

BAC 2016

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES SESSION 2016

SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU DÉVELOPPEMENT DURABLE

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne
par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2016

ANTILLES GUYANE 2016	1
Exercice 1	1
Exercice 2	2
Exercice 3	4
Exercice 4	5
FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2016	6
Exercice 1	6
Exercice 2	7
Exercice 3	9
Exercice 4	10
FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2016	11
Exercice 1	11
Exercice 2	12
Exercice 3	13
Exercice 4	14
NOUVELLE CALÉDONIE 2016	16
Exercice 1	16
Exercice 2	18
Exercice 3	19
Exercice 4	20
POLYNÉSIE 2016	21
Exercice 1	21
Exercice 2	22
Exercice 3	24
Exercice 4	26

ANTILLES GUYANE 2016

EXERCICE 1

(4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

\ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. La forme algébrique du nombre complexe $\frac{1+2i}{3-i}$ est :

- a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{10}i$
- b) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$
- c) $\frac{1}{8} + \frac{7}{8}i$
- d) « Aucune des réponses a. - b. - c. ».

2. La forme exponentielle du nombre complexe $2 - 2i\sqrt{3}$ est :

- a) $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- b) $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$
- c) $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- d) $16e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. Pour tout réel a strictement positif, $\ln a + \ln 2a$ est égal à :

- a) $\ln(3a)$
- b) $3\ln a$
- c) $\ln(2a^2)$
- d) $2\ln(a^2)$

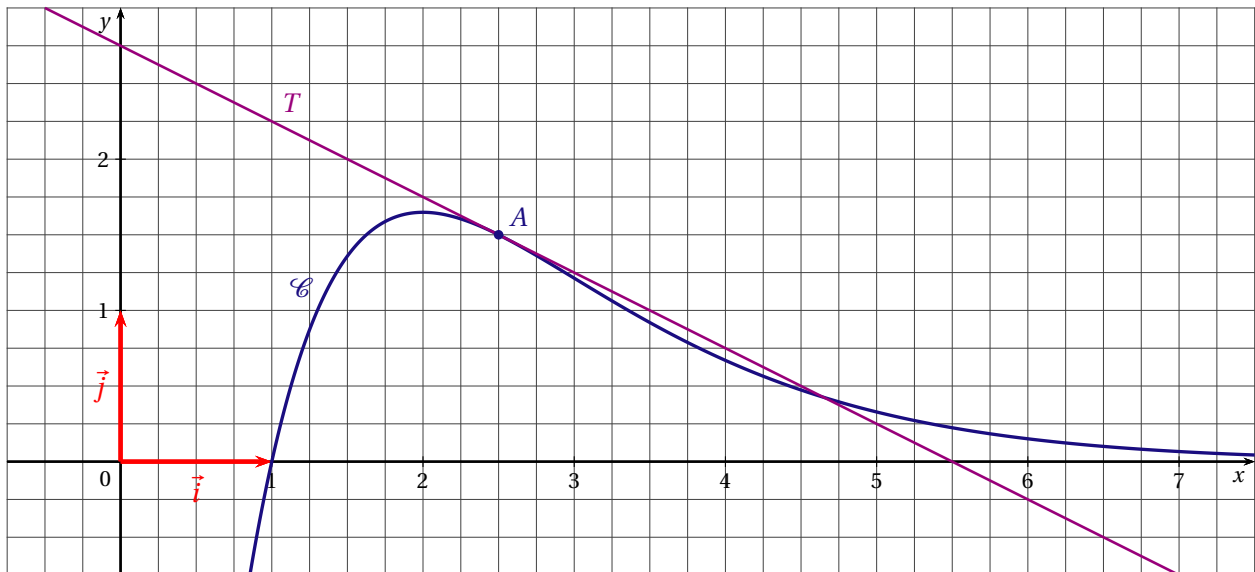
4. Une solution f de l'équation différentielle $3y'' + 12y = 0$ est la fonction définie pour tout réel t par :

- a) $f(t) = \sin(4t)$
- b) $f(t) = \sin(2t)$
- c) $f(t) = 2\sin(3t)$
- d) « Aucune des réponses a. - b. - c. ».

