BAC 2013

SÉRIE STI2D

ANNALES D'EXERCICES REGROUPÉS PAR THÈME

SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU DÉVELOPPEMENT DURABLE

Ce document, rassemble l'ensemble des exercices, classés par thèmes, des sujets du baccalauréat de la série STI2D de la session 2013. De par la nature même de l'épreuve, les exercices peuvent recouvrir plusieurs thèmes.

Les exercices sont regroupés sous les rubriques suivantes :

— Suites

— Étude de fonctions

— Nombres complexes

— Équations différentielles

— QCM

— Probabilités

Les exercices proposés sont établis à partir des sujets mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES EXERCICES DE LA SESSION 2013

I SUITE

EXERCICE 1 *Antilles Guyane 2013* (1)

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite que l'on appellera (u_n).

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1{,}5u$ à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$?

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}5u_n$.
   a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.

3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   a) Calculer les valeurs des termes S_0, S_1 et S_2.
   b) Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur du terme S_n pour un n donné ?
   Écrire ce nouvel algorithme sur sa copie.
   c) Calculer le terme S_n en fonction de l'entier naturel n.
   d) En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 *France Métropolitaine 2013* (4)

Document 1

> *La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.*
> *En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai. Elle mesure environ* 1900 *km ; sa puissance électrique initiale est de* 6400 *MW ; le courant est transporté sous une tension de 800 kV.*

Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

PARTIE A :

On note $p_0 = 6400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note p_n la puissance électrique restant dans la ligne Xiangjiaba-Shanghai au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi p_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.

1. Montrer que $p_1 = 0{,}997p_0$.
2. Quelle est la puissance électrique au MW près par défaut restant dans la ligne Xiangjiaba–Shanghai au bout de 200 km ?
3. Déterminer la nature de la suite (p_n) puis exprimer p_n en fonction de n.

PARTIE B :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
VARIABLES :
    n : un nombre entier naturel
    q : un nombre réel
    p : un nombre réel
ENTRÉE :
    Saisir n
INITIALISATION :
    Affecter à p la valeur 6 400
    Affecter à q la valeur 0,997
TRAITEMENT :
    Répéter n fois
     Affecter à p la valeur p × q
SORTIE :
    Afficher p
```

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 3$.
   Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies à l'unité près par défaut).

	n	q	p
Entrées et initialisation	3	0,997	6 400
1[er] passage dans la boucle de l'algorithme			
2[e] passage dans la boucle de l'algorithme			
3[e] passage dans la boucle de l'algorithme			

2. Interpréter la valeur de p obtenue au troisième passage dans la boucle de l'algorithme.

3. Quel est le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km ?

PARTIE C :

1. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba–Shanghai ?
2. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude.
   On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes.
   a) La ligne Xiangjiaba–Shanghai répond-t-elle à cette contrainte ?
   b) Déterminer, à cent kilomètres près, la longueur maximale d'une ligne à très haute tension en courant continu pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 7 %.

EXERCICE 3 *France métropolitaine Septembre 2013* (3)

Depuis 2000, l'Union Européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 milligrammes par kilomètre en conduite normalisée. L'objectif de l'Union Européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 milligrammes par kilomètre.
La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de 11,7 % par an.

1. a) Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 milligrammes par kilomètre en 2001.
   b) Un véhicule émettait 500 milligrammes par kilomètre en 2002.
   Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme tolérée cette année-là.
2. Dans le cadre d'une recherche, Louise veut déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif.
   Louise a amorcé l'algorithme suivant :

