BAC 2014

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2014

SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU DÉVELOPPEMENT DURABLE

SÉRIE STI2D

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2014

ANTILLES GUYANE 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Soit x un réel quelconque, e^{-4x} est égal à :

   a) $\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4}$ b) $-\mathrm{e}^{4x}$ c) $x \times \mathrm{e}^{-4}$ d) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4x}}$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   a) 5 b) 10 c) 2,5 d) 1

3. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 0,98.
   (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2{,}8$ et de raison 1,02.
   Le plus petit entier n vérifiant $u_n \leqslant v_n$ est :

   a) 14 b) 15 c) 16 d) 17

4. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\dfrac{5}{3}$.
   On donne l'algorithme suivant :

Variables	n,u
Initialisation	u prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u < 1\,000$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times \dfrac{5}{3}$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

   Cet algorithme affiche en sortie :

   a) la valeur de $u_{1\,001}$
   b) la plus grande valeur de n vérifiant $u_n < 1\,000$
   c) la plus petite valeur de n vérifiant $u_n \geqslant 1\,000$
   d) la plus petite valeur de u_n vérifiant $u_n \geqslant 1\,000$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.
   La fonction f est une solution de l'équation différentielle :

   a) $y'' + y = 0$ **b.** $16y'' - 9y = 0$ **c.** $9y'' + 16y = 0$ **d.** $9y'' - 16y = 0$

EXERCICE 2 (4 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux types A et B de téléviseurs à écran plat.
Les réponses aux questions 1. a., 1. b. et 1. c. seront arrondies au centième.

1. La durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un téléviseur du type A, avant que survienne la première panne, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-5}$.
   a) Calculer la probabilité que la première panne survienne avant la 32 000e heure de fonctionnement.
   b) On s'intéresse à un téléviseur de type A fonctionnant chaque jour pendant 4 heures. Calculer la probabilité que la première panne d'écran ne survienne pas avant 10 ans.
      On prendra 1 *année* = 365 *jours*.
   c) Calculer la probabilité que la première panne survienne après 10 000 heures et avant 40 000 heures de fonctionnement.
   d) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
2. La durée de fonctionnement avant la première panne d'un téléviseur de type B est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ'.
   Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leqslant 32\,000) = 0{,}8$.
   Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de λ'.

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ d'unités 5 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

PARTIE A

1. Donner les écritures algébriques de z, de $\overline{z}$ et de $\dfrac{1}{2}\overline{z}$.
2. On considère le nombre complexe $p = \dfrac{2+\overline{z}}{2-\overline{z}}$.
   a) Montrer que $p = -\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   b) Les points M, N et P sont les points d'affixes respectives 1, $\dfrac{1}{2}\overline{z}$ et p. Placer ces trois points dans le repère. Justifier l'alignement de ces trois points.

PARTIE B

Soit u le nombre complexe défini par $u = \dfrac{1}{2}z$.