EXERCICE 2

(7 points)

Sur le graphique ci-dessous, \mathcal{C} est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



PARTIE A - Étude graphique

La droite T est tangente à \mathcal{C} au point $A(2,5; 1,5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;
2. $f'(2,5)$;
3. Une équation de la tangente T ;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

PARTIE B - Modélisation

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x , $f(x) = (ax + b)e^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants $f(1)$; $f'(2,5)$.
3. Dédire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b .
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

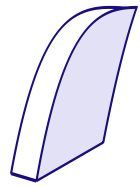
PARTIE C - Étude algébrique

On admet que pour tout réel x , $f(x) = (x - 1)e^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = e^{2,5} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
4. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

PARTIE D - Application

On souhaite déterminer l'aire S en unité d'aire de la surface d'une des faces principales du boîtier plastique de l'appareil auditif schématisé ci-contre. Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface.



Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

- l'axe des abscisses;
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2,5$;
- la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f étudiée précédemment;
- la courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x, g(x) = -2x^2 + 12x - 16.$$

1. Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.

Pour déterminer l'aire S de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $I = \int_2^{2,5} g(x) dx$.

3. on souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J = \int_1^{2,5} f(x) dx$ où f est la fonction dont une expression est donnée dans la partie C.

a) Vérifier qu'une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} est la fonction définie par :

$$\text{pour tout réel } x, F(x) = -xe^{-x+2,5}.$$

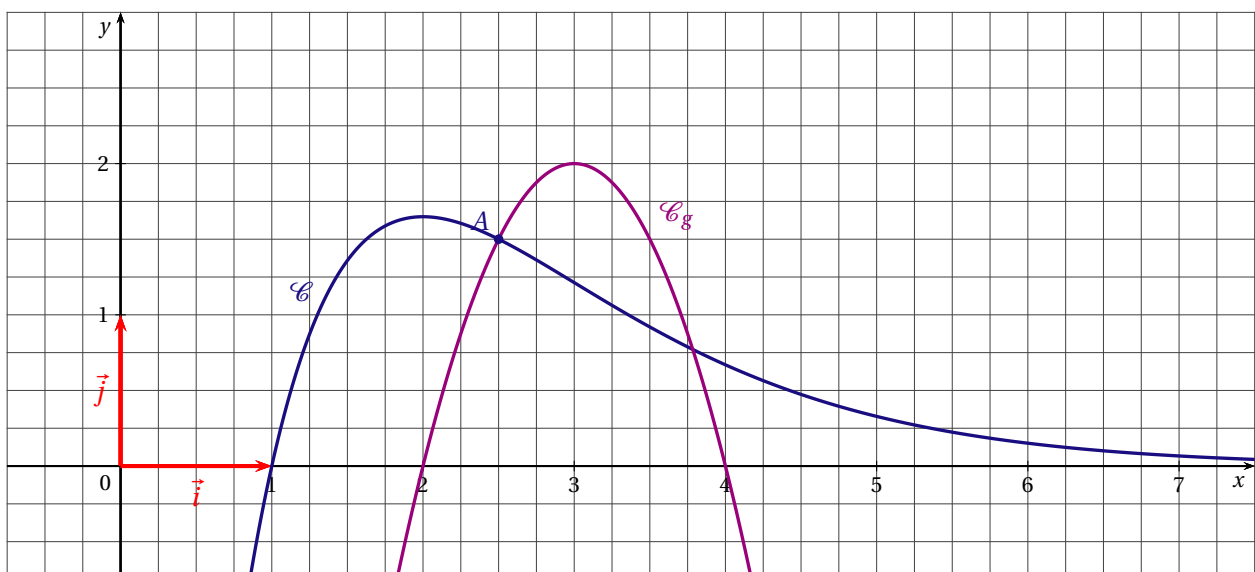
b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale J .

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire S en unité d'aire.

5. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire S en unité d'aire.

ANNEXE

À rendre avec la copie



EXERCICE 3**(3 points)**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Un manufacturier de pneumatiques produit des pneus d'avions en grande quantité.

Il s'engage à livrer des produits spécifiques aux aviateurs de masse maximum garantie de 124 kg. Ces pneus doivent supporter une charge nominale de 10 tonnes, des vitesses pouvant aller jusqu'à $420 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ et des températures instables allant de -40°C (en altitude) à 250°C (au moment du décollage).

PARTIE A

On note M la variable aléatoire qui, à chaque pneu prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en kilogramme. On admet que la variable aléatoire M suit la loi normale de moyenne $\mu = 121,37$ et d'écart type $\sigma = 0,42$.

- Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg comprise entre 120,95 et 121,79.
- Déterminer la probabilité qu'un pneu prélevé au hasard ait une masse en kg supérieure à 122,63.

PARTIE B

Un pneu trop lourd entraîne une augmentation de la consommation du kérosène.