```
Variables
    n : un nombre entier naturel
    p : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à p la valeur 635
Traitement
    Tant que ...
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à p la valeur 0,883 × p
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher ...
```

   a) Expliquer l'instruction « Affecter à p la valeur $0{,}883 \times p$ ».
   b) Deux lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter afin de permettre à Louise de déterminer l'année recherchée.
3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la norme tolérée, exprimée en milligrammes l'année $(2000 + n)$. On a ainsi $u_0 = 635$.
   a) Établir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif.

EXERCICE 4 *Nouvelle Calédonie 2013* (1)

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$ et $u_0 = -1$.

PARTIE A

1. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 11 premières valeurs de u_n. On obtient les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Valeur de u_n	-1	2,6	4,04	4,616	4,8464	4,9386	4,9754	4,9902	4,9961	4,9984	4,9994

Parmi les quatre formules ci-dessous, laquelle a-t-on entré dans la cellule C2 pour obtenir par copie vers la droite les valeurs affichées dans les cellules D2 à L2 (on indiquera la réponse sur la copie sans justification) ?

a. $=0{,}4^n+3$ **b.** $=\$B\$2*0{,}4+3$ **c.** $=B2*0{,}4+3$ **d.** $=0{,}4\hat{\ }C1+3$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	p et n sont des entiers naturels, u est un nombre réel
ENTRÉE :	saisir la valeur de p
INITIALISATION :	n prend la valeur 0, u prend la valeur -1
TRAITEMENT :	Tant que $\|u-5\| > 10^{-p}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0{,}4u+3$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher la valeur de n

À l'aide du tableau de la question 1, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque $p = 2$.

PARTIE B

On étudie maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 6 \times (0{,}4)^n$.

1. Donner la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - v_n$. Déterminer la limite de (u_n).
4. a) Déterminer en fonction de n la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

   b) En déduire en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

EXERCICE 5 *Nouvelle Calédonie mars 2014* (3)

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.
On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
   Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.
5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et u sont des nombres
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à n
	Affecter la valeur 10^6 à u
Traitement :	Tant que $u > \dfrac{10^6}{2}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times 0{,}917$
	Fin tant que
Sortie :	Afficher n

   a) À quoi correspond la valeur n en sortie de cet algorithme ?
   b) Si on programme cet algorithme, quel résultat affiche-t-il ?
   c) Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %.
   Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

EXERCICE 6 *Polynésie 2013* (2)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.
   Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée en annexe ci-dessous.

ANNEXE

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08
11	9	5,000 786 43
12	10	5,000 314 57
13	11	5,000 125 83
14	12	5,000 050 33
15	13	5,000 020 13
16	14	5,000 003 05
17	15	5,000 003 22
18	16	5,000 001 29
19	17	5,000 000 52
20	18	5,000 000 21

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE $\text{U} - 5 > 0{,}01$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur $0{,}4\text{U} + 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

   Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$. On admet que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 0,4.
   a) Exprimer v_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ?
   Pourquoi ?

II ÉTUDE DE FONCTIONS

II. 1 FONCTION LOGARITHME

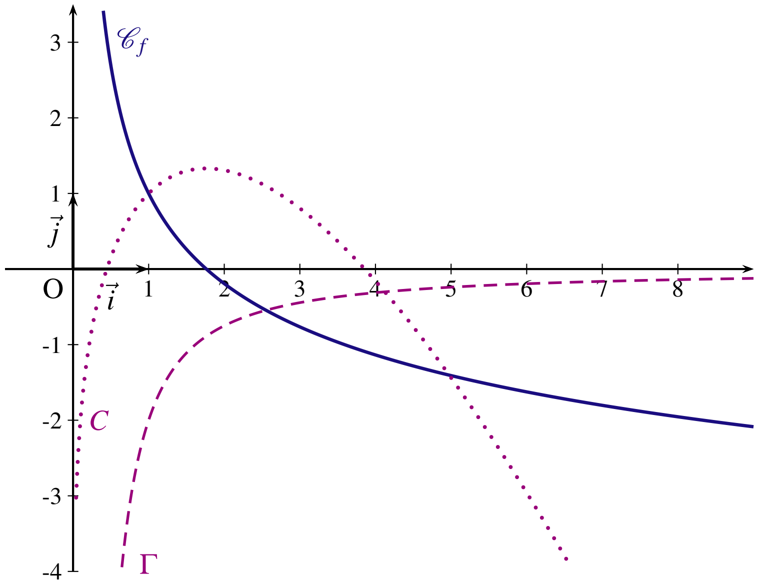
EXERCICE 1

Antilles Guyane 2013 (4)

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ et les courbes C et Γ. L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée f' de f, et l'autre une des primitives F de f.
   a) Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
   b) Par lecture graphique, donner $F(1)$.



2. Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
   a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x)=\dfrac{-x-1}{x^2}$.
   d) Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.
3. Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x)=x-(x-1)\ln x$.
   a) Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