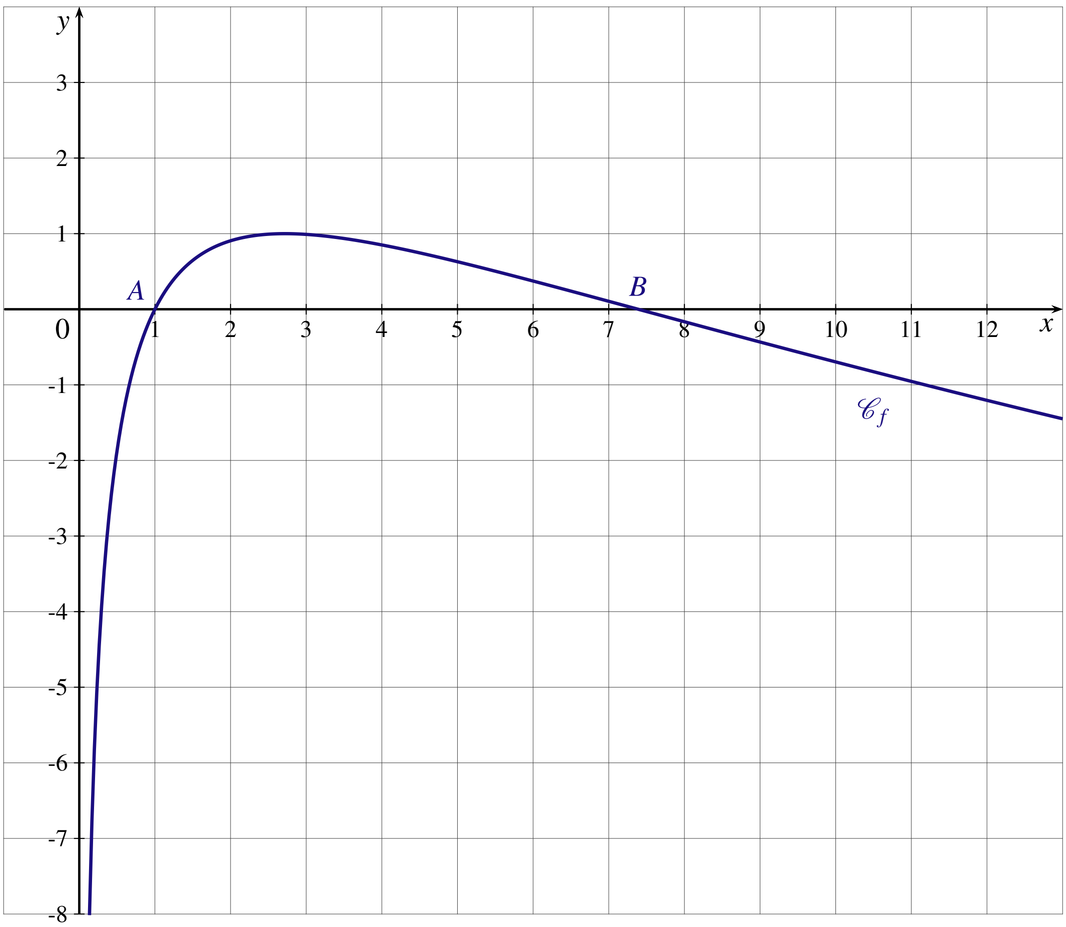
1. Écrire u sous la forme exponentielle.
2. a) Donner l'écriture exponentielle puis l'écriture algébrique de u^3.
   b) Vérifier les relations suivantes : $u^4 = -u$ et $u^5 = -u^2$.
   c) Vérifier que $1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = 1$.

EXERCICE 4 (6 points)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille **ANNEXE**.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. a) On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.
   b) Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.
5. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
6. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.
   a) Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine $\mathscr{D}$.
   b) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

ANNEXE à remettre avec la copie



FRANCE MÉTROPOLITAINE 2014

EXERCICE 1 (4 points)

Une chocolaterie industrielle fabrique des tablettes de chocolat de 200 grammes. Une machine qui fabrique les tablettes est préréglée afin de respecter cette masse de 200 grammes.
Lors de la fabrication, toutes les tablettes de chocolat sont pesées et celles dont la masse est inférieure à 195 grammes sont rejetées. L'entreprise ne les commercialisera pas sous cette forme.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une tablette de chocolat prélevée au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On admet que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart type 2,86.
   Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

   a) Déterminer la probabilité de l'évènement « $195 \leqslant X \leqslant 205$ ».

   b) Déterminer la probabilité qu'une tablette de chocolat prise au hasard dans la production ne soit pas rejetée après pesée.

2. Une étude statistique a établi que, si la machine est bien réglée, la proportion de tablettes de chocolat rejetées est de 4 %.
   Afin de vérifier le réglage de la machine, le responsable qualité prélève de manière aléatoire un échantillon de 150 tablettes et observe que 10 tablettes sont rejetées.
   Cette observation remet-elle en cause le réglage de la machine ? (On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.)

EXERCICE 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

On considère les deux nombres complexes $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. La forme algébrique de z est égale à :
   a) $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
   b) $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
   c) $z = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
   d) $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$
2. Le nombre complexe z' est le nombre complexe :
   a) opposé de z
   b) inverse de z
   c) conjugué de z
   d) opposé du conjugué de z
3. Le nombre complexe $z \times z'$:
   a) est un nombre réel
   b) est un nombre imaginaire pur
   c) a pour module 2
   d) est un nombre complexe dont un argument est $\dfrac{4\pi}{3}$
4. Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = \mathrm{i}$ est :
   a) $\dfrac{\pi}{3}$
   b) $\dfrac{5\pi}{6}$
   c) $\dfrac{\pi}{6}$
   d) $-\dfrac{\pi}{6}$

EXERCICE 3 (6 points)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets.
À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel.
Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f.
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

PARTIE B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.
2. a) Justifier que $g(0) = 5$.

   b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.
3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?

EXERCICE 4 (6 points)

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

DOCUMENT 1 :

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci-dessous.

