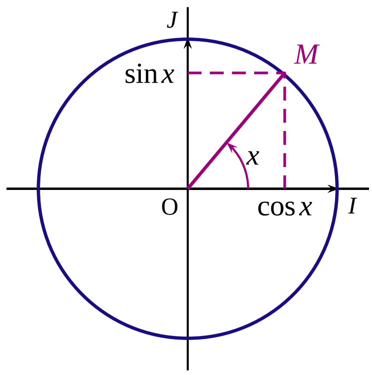
II COSINUS ET SINUS D'UN RÉEL

1 – DÉFINITION

Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est un point du cercle trigonométrique.

— Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

— Le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



2 – PROPRIÉTÉS

— Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$

— Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

— Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

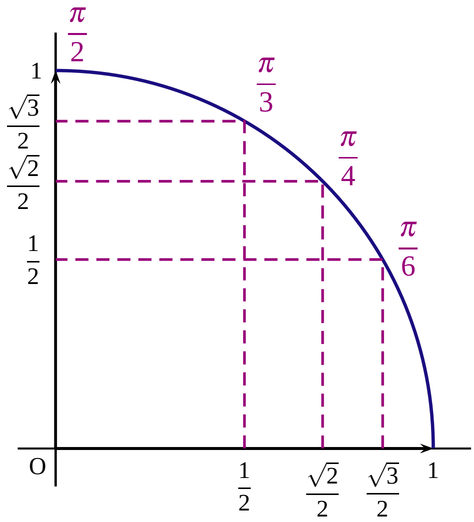
Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + \dfrac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \dfrac{4}{9}$.
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x = -\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x = \frac{2}{3}$$

Comme $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \dfrac{2}{3}$.

3 – VALEURS REMARQUABLES

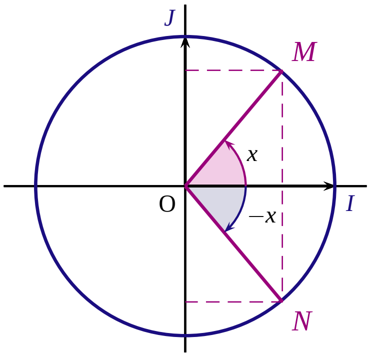
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 – ANGLES ASSOCIÉS

Pour tout réel x :

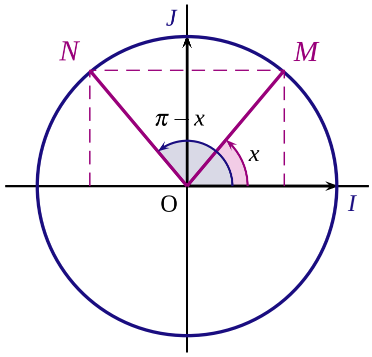
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x\\ \sin(-x) &= \sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à (OI)

Pour tout réel x :

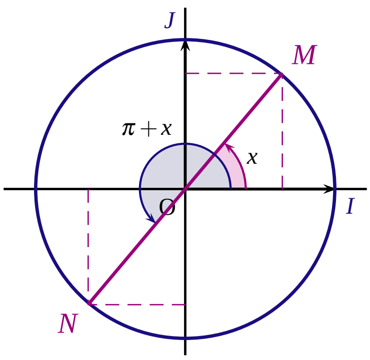
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x) &= -\cos x\\ \sin(\pi+x) &= -\sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à (OJ)

Pour tout réel x :

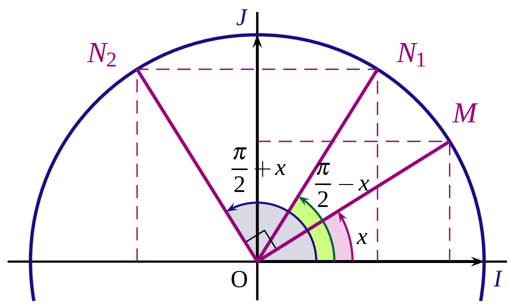
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\pi+x) &= -\cos x\\ \sin(\pi+x) &= -\sin x\end{aligned}}$$



M et N sont symétriques par rapport à O

Pour tout réel x :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$



M et N_1 sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

N_1 et N_2 sont symétriques par rapport à (OJ).