   c) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 *Nouvelle Calédonie 2013* (3)

PARTIE A

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. f' désigne la fonction dérivée de f.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.

T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1;-1)$. T passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

1. a) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
   b) Déterminer $f'(1)$.
   c) Donner une équation de T.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Déterminer alors les valeurs de a et b.

PARTIE B

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. a) Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Établir le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

5. a) Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1;3]$.

   b) On admet que la fonction F définie pour x appartenant à $]0;+\infty[$ par $F(x) = (2x+4)\ln x - 7x$ est une primitive de f.

   Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ en unités d'aires.

   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}$.

II. 2 FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1 *France Métropolitaine 2013* (2)

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20 °C.
Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur, au cours de la nuit, de 22 h à 7 h le lendemain matin.
On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11 °C.
On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$

PARTIE A :

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 9]$. On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$ par $f(t) = 9\mathrm{e}^{-0,12t} + 11$.
2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C.
5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

PARTIE B :

Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; 9]$,

$$g(t) = 0,7\mathrm{e}^{-0,12t}.$$

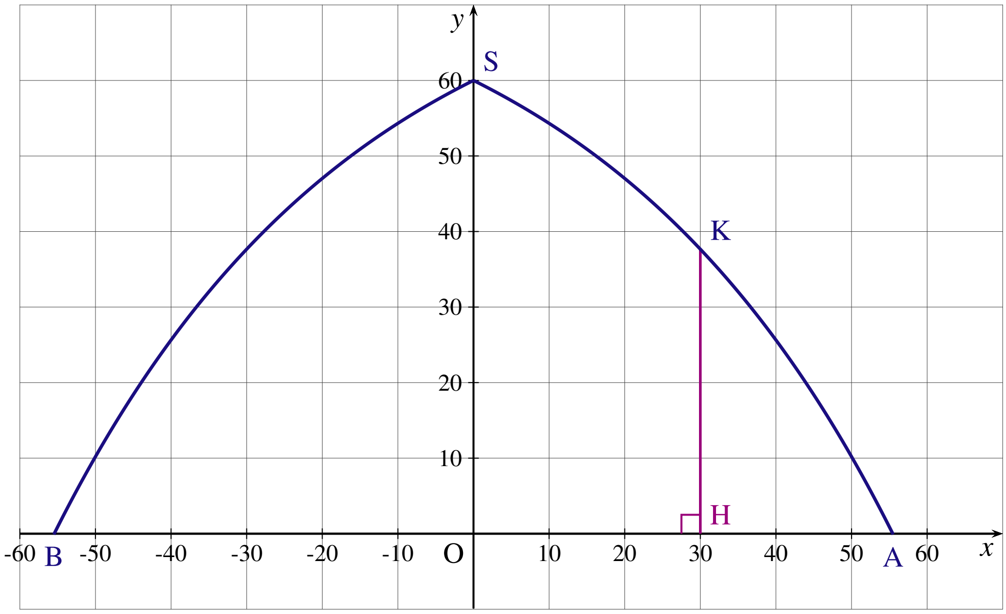
L'énergie $\mathscr{E}$ ainsi dissipée entre 22 h et 7 h, exprimée en kilowattheures (kWh), s'obtient en calculant l'intégrale

$$\mathscr{E} = \int_0^9 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.
2. En déduire une valeur arrondie de $\mathscr{E}$ à 0,1 kWh près.

EXERCICE 2 *France métropolitaine Septembre 2013* (4)

Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable.
La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont donnés sur le schéma ci-dessous.



Cette façade avant est symétrique par rapport au segment vertical [OS] et OH $=$ 30m.
L'arc $\overset{\frown}{SA}$ de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~60]$, dans un repère orthonormal direct d'origine O du plan, l'unité étant le mètre.
Le cahier des charges impose les quatre conditions suivantes :

— OS $= 60$;

— HK > 35 ;

— la fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;60]$;

— OA $\leqslant 60$.

PARTIE A- Étude d'une fonction numérique

1. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~60]$ par $f(x) = 80 - 20\mathrm{e}^{0,025x}$ vérifie les trois premières conditions du cahier des charges.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par excès du réel a qui vérifie $f(a) = 0$.
   Vérifier que la quatrième condition du cahier des charges est remplie.

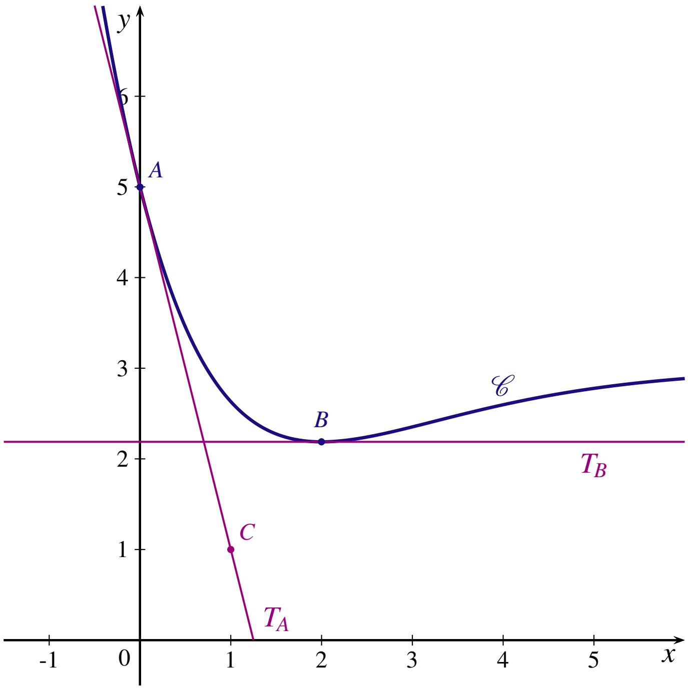
PARTIE B- Calcul d'intégrale et application

1. a) La fonction F est définie sur l'intervalle $[0~;~60]$ par $F(x) = 80x - 800\mathrm{e}^{0,025x}$.
   Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~60]$.
   b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{55,5} (x)\,\mathrm{d}x$.
   c) Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près de J.
2. On souhaite peindre la surface extérieure de la façade avant.
   a) Déterminer à 10^{-2} près l'aire de cette surface exprimée en m^2.
   b) La peinture utilisée pour peindre la surface extérieure de la façade avant est vendue en bidons de 68 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0,2 mètre carré par litre, combien de bidons sont nécessaires pour peindre la surface extérieure de la façade avant ?

EXERCICE 3 *Nouvelle Calédonie mars 2014* (4)

Dans tout l'exercice, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous une petite partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(0;5)$ et par le point B d'abscisse 2.
La tangente T_A à la courbe au point A passe par le point $C(1;1)$ et la tangente T_B au point B est horizontale.



PARTIE A

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point.*
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponses n'enlève ni ne rapporte aucun point. On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La valeur de $f(0)$ est :