Catégorie	Vitesse des vents en km.h^{-1}	Dégâts occasionnés
F0	60 à 120	**Dégâts légers :** dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres,...
F1	120 à 180	**Dégâts modérés :** automobiles renversées, arbres déracinés,...
F2	180 à 250	**Dégâts importants :** toits arrachés, hangars et dépendances démolis, ...
F3	250 à 330	**Dégâts considérables :** murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues, ...
F4	330 à 420	**Dégâts dévastateurs :** murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles, ...
F5	420 à 510	**Dégâts incroyables :** maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments, ...

DOCUMENT 2 :

À partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante : « la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes ». On appelle « durée de vie » d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420km.h^{-1}.
L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à $10 km.h^{-1}$.

1. a) Cinq minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents est de 378km.h^{-1}.
   Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
   À quelle catégorie appartient la tornade à ce moment là ?

   b) Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».
2. Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q. Il commence à élaborer l'algorithme ci-dessous.

Variables
  n : un nombre entier naturel
  v : un nombre réel
  q : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 0
  Affecter à v la valeur 420
  Affecter à q la valeur 0,9
Traitement
  Tant que ....
    ....
    ....
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher $5 \times n$

a) Justifier la valeur 0,9 dans la phrase « Affecter à q la valeur 0,9 ».

b) Donner le premier terme et la raison de la suite géométrique proposée par l'étudiant.

c) Dans l'algorithme ci-dessus, des pointillés indiquent des parties manquantes.
Recopier la partie relative au traitement et la compléter pour que l'étudiant puisse déterminer la durée de vie de cette tornade.

d) Expliquer l'instruction « Afficher $5 \times n$ » proposée par l'étudiant.

3. On désigne par (v_n) la suite géométrique proposée par l'étudiant.
Exprimer v_n en fonction de n.

4. Déterminer la durée de vie de cette tornade au sens défini dans le document 2.

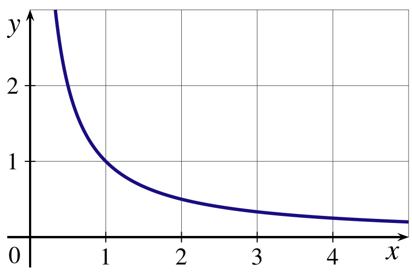
FRANCE MÉTROPOLITAINE SEPTEMBRE 2014

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ est :
   a) $z_1 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   b) $z_1 = 2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   c) $z_1 = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   d) $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$
2. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ et $z_2 = -\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.
   Le nombre complexe z_2 est égal à :
   a) $\overline{z_1}$
   b) $-z_1$
   c) $-\overline{z_1}$
   d) $\mathrm{i} + z_1$
3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



   Le domaine du plan défini comme l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ qui vérifient $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1$ a pour aire (exprimée en unité d'aire) :
   a) $\ln 2$
   b) $\dfrac{1}{2}$
   c) $1 - \ln 2$
   d) $1 - \mathrm{e}^2$
4. La tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ à la courbe représentative de la fonction f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a pour équation :
   a) $y = -4x + 4$
   b) $y = \quad 4x + 4$
   c) $y = -4x - 4$
   d) $y = \quad 4x - 4$

EXERCICE 2 (5 points)

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.
L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3\,200\,\text{m.s}^{-1}$.
La vitesse finale de la fusée vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8\,000\,\text{m.s}^{-1}$ pour permettre la mise en orbite souhaitée.
Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.
On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x+50)$ tonnes.
Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en m.s^{-1}, est donnée par

$$f(x) = V_e \times [\ln(x+50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100;900]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[100;900]$, $f(x) = 3\,200 \times \ln(0{,}02x+1)$.
   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.
2. a) Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée ?
   b) Avec 400 tonnes de propergol au décollage la mise en orbite sera-t-elle possible ?
3. a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

EXERCICE 3 (7 points)

Chloé, âgée de 15 ans au 1er janvier 2014, réside dans une agglomération française.
Pour anticiper le financement de son permis de conduire, elle décide de placer sur un produit d'épargne ses 600 euros d'économies à partir du 1er janvier 2014.

Information 1 : conditions de souscription du livret jeune

— Montant maximum de placement : 1 600 euros — Taux d'intérêt annuel de 2,75 % — Avoir entre 12 et 25 ans — Résider en France — Montant minimum à l'ouverture : 10 euros

Information 2 : coût moyen du permis de conduire

La loi impose un minimum de 20 heures de conduite avant de se présenter au permis. Une enquête de la CLCV (Consommation, Logement et Cadre de Vie) publiée en août 2013 et menée auprès de 447 auto-écoles souligne que ce forfait de 20 heures est facturé du simple au double selon les régions. Par ailleurs, même si le minimum imposé par la loi est de vingt heures de conduite, il en faut plutôt trente en moyenne. Ainsi, en comptant les frais de dossier, il est préférable de prévoir un budget de 1 500 euros.