EXEMPLES :

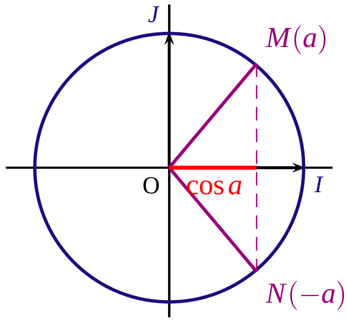
1. $\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$
2. $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin\left(x-\dfrac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\dfrac{9\pi}{2}+4\pi\right) = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x$

5 – ÉQUATIONS

— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

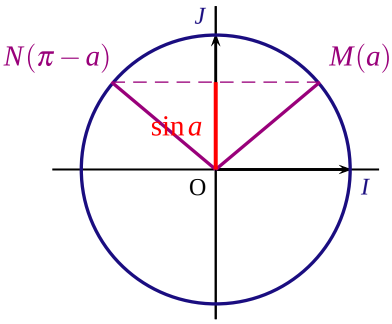
$$\begin{cases} x &= a+2k\pi \\ x &= -a+2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$



— Équation $\sin x = \sin a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont :

$$\begin{cases} x &= a+2k\pi \\ x &= \pi-a+2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$



EXEMPLES :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Comme $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$

   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec k entier relatif.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{5}$

   Comme $\cos\dfrac{\pi}{5} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{5}\right)$ l'équation est équivalente à l'équation $\sin x = \sin\dfrac{7\pi}{10}$.

   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{5}$ sont $x = \dfrac{7\pi}{10}+2k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{10}+2k\pi$ avec k entier relatif.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$
   Pour tout réel x, posons $X = \sin x$ et résolvons l'équation $2X^2 - 3X - 2 = 0$.
   Le discriminant du trinôme est $\Delta = 25$, donc cette équation admet deux solutions

   $$X_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{4} = 2$$

   Nous obtenons deux équations $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = 2$.

   L'équation $\sin x = 2$ n'a pas de solution et l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

   Les solutions de l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ sont $x = -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

III FONCTIONS COSINUS ET SINUS

1 – PÉRIODICITÉ

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

La fonction cosinus (ou la fonction sinus) est entièrement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle $[a;a+2\pi[$ d'amplitude 2π.

2 – PARITÉ

- Pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est paire.
  La courbe représentative de la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
- Pour tout réel x, $\sin(-x)=-\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est impaire.
  La courbe représentative de la fonction sinus admet l'axe l'origine du repère pour centre de symétrie.

REMARQUE :

Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$ pour les connaître sur $[-\pi;\pi]$ à l'aide de la parité et enfin sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la périodicité.

3 – VARIATION

Sur $[0;\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1 ↘	0

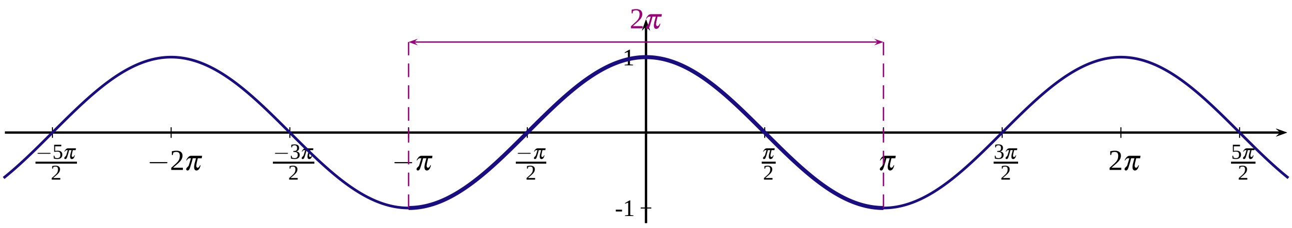
Sur $[-\pi;\pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	-1 ↗	0 ↗	-1 ↘	0 ↘	-1