   a. -4 **b.** 4 **c.** 1,2 **d.** autre réponse

2. La valeur de $f'(0)$ est :

   a. -4 **b.** 4 **c.** 1,2 **d.** autre réponse

3. La valeur de $f'(2)$ est :

   a. 0 **b.** 2,1 **c.** 3 **d.** autre réponse

4. Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels est :

   a. $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$ **b.** $5 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$ **c.** $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5$ **d.** $0 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

PARTIE B

La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(-x^2 - 2x + 2\right) \mathrm{e}^{-x} + 3$.

1. On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est 3. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et on admet que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(x^2 - 4\right) \mathrm{e}^{-x}$.
   a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 + 4x + 2\right) \mathrm{e}^{-x} + 3x$.
   Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
   a) Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.
   b) Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ au centième.

III NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 *Antilles Guyane 2013* (3)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$(2-\mathrm{i})z = 2-6\mathrm{i}.$$

   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
   b) Déterminer la forme exponentielle de z_1.
   c) Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times z_1$.
   Déterminer les formes exponentielle et algébrique de z_2.

2. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2-2\mathrm{i}$, $z_B = -2-2\mathrm{i}$ et $z_C = -4\mathrm{i}$.
   a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
   c) Déterminer la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2 *France métropolitaine Septembre 2013* (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z=-5+5\mathrm{i}$ est :
   a) $z=5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
   b) $z=5\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
   c) $z=5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   d) $z=5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. Si $z_1=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, alors le produit $z_1\times z_2$ est un nombre complexe :
   a) de module 4 et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{7}$
   b) de module $2\sqrt{2}$ et dont un argument est $\dfrac{5\pi}{12}$
   c) de module 4 et dont un argument est $\dfrac{5\pi}{12}$
   d) de module $2\sqrt{2}$ et dont un argument est $\dfrac{13\pi}{12}$
3. Le nombre complexe $\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$ est égal à :
   a) 1
   b) i
   c) -1
   d) $-\mathrm{i}$
4. Le nombre complexe z de module $2\sqrt{3}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique :
   a) $\sqrt{3}-3\mathrm{i}$
   b) $3-\mathrm{i}\sqrt{3}$
   c) $-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$
   d) $-3+\mathrm{i}\sqrt{3}$

EXERCICE 3 *Nouvelle Calédonie mars 2014* (1)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1,z_2 et z_3 définis par :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

1. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Démontrer que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.
4. En déduire l'écriture algébrique de z_3.
5. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

IV ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXERCICE 1 *Polynésie 2013* (3)

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100°C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20°C.
Théo lui rétorque que quand il sera à 37°C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle $(E) \quad y' + 0{,}04y = 0{,}8$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée :
   a) La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C ?
   b) Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ?
   En donner une valeur arrondie à la seconde près.

V QCM : (Complexes et Équations différentielles)

EXERCICE 1 *France Métropolitaine 2013* (3)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Une écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}$ est :
   a) $z = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   b) $z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   c) $z = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   d) $z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

2. Si $z_1 = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, alors le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ vaut :