PARTIE A

1. Expliquer pourquoi Chloé remplit les conditions permettant de souscrire au livret jeune.
2. Aura-t-elle une somme suffisante disponible au 1er janvier 2017 pour passer son permis si elle choisit de souscrire au livret jeune ?

PARTIE B

Chloé aura besoin de 1 500 euros pour financer son permis. Ses parents lui conseillent de verser chaque mois sur le livret la somme supplémentaire de 25 euros, à partir du 1er février 2014. Ils lui expliquent que le taux annuel du livret jeune correspond à un taux mensuel de 0,226 %.

1. Ses parents lui présentent un extrait d'une page de tableur qui simule l'évolution d'épargne :

	A	B
1	01/01/2014	600,00 €
2	01/02/2014	626,36 €
3	01/03/2014	652,77 €
4	01/04/2014	679,25 €
5	01/05/2014	705,78 €
6	01/06/2014	732,38 €
7	...	...

   a) Justifier que, dans la feuille de calcul ci-dessus, la formule à saisir dans la cellule B2 est :
   $\boxed{= 1{,}002\,26 \times \text{B1} + 25}$.

   b) Déterminer la somme qui serait disponible sur le livret au 1er juillet 2014.

2. Chloé veut déterminer au bout de combien de mois elle aurait l'argent nécessaire pour financer son permis en suivant le conseil de ses parents.
   Elle décide de noter u_n la somme, en euros, disponible le n-ième mois après l'ouverture du livret. Ainsi, u_0 vaut 600 euros.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Chloé décide d'écrire l'algorithme suivant :

Variables
  n : un nombre entier naturel
  u : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 0
  Affecter à u la valeur 600
Traitement
  Tant que ......
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à u la valeur ......
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher ......

Trois lignes de l'algorithme comportent des pointillés. Recopier ces lignes et les compléter pour que Chloé puisse déterminer le nombre de mois cherché.

c) Au bout de combien de mois Chloé aura-t-elle l'argent nécessaire pour financer son permis si elle suit les conseils de ses parents ?

EXERCICE 4 (4 points)

Une entreprise de transport dispose d'un nombre important de camions. On admet que la distance quotidienne parcourue par chaque camion, exprimée en kilomètres, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 500 et d'écart type 40.

1. Donner la distance moyenne parcourue en un jour par un camion.
2. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure au moins 500 km en un jour.
3. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure entre 380 km et 460 km en un jour.
4. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure plus de 460 km en un jour.
5. Le directeur de l'entreprise affirme qu'environ 95 % de ses camions parcourent entre 460 et 540 km par jour. A-t-il raison ?

NOUVELLE CALÉDONIE 2014

EXERCICE 1 (6 points)

Au 1er janvier 2014, un particulier installe 20m^2 de panneaux photovoltaïques à son domicile.
Pour estimer la rentabilité de cette installation, il utilise la documentation suivante :

> En France 1m^2 de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kWh/an.
> La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an.
> La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kWh

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014+n$.

PARTIE A

1. a) Déterminer la quantité d'énergie produite en 2014 et la quantité d'énergie produite en 2015.
   b) Vérifier que $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n$ pour tout entier naturel n.
2. Quelle estimation, à la dizaine de kWh près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2044 ?
3. Que devient la quantité d'énergie produite annuellement au bout d'un grand nombre d'années ?
4. En quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement ?