Lorsque la masse d'un pneu reçu par une compagnie aérienne dépasse 121,9 kg cela entraîne des pénalités financières pour le manufacturier.

Sur la chaîne de fabrication, on prélève de façon aléatoire un échantillon de 36 pneus et on constate que 2 d'entre eux ont une masse qui dépasse 121,9 kg.

- Quelle est la fréquence des pneus dans l'échantillon prélevé dont la masse dépasse 121,9 kg?
- Déterminer l'intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95 % de la proportion de pneus dont la masse dépasse 121,9 kg dans la production.

On rappelle que lorsqu'une fréquence f est mesurée dans un échantillon de taille n , l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion dans la population est donné par :

$$I = \left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

- Donner une interprétation du résultat précédent.

EXERCICE 4

(6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-2} .

Par souci de santé, d'environnement ou simplement pour le plaisir du goût l'alimentation biologique s'invite de plus en plus dans les assiettes des français.

Deux fermes auvergnates décident de se convertir dans la production biologique.

PARTIE A

En 2015, la ferme *Bernard* décide de cultiver 2 hectares selon le mode de production biologique et d'augmenter cette surface de production de 20 % par an les années suivantes.

On note S_n la surface, en hectare, cultivée selon le mode de production biologique, durant l'année « 2015 + n ».

1. Quelle sera la surface cultivée en hectare selon le mode de production biologique durant l'année 2016, puis durant l'année 2017?
2. Quelle est la nature de la suite (S_n) ? Justifier.
3. Exprimer S_n en fonction de n .
4. La ferme *Bernard* dispose d'une surface de 10 hectares. Durant quelle année la totalité de la ferme sera cultivée selon le mode de production biologique? Justifier par le calcul.

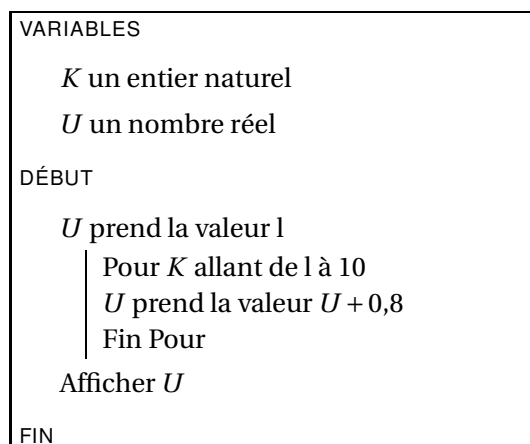
PARTIE B

En 2015, la ferme *Dupont* décide de cultiver 1 hectare, selon le mode de production biologique et d'augmenter cette surface de 0,8 hectare par an.

On note u_n la surface cultivée selon le mode de production biologique, durant l'année « 2015 + n », exprimée en hectare.

La production biologique impose aux sols un temps de repos pour se reconstituer. La ferme *Dupont* dispose d'une surface de 18 hectares. Afin de garder un certain bénéfice, la ferme *Dupont* limite sa production biologique à 70 % de la surface totale de la ferme chaque année.

On considère l'algorithme suivant :



1. Tester cet algorithme. Pour cela on complétera le tableau suivant donnant les valeurs de K et U :

Valeur de K	\times	1	...
Valeur de U	1

2. Quelle est la valeur finale affichée par cet algorithme? À quoi correspond-elle?
3. La limite fixée par la production biologique est-elle atteinte pour cette année-là?
4. Réécrire l'algorithme afin qu'il affiche l'année à partir de laquelle la limite imposée par une production biologique sera atteinte.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2016

EXERCICE 1

(4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Un argument du nombre complexe $2 + 2i$ est égal à :

- a) $\frac{-\pi}{4}$
- b) $\frac{-9\pi}{4}$
- c) $2\sqrt{2}$
- d) $\frac{\pi}{4}$

2. Le nombre complexe $e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i\frac{2\pi}{15}}$ est égal à :

- a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- c) $0,5 + 0,866 \times i$
- d) $0,5 + 0,8660254038 \times i$

3. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = \frac{5}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Le triangle OAB est :

- a) isocèle en O
- b) rectangle en O
- c) rectangle et isocèle en B
- d) isocèle en B

4. Pour tout nombre réel θ ; le nombre complexe $e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}$ est égal à :

- a) $2\cos(\theta)$
- b) $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- c) 1
- d) $2i\sin(\theta)$

EXERCICE 2

(6 points)

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25 % de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation.

Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé. Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1,25 mg/L (milligrammes par litre).

DOCUMENT

Réglementation des piscines publiques		
Paramètres contrôlés	Seuils de qualité réglementaire	Incidences sur la qualité de l'eau
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	< 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	> 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau
Source : Agence Régionale de Santé		

À partir du 1^{er} juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.

Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le responsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

PARTIE A

- Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le $n^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1^{er} juin à 9 h après l'ajout de chlore.
 - Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9 h est $u_0 = 750$.
Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai?
 - Montrer que $u_1 = 1132,5$.
 - Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 570$.
 - La suite (u_n) est-elle géométrique?
- Soit l'algorithme ci-dessous :

Variables
u : un nombre réel
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
Initialisation
Saisir la valeur de N
u prend la valeur 750
Traitement
Pour k allant de 1 à N
u prend la valeur $0,75u + 570$
Fin du Pour
Sortie
Afficher u

- Quel est le rôle de cet algorithme?

- b) Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas » pour $N = 3$:

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
u	750			

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte?

- c) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la quantité de chlore le 15^{ième} jour juste après l'ajout de chlore.

PARTIE B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note d_n l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n , on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

- Calculer d_0 , d_1 et d_2 . On donnera une valeur exacte.
 - Justifier que d_0 , d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.
- Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0,25u_n + 570$.
- On admet que pour tout entier naturel n , on a $d_{n+1} = 0,75d_n$.
 - Justifier que $d_n = 382,5 \times 0,75^n$.
 - En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2280 - 1530 \times 0,75^n$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat trouvé.

EXERCICE 3

(4 points)

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

DOCUMENT**Échelle de bruit**

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

- D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore?
- La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $[10^{-12}; 10^6]$ et le niveau sonore est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln(x) + 120.$$

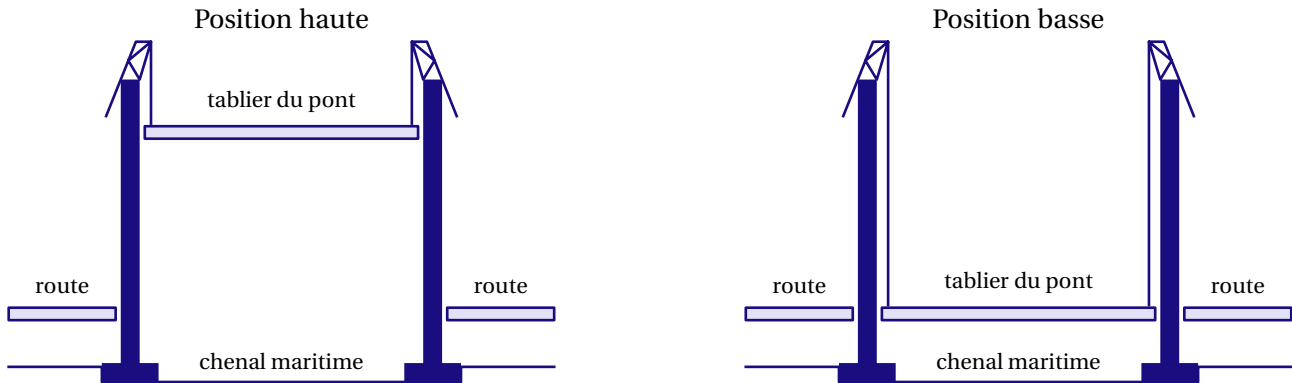
On pourra prendre $\frac{10}{\ln 10} \approx 4,34$.

- Vérifier la conjecture émise à la question 1.
 - Quel serait le niveau sonore de deux motos?
- Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

EXERCICE 4**(6 points)**

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
 Longueur du tablier : 30 mètres
 Temps de montée du tablier : 2 minutes
 Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
 Temps de descente du tablier : 2 minutes

PARTIE A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'intéresse ici au temps d'attente D , exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

- Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?
- On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2; 10]$.
Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
- Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

PARTIE B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. Ce temps est appelé temps de latence.

- Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.
- On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 0,05e^{-0,05x}$.
 - Montrer que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = -e^{-0,05x}$ est une primitive de f .
 - On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0; +\infty[$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x) dx$.
Démontrer que $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,05t}$.
- Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.
 - Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.
 - Calculer $P(12 \leq T \leq 24)$.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2016

EXERCICE 1

(6 points)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en minutes.

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.

La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240 °C.