   a) $3\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$
   b) $3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}$
   c) $3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$
   d) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

3. On considère l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$, où y désigne une fonction deux fois dérivable sur l'ensemble des réels. Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :
   a) $f(x) = 4\mathrm{e}^{9x}$
   b) $f(x) = -0{,}2\mathrm{e}^{-9x}$
   c) $f(x) = 7\cos(9x) - 0{,}2\sin(9x)$
   d) $f(x) = 0{,}7\sin(3x)$

4. On considère l'équation différentielle $y' + 7y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution f de cette équation telle que $f(0) = 9$ est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :
   a) $f(x) = 9\mathrm{e}^{7x}$
   b) $f(x) = 9\mathrm{e}^{-7x}$
   c) $f(x) = -9\mathrm{e}^{7x}$
   d) $f(x) = -9\mathrm{e}^{-7x}$

EXERCICE 2 *Nouvelle Calédonie 2013* (2)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
$\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*
Toute bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une réponse erronée ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Aucune justification n'est demandée.*
Le candidat notera le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie sur sa copie.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c
1	Soit $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Alors son module est :	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2
2	Soit $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Alors un argument est :	$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{3\pi}{4}$
3	f est définie par $f(t) = 3\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ f est solution de :	$y' + 3y = 0$	$y'' + 25y = 0$	$y'' - 5y = 0$
4	Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions du type :	$x \mapsto k\mathrm{e}^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto k\mathrm{e}^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
5	La solution de l'équation $\ln(x+1) = 3$ est :	$\left\{1 - \mathrm{e}^3\right\}$	$\left\{1 + \mathrm{e}^3\right\}$	$\left\{\mathrm{e}^3 - 1\right\}$
6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $2^x - 3 \leqslant 5$ est :	$]-\infty ; \ln 8]$	$]-\infty ; 3]$	$]-\ln 3 ; \ln 5]$

EXERCICE 3 *Polynésie 2013* (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte.
Aucun point ne sera enlevé en cas de réponse incorrecte ou d'absence de réponse.

On considère le nombre complexe $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Le carré de z est égal à :

   a. $-4\mathrm{i}$ **b.** -4 **c.** $-2\mathrm{i}$ **d.** 4

2. L'inverse de z est égal à :

   a. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **b.** $-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **c.** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **d.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

3. L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

   a. $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b.** $f(x) = 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

   c. $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **d.** $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

4. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en années, d'un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne.
   Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X, suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.
   La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 8 ans est au centième près :

   a. 0,18 **b.** 0,20 **c.** 0,71 **d.** 0,80

VI PROBABILITÉS

EXERCICE 1 *Antilles Guyane 2013* (2)

Une entreprise spécialisée produit des boules de forme sphérique pour la compétition. Le responsable de la qualité cherche à analyser la production.
Il mesure pour cela la masse des boules d'un échantillon (E) de 50 pièces de la production concernée, et obtient les résultats suivants pour la série statistique des masses :

Masse en g	1 195	1 196	1 197	1 198	1 199	1 200	1 201	1 202	1 203	1 204
Nombre de boules	1	3	4	6	8	11	6	5	3	3

Une boule est dite « de bonne qualité » si sa masse en grammes m vérifie : $1\,197 \leqslant m \leqslant 1\,203$.

1. a) Calculer, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules de bonne qualité.
   b) Déterminer la moyenne et l'écart type de la série des masses de cet échantillon. (On donnera des valeurs approchées au gramme près.)

   Dans la suite de l'exercice, on admet que la probabilité qu'une boule soit de bonne qualité est : $p = 0{,}86$.