PARTIE B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
1   VARIABLES
2   u EST_DU_TYPE NOMBRE
3   S EST_DU_TYPE NOMBRE
4   n EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DÉBUT ALGORITHME
6   n PREND_LA_VALEUR 0
7   u PREND LA VALEUR 1 900
8   S PREND LA VALEUR 1 900
9   TANT_QUE (S < 20000) FAIRE
10  DÉBUT_TANT_QUE
11  n PREND LA VALEUR n+1
12  u PREND_LA_VALEUR u×0,97
13  S PREND_LA_VALEUR S+u
14  FIN_TANT_QUE
15  AFFICHER n
16  FIN_ALGORITHME
```

1. a) À quoi sert la ligne 8 ?
   b) La valeur affichée en exécutant cet algorithme est 12. Que signifie ce résultat ?
2. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
   Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 2 (5 points)

Un grand constructeur automobile propose une nouvelle gamme de véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.

PARTIE A

On s'intéresse à l'autonomie en kilomètres de cette nouvelle gamme de véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui à un véhicule tiré au hasard associe son autonomie en km.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d'écart type $\sigma = 6$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.
On considère qu'un véhicule est conforme lorsque son autonomie est comprise entre 92 et 116.
Déterminer la probabilité que le véhicule soit déclaré conforme.

PARTIE B

Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir leur certificat de conformité.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de véhicules non-conformes dans cet échantillon.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non-conforme est 0,05.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « dans l'échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes ». On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

PARTIE C

Le constructeur automobile veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour la vente de cette nouvelle gamme de véhicules.
Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 1 000 véhicules produits, on constate la vente de 148 véhicules avant la campagne publicitaire.
Sur une même période, après la campagne publicitaire, pour un échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions, on constate la vente de 177 véhicules.
Que peut-on en conclure sur la campagne publicitaire ?
Vous pourrez déterminer les intervalles de confiance avec un niveau de confiance de 95 % correspondant à chacune de ces situations.

EXERCICE 3 (4 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est attendue. Une bonne réponse apporte 1 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de points.

Dans les questions 1. et 2. on considère la fonction f définie sur $]7\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + x + \dfrac{1}{(x-7)^2}$

1. Une primitive F de f est donnée par :
   a) $F(x) = 6x + 1 + \dfrac{2}{(x-7)^3}$
   b) $F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{(x-7)}$
   c) $F(x) = 9x^3 + 2x^2 + \dfrac{1}{(x-7)}$
   d) $F(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + \ln(x-7)$
2. Laquelle des limites suivantes est correcte ?
   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
   b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 7\\ x>7}} f(x) = +\infty$
   d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 7\\ x>7}} f(x) = 154$
3. Soit $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors l'écriture exponentielle du conjugué de z est :