1. Dans cette question, on ne demande pas de justification.
 - a) Quelle est, à la sortie du four, la température des plaques?
 - b) Comment varie, à la sortie du four, la température des plaques au cours du temps?
 - c) Vers quelle valeur la température des plaques devrait-elle se stabiliser?
2. La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t , exprimé en minutes, par une fonction g .
On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 274e^{at} + 26$ où a est un nombre réel.
 - a) Calculer $g(0)$. Ce résultat est-il conforme aux données?
 - b) D'après la question 1, quel doit être le signe du nombre réel a ?
 - c) On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262 °C.
Montrer que la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient a est $-0,05$.
3. Dans cette question on considère que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g(t) = 274e^{-0,05t} + 26.$$

- a) Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité?
- b) Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques?
- c) En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.

EXERCICE 2

(4 points)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en minutes.

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.

Les parties A et B sont indépendantes.

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} .

Une usine métallurgique fabrique des boîtes de conserve pour des entreprises spécialisées dans le conditionnement industriel de légumes.

La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard soit non conforme est 0,04.

Un lot de 200 boîtes choisies au hasard est livré à une entreprise spécialisée dans le conditionnement des légumes. Le nombre de boîtes fabriquées par cette usine métallurgique est assez important pour pouvoir assimiler un tel prélèvement à un tirage avec remise de 200 boîtes.

PARTIE A

La variable aléatoire X désigne le nombre de boîtes non conformes dans un tel lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'un tel lot contienne exactement quatre boîtes non conformes.

PARTIE B

On décide d'approcher la loi binomiale suivie par X par la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2,77$.

1. Justifier le choix de ces paramètres.
2. À l'aide de la loi normale ainsi définie :
 - a) calculer $P(6 \leq X \leq 10)$ et interpréter le résultat trouvé;
 - b) déterminer une approximation de la probabilité qu'il y ait au maximum 4 boîtes non conformes.

PARTIE C

Dans le lot livré de 200 boîtes, on compte 11 boîtes non conformes. Le fabricant des boîtes est averti. Doit-il s'inquiéter?

On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.

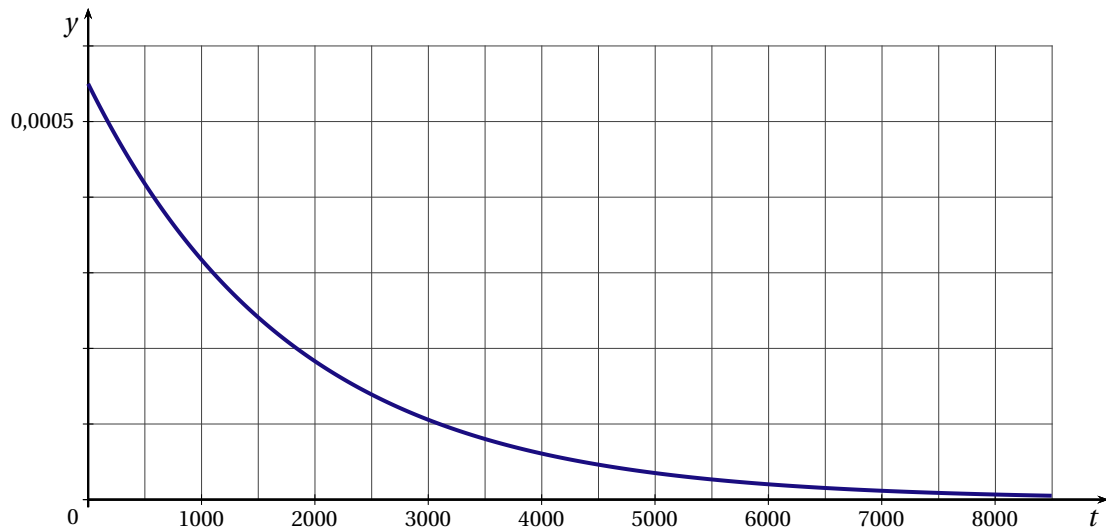
EXERCICE 3**(3 points)**

Pour chacune des 3 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en **justifiant** la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Indiquer sur la copie le numéro de la proposition, la réponse correspondante et la justification.

1. **Proposition 1** : $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = i\sqrt{2}$.

2. La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 5,5 \times 10^{-4}$ et dont la fonction de densité de probabilité est représentée ci-dessous.



Proposition 2 : la probabilité, arrondie à 0,01 près, qu'un composant électronique pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1 000 heures est 0,35.