   Les résultats des différentes probabilités seront donnés au millième près.
2. L'entreprise livre des lots de boules à un client. On assimile le choix de chaque pièce d'un lot à un tirage avec remise.

   On désigne par X la variable aléatoire qui, à un lot donné de 50 boules, associe le nombre de boules de bonne qualité.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
   b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 48 boules de bonne qualité dans le lot.
3. On décide d'approcher la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X par une loi normale d'espérance m et d'écart type σ.
   a) Justifier que $m = 43$ et $\sigma \approx 2{,}45$.
   b) Déterminer, à l'aide de cette loi normale, une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins 48 boules de bonne qualité dans le lot.
4. Le client reçoit un lot de 50 boules.
   a) Préciser l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des boules de bonne qualité pour un lot de 50 pièces.
   b) Dans son lot, le client a 42 boules qui sont de bonne qualité.

      Il affirme au fabricant que la proportion de boules de bonne qualité est trop faible au regard de la production habituelle de l'entreprise.

      Peut-on donner raison au client au seuil de confiance de 95 % ? Justifier.

EXERCICE 2 *France Métropolitaine 2013* (1)

Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée.
La masse en grammes de crème glacée contenue dans chacun des pots peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 100 et d'écart type 0,43.

1. Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualité souhaite disposer de certaines probabilités.
   Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques évènements pour une loi normale d'espérance 100 et d'écart type 0,43.

a	$p(X \leqslant a)$	a	$p(X \leqslant a)$	a	$p(X \leqslant a)$
98	0,000 001 65	99,5	0,122 457 22	101	0,989 979 55
98,5	0,000 242 99	100	0,500 000 00	101,5	0,999 757 01
99	0,010 020 45	100,5	0,877 542 78	102	0,999 998 35

   Les résultats seront donnés à 10^{-2} *près.*
   Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

   a) Déterminer la probabilité de l'évènement « $X > 99$ ».

   b) Déterminer la probabilité de l'évènement « $99 \leqslant X \leqslant 101$ ».

   c) Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre 99 grammes et 101 grammes. Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pots conformes dans la production est 98 %.

   a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pots conformes sur un échantillon de taille n est

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

   Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 120.

   b) On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 120 pots de manière aléatoire. Au cours d'un de ces contrôles, un technicien compte 113 pots conformes. En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, prendra-t-on la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

EXERCICE 3 *France métropolitaine Septembre 2013* (2)

Une entreprise fabrique en grande série des barres de pâte d'amande. La masse annoncée sur leur emballage est de 125 grammes. La machine qui fabrique les barres de pâte d'amande est préréglée afin que ces dernières respectent la masse de 125 grammes avec une certaine tolérance. Une barre de pâte d'amande est dite conforme lorsque sa masse est comprise dans un intervalle de tolérance de $[124\ ;\ 127{,}5]$.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une barre de pâte d'amande prélevée au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. Le service qualité estime que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 125,5 et d'écart type 0,75.
   a) Calculer la probabilité qu'une barre de pâte d'amande prélevée au hasard ait une masse supérieure à 125,5 grammes.
   b) Calculer la probabilité qu'une barre de pâte d'amande prélevée au hasard soit conforme.
   c) En déduire la probabilité qu'une barre de pâte d'amande prélevée au hasard soit non conforme.

   On utilisera éventuellement le tableau suivant présentant le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale d'espérance 125,5 *et d'écart type* 0,75.

a	$p(X \leqslant a)$
122,00	0,000 001 5
122,25	0,000 007 3
122,50	0,000 031 7
122,75	0,000 122 9
123,00	0,000 429 1
123,25	0,001 349 9

a	$p(X \leqslant a)$
123,50	0,003 830 4
123,75	0,009 815 3
124,00	0,022 750 1
124,25	0,047 790 4
124,50	0,091 211 2
124,75	0,158 655 3

a	$p(X \leqslant a)$
125,00	0,252 492 5
125,25	0,369 441 3
125,50	0,500 000 0
125,75	0,630 558 7
126,00	0,747 507 5
126,25	0,841 344 7

a	$p(X \leqslant a)$
126,50	0,908 788 8