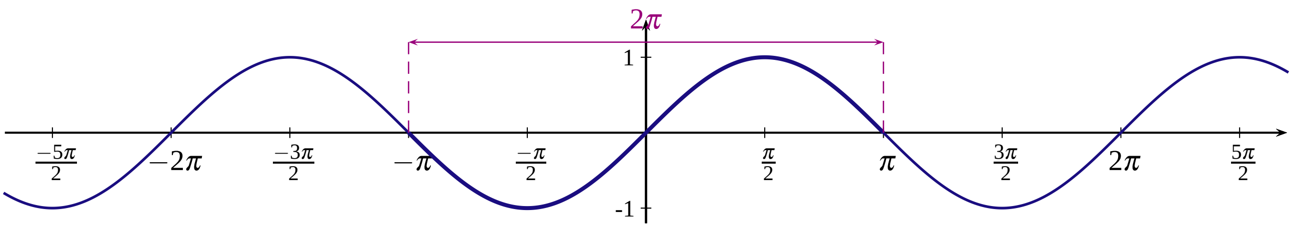
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

4 – COURBES

FONCTION COSINUS

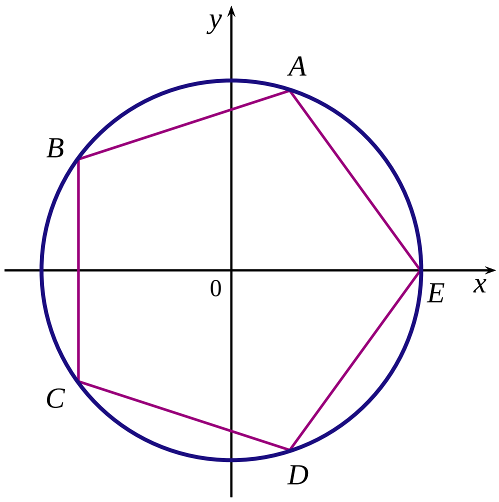


FONCTION SINUS



EXERCICE 1

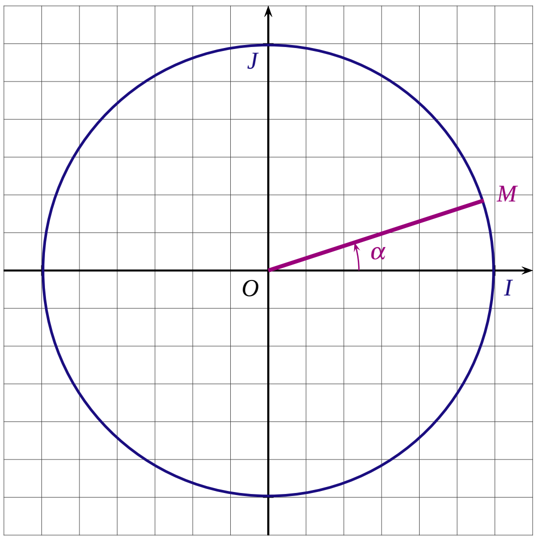
Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

EXERCICE 2

1. a) Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels $\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.



   b) Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D.

2. M est un point du cercle trigonométrique défini par $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$ avec $\alpha\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1 et M_2 tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_1}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_2}\right)=\pi-\alpha$.

3. a) On donne $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donner la valeur exacte de $\sin\left(-\dfrac{9\pi}{10}\right)$

   b) Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 3

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $1+2\cos x = 0$; $1-2\sin x = 0$.

EXERCICE 4

Résoudre les équations suivantes :

$\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$; $\sin x = \sin\dfrac{3\pi}{4}$; $\sin x = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 5

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur l'intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus du réel x correspondant :

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [0;\pi]$; $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $x \in [-\pi;0]$; $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$; $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

EXERCICE 6

Simplifier chacune des expressions suivantes :

1. a) $A = \cos(\pi - x) + 2\cos x - 3\cos(\pi + x)$
   b) $B = \sin(2\pi - x) - 2\sin(\pi + x) + 3\sin(x - \pi)$
   c) $C = \cos(-x) - 2\cos(3\pi - x) + 2\cos(x + \pi)$
2. a) $D = (1 + \cos t + \sin t)^2 - 2(1 + \cos t)(1 + \sin t)$
   b) $E = \cos^4 t - \sin^4 t + 2\sin^2 t$

EXERCICE 7

On donne $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

1. Déterminer la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{5}$
2. En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $-\dfrac{\pi}{5}$; $\dfrac{4\pi}{5}$ et $-\dfrac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 8

1. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $2\cos^2 x - 1 = 0$.

EXERCICE 9

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - \dfrac{3}{4} = 0$.
2. En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin^2 x - \sin x - \dfrac{3}{4} = 0$

EXERCICE 10

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.
2. En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$