   a) $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   b) $\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   c) $\overline{z} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
   d) $\overline{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$
4. Un argument de $z = \sqrt{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{7}}$ est :
   a) $\dfrac{\pi}{14}$
   b) $\dfrac{13\pi}{14}$
   c) $-\dfrac{2\pi}{9}$
   d) $\sqrt{7}$

EXERCICE 4 (5 points)

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire au taux de sel (en grammes par litre), qui doit rester inférieure à $3{,}9\,\text{g.L}^{-1}$.
On modélise la situation en notant s la salinité exprimée en grammes par litre et t le temps écoulé en minutes depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de s est représentée par l'équation différentielle

$$(\text{E}): \quad y' + 0{,}01y = 0{,}39.$$

1. Résoudre l'équation (E).

On admet pour la suite qu'en considérant les conditions initiales, la fonction s est définie par

$$s(t) = 39 - 38{,}88\text{e}^{-0{,}01t}.$$

2. a) Quelle est la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident c'est-à-dire à $t = 0$?
   b) Justifier que la fonction s est strictement croissante.
   c) Déterminer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} près.
   d) Que devient la salinité de l'eau du réservoir si on n'intervient jamais ?
3. La salinité doit rester inférieure à $3{,}9\,\text{g.L}^{-1}$.
   De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ?
   Justifier la réponse.

POLYNÉSIE 2014

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie la réponse choisie

Dans les questions 1. et 2., on considère le complexe $z = -2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Le complexe z^3 est égal à :

a. 8 **b.** -8 **c.** $8\mathrm{i}$ **d.** $-8\mathrm{i}$

2. Un argument de z est :

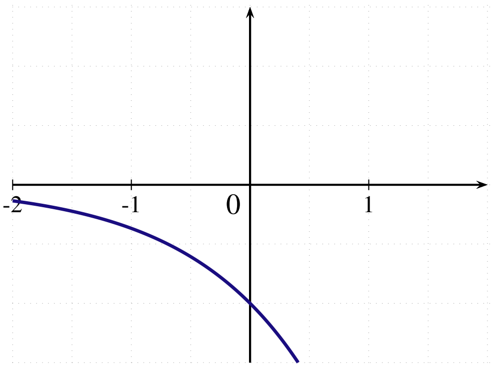
a. $-\dfrac{2\pi}{3}$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **c.** $-\dfrac{\pi}{3}$ **d.** $\dfrac{\pi}{3}$

3. On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels.
Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

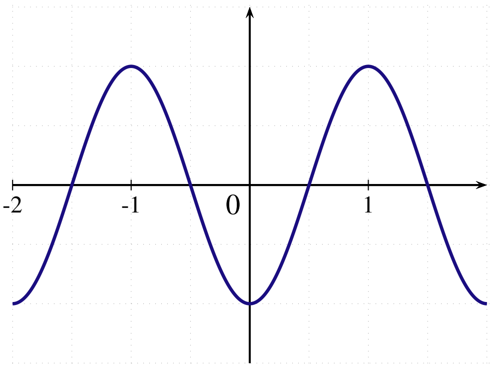
a. $f(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}$ **b.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{3}$ **c.** $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$ **d.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$

4. La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4\pi^2 y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$ admet comme représentation graphique :

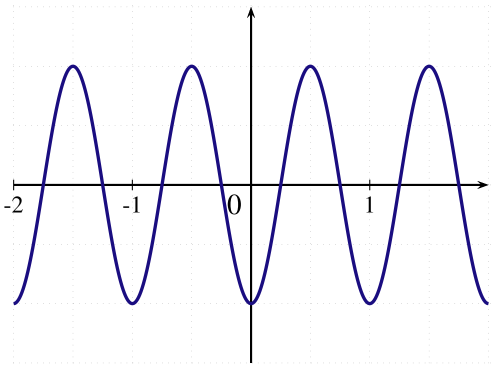
a.



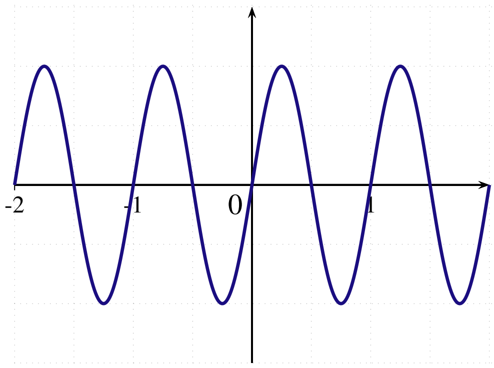
b.



c.



d.



EXERCICE 2 (4 points)

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit 374 kg de déchets ménagers par habitant.* »
Source Ademe

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.
Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011+n$.
   a) Montrer que $d_1 = 0{,}985 d_0$.
   b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Exprimer d_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (d_n).
   c) Quelle devrait être, à ce rythme là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à d la valeur 400
Traitement :	Tant que $d > 374$
	Affecter à N la valeur $N+1$
	Affecter à d la valeur $0{,}985d$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