126,75	0,952 209 6
127,00	0,977 249 9
127,25	0,990 184 7
127,50	0,996 169 6
127,75	0,998 650 1

2. Lors d'un contrôle, le responsable qualité prélève de façon aléatoire un échantillon de 300 barres de pâte d'amande dans la production et constate que 280 barres de pâte d'amande sont conformes.
   On admet que, lorsque la machine est correctement réglée, la proportion de barres de pâte d'amande conformes dans l'ensemble de la production est de 97 %.
   On souhaite savoir si le réglage de la machine peut être jugé satisfaisant.
   a) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des barres de pâte d'amande de masse conforme obtenue sur un échantillon de taille 300 (les bornes de l'intervalle seront arrondis à 10^{-3} près).
   b) Le résultat obtenu lors du contrôle qualité remet-il en question le réglage de la machine ?

EXERCICE 4 *Nouvelle Calédonie 2013* (4)

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur (exprimés en millimètres) sont conformes afin de les ranger dans un étui spécifique.
Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-3} près.

PARTIE A

On suppose dans cette partie que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à 0,9.
Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 10 pièces, au moins 8 pièces soient conformes.

PARTIE B

Les pièces sont fabriquées par une machine automatique. Soit M la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard associe son diamètre.
On suppose que M suit la loi normale d'espérance 80 et d'écart type 0,6.

1. Déterminer la probabilité $P(79 \leqslant M \leqslant 81)$.
2. Quelle est la probabilité que le diamètre d'une pièce prélevée au hasard soit supérieur à 80 ?

PARTIE C

On s'intéresse dans cette partie à l'épaisseur des médailles.
On fait l'hypothèse que le réglage de la machine est tel que 5 % des médailles fabriquées ont une épaisseur non conforme.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des médailles non conformes obtenues dans un échantillon de 300 médailles.
2. On prélève un échantillon de 300 médailles.
   On constate que dans cet échantillon, 24 médailles ont une épaisseur non conforme.
   Doit-on réviser le réglage de la machine ?

EXERCICE 5 *Nouvelle Calédonie mars 2014* (2)

Un groupe agricole vend des sachets de graines donnant des plantes résistantes aux maladies.
Le directeur de ce groupe affirme que 92 % des sachets sont efficaces et donnent des plantes résistantes.
Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

1. On prélève au hasard un échantillon de 100 sachets.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de sachets efficaces sur un échantillon de taille 100.
   b) Dans le prélèvement de 100 sachets, 88 donnent des plantes résistantes. Peut-on rejeter l'hypothèse du directeur ?
2. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sachets, associe le nombre de sachets donnant des plantes résistantes.
   On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}92$.
   a) Déterminer l'espérance et l'écart type de X (arrondi à 0,01 près).
   b) La variable aléatoire X peut être approchée par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 92 et d'écart type 2,7.
   En utilisant la variable aléatoire Y, calculer la probabilité que le nombre de sachets donnant des plantes résistantes soit compris entre 89 et 94, c'est-à-dire calculer $P(89 \leqslant Y \leqslant 94)$.

EXERCICE 6 *Polynésie 2013* (4)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.

A. Loi normale

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [74,4 ; 75,6].
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur.
On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,25.

1. Calculer $P(74{,}4 \leqslant L \leqslant 75{,}6)$.
2. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = 0{,}95$?

B. Loi binomiale

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20.
On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ».
On suppose que $P(D) = 0{,}02$.
On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

C. Intervalle de fluctuation

Le cahier des charges établit que la proportion de 2 % de pièces non conformes dans la production est acceptable.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pièces non conformes dans un échantillon de taille 80.

   On veut savoir si la machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 80 dans lequel 3 pièces se révèlent être non conformes.

2. Quelle est la fréquence des pièces non conformes dans l'échantillon prélevé ?
3. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

BACCALAURÉAT STI2D 2013

MATHÉMATIQUES : INDEX DES DIFFÉRENTS SUJETS