   Donner la valeur affichée pour N et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près*

Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires de forme cubique en polypropylène.

Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule.

L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité d'une production de boîtes cubiques.

A. LOI NORMALE

Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[16{,}7 ; 17{,}3]$.

La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire C qui suit la loi normale d'espérance 17 et d'écart type 0,14.

1. Calculer $P(16{,}7 \leqslant C \leqslant 17{,}3)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

B. LOI BINOMIALE

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production.

On note p la probabilité de l'évènement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ».

On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 200 et p, et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifier que $p = 0{,}03$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

C. INTERVALLE DE FLUCTUATION

On rappelle que, pour une proportion p connue dans une production, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence calculée sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Dans le cadre d'un fonctionnement correct du thermoformage, on admet que la proportion p de boîtes non conformes dans la production est 3 %.

1. Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 200.
2. On contrôle le bon fonctionnement du thermoformage en prélevant au hasard dans la production des échantillons de 200 boîtes. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a compté 10 boîtes non conformes.

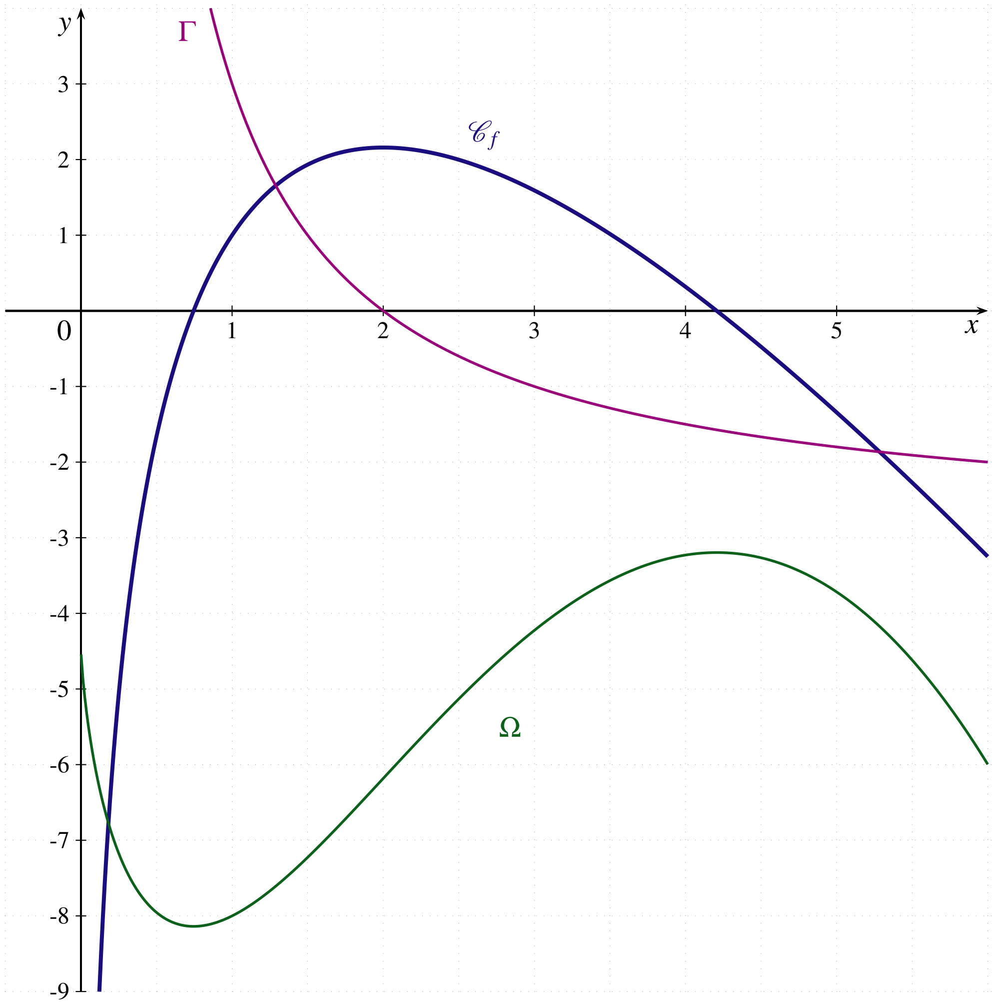
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la thermoformeuse ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = 6\ln x + ax + b$ où a et b sont des constantes réelles.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
Le point $A(1~;~1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
$\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.



1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = 6\ln x - 3x + 4$.

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathscr{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.
4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $H(x) = 6x\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.
4. a) À l'aide du graphique, donner la valeur de $F(1)$.
   b) En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2014

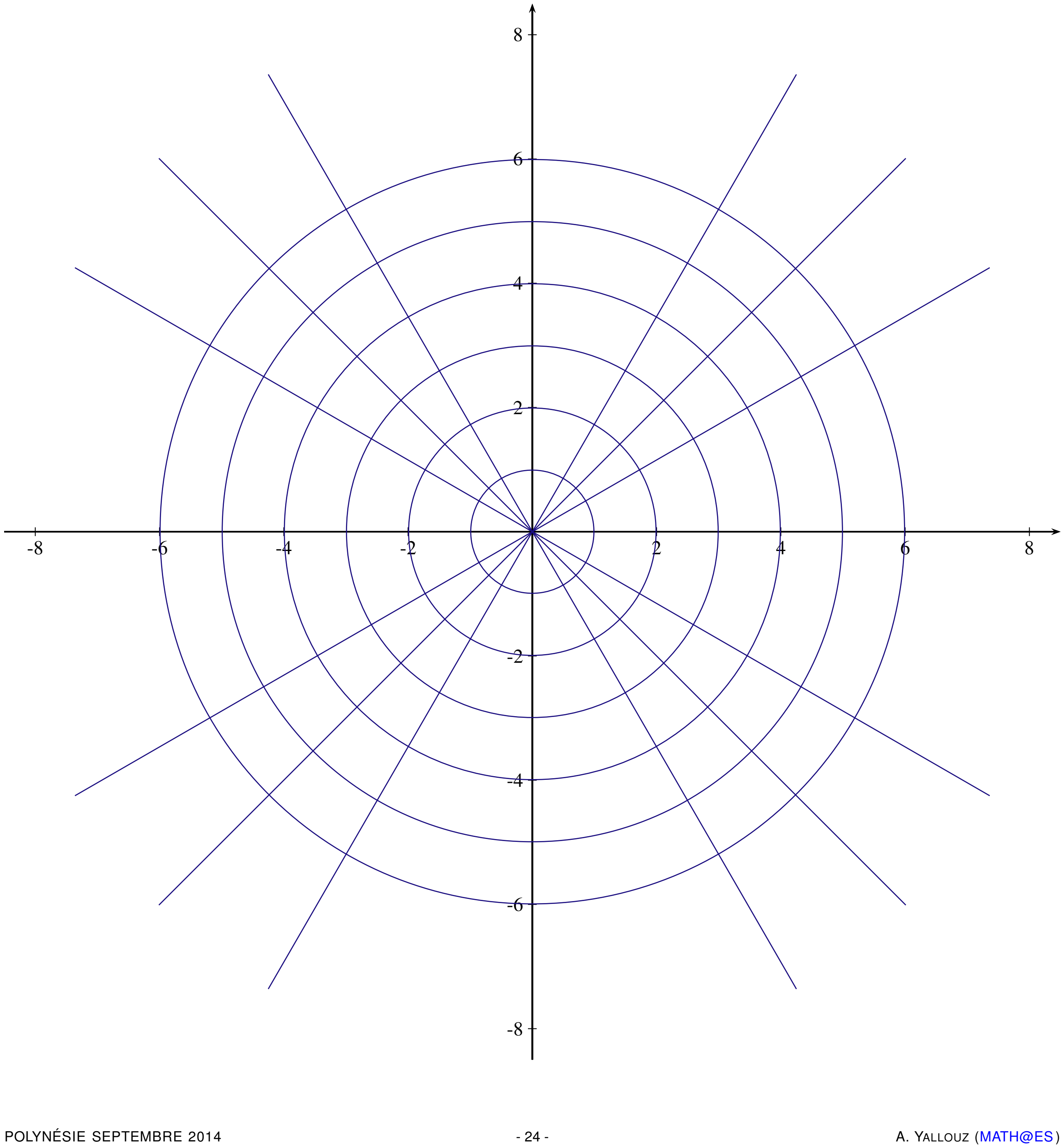
EXERCICE 1 (4 points)

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le repère donné en annexe.
3. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

ANNEXE à rendre avec la copie



EXERCICE 2 (6 points)

Une entreprise informatique a réalisé en 2013 un bénéfice de 22 000 €. La direction de cette entreprise se fixe pour objectif une hausse annuelle de son bénéfice de 4,5 %.
Pour tout entier naturel n, on note b_n le bénéfice prévu pour l'année $2013+n$, on a donc $b_0 = 22000$.

PARTIE A

1. Calculer les bénéfices b_1 et b_2 espérés pour 2014 et 2015.
2. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer alors b_n en fonction de n.

PARTIE B

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N prend la valeur 0
B prend la valeur 22 000
Tant que B ⩽ 40000
    N prend la valeur N + 1
    B prend la valeur 1,045 × B
Fin Tant que
A prend la valeur N + 2013
Afficher A
```

1. Expliquer à quoi correspondent les variables N et B.
2. Exécuter cet algorithme et donner le dernier résultat affiché.
3. Expliquer à quoi correspond cette valeur.
4. La direction souhaite savoir à partir de quelle année le bénéfice de l'entreprise sera supérieur à 40 000 €.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
   $$22000 \times 1{,}045^x > 40000.$$
   b) Quel lien existe-t-il entre le résultat de la question 2. de la partie B et l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente ?

EXERCICE 3 (6 points)

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).
Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = 2{,}5t\mathrm{e}^{-t}.$$

PARTIE A

1. Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures.
2. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 2{,}5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
3. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E):\qquad y' + y = 2{,}5\mathrm{e}^{-t}.$$

4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f(t) = \dfrac{2{,}5t}{\mathrm{e}^t}$, déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
5. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
6. Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée ?

PARTIE B

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.
   Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, à partir de quelle heure pourra-t-elle reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure ?
   On utilisera la représentation graphique de la fonction f.

EXERCICE 4 (4 points)

PARTIE A : Loi exponentielle et radioactivité

On modélise la durée de vie T (exprimée en jours) d'un élément radioactif par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que pour tout $t > 0$, $P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
Le Thorium 227 a une demi-vie de 18 jours, ce qui signifie que :

$$P(T \geqslant 18) = P(T \leqslant 18) = 0{,}5.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0, P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Calculer la valeur du paramètre λ pour le Thorium 227.
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.
3. On suppose que $\lambda = 0{,}04$.
   Donner alors la durée de vie moyenne d'un atome de Thorium 227.

PARTIE B : Loi normale et usinage

Une entreprise fabrique en grande quantité des pièces tubulaires destinées à l'industrie aérospatiale. Le diamètre (exprimé en centimètres) d'une de ces pièces est modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 3,65 et d'écart type 0,004.
Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près*.

1. Une pièce est décrétée conforme lorsque son diamètre en centimètres est compris entre 3,645 et 3,655.
   Calculer la probabilité qu'une pièce tubulaire de la production soit décrétée conforme.
2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pièces conformes est 79 %. On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence de pièces conformes sur un échantillon de taille n est

   $$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

   On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 100 pièces.
   Lors d'un contrôle, on trouve 25 pièces défectueuses. Le responsable qualité doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?
   Justifier la réponse.

BACCALAURÉAT STI2D 2014

MATHÉMATIQUES : INDEX THÉMATIQUE