3. **Proposition 3** : la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par $f(x) = \cos(x)$ est $-\frac{2}{\pi}$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ est donnée par la formule :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

EXERCICE 4

(7 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Dans une municipalité, la collecte des déchets des particuliers s'effectue, depuis 2012, à l'aide de camions équipés de capteurs. Une tarification « incitative » permet aux habitations de diminuer leur facture en réduisant la masse de leurs ordures ménagères résiduelles par un choix de produits comportant moins d'emballages, une réduction du gaspillage alimentaire et un meilleur tri.

Le document 1 présente la masse moyenne de déchets, en kilogrammes, collectés par année depuis 2012 et par habitation de la ville.

Le document 2 présente les tarifs pratiqués en 2015 par la ville pour la collecte des ordures ménagères résiduelles (on suppose que ces tarifs resteront identiques les années suivantes).

DOCUMENT 1

Années 2012 à 2015				
Année	2012	2013	2014	2015
Déchets recyclables	261	275	289	305
Ordures ménagères résiduelles	274	269	262	256
Total	535	544	551	561

DOCUMENT 2

Année 2015			
Tranches tarifaires	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
Masse M en kilogrammes	$0 \leq M < 100$	$100 \leq M < 300$	$300 \leq M$
Forfait	200 €	300 €	420 €

PARTIE A

- Commenter l'évolution de la masse moyenne des déchets collectés par habitation depuis 2012.
- Une famille a jeté 320 kg d'ordures ménagères résiduelles en 2015. Si elle diminue la masse de ses ordures ménagères résiduelles de 1% par an, en quelle année changera-t-elle de tranche tarifaire?

PARTIE B

En 2015, la municipalité comptait 10 000 habitations.

Dans le cadre de l'aménagement d'un nouveau quartier un constructeur garantit la livraison de 300 nouvelles habitations chaque année au 1^{er} janvier, de 2016 à 2024. En raison de la demande, ces logements seront immédiatement occupés dès le 1^{er} janvier.

La municipalité a souscrit avec un centre d'incinération un contrat de 9 ans qui a pris effet au 1^{er} janvier 2016. Le contrat prévoit de fortes pénalités financières dès que la masse annuelle d'ordures ménagères résiduelles à incinérer vient à dépasser 2 800 tonnes.

L'objectif de la municipalité est d'éviter ces pénalités.

- Vérifier que cet objectif ne sera pas atteint si la masse annuelle moyenne d'ordures ménagères résiduelles par habitation reste constante égale à 256 kg.
- Afin d'atteindre cet objectif, il convient donc de diminuer la masse moyenne d'ordures ménagères résiduelles à incinérer. La municipalité souhaite déterminer le pourcentage annuel minimal de réduction de la masse moyenne d'ordures ménagères résiduelles par habitation, pendant toute la durée du contrat. On admet que l'algorithme ci-dessous détermine ce pourcentage.

Variables
N : un nombre entier
m : un nombre réel
q : un nombre réel
Initialisation
q prend la valeur 1
N prend la valeur 12 700
m prend la valeur 0,256
Traitement
Tant que $N \times m \geq 2800$
q prend la valeur $q - 0,001$
m prend la valeur $0,256 \times q^9$
Fin Tant que
Sortie
Afficher $(1 - q) \times 100$

Cet algorithme affiche 1,7.

- Expliquer la ligne « N prend la valeur 12 700 »
 - Expliquer la ligne « m prend la valeur $0,256 \times q^9$ »
3. On considère que la masse annuelle moyenne d'ordures ménagères résiduelles par habitation va baisser chaque année de 1,7%, à partir du 1^{er} janvier 2016 sur une période de 9 ans.
- On note u_n cette masse, exprimée en tonnes, pour l'année 2015 + n où n est un entier naturel. On a donc $u_0 = 0,256$.
- Calculer les termes u_1 , u_2 et vérifier que $u_3 \approx 0,243$.
Interpréter u_3 .
 - Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - Vérifier que l'objectif fixé par la municipalité est atteint en fin de 2024.

PARTIE C

Dans cette partie, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} .

Des contrôles sont effectués afin de vérifier le tri des déchets.

Protocole d'étude

On choisit au hasard 100 habitations. Des personnels ont ouvert les poubelles de déchets recyclables de ces habitations afin de déterminer s'ils étaient conformes (absence de matériaux non recyclables, de cartons souillés ...).

Résultats de l'étude

Parmi ces 100 poubelles de déchets recyclables, 7 ont été jugées non conformes.

- Déterminer, à l'aide d'un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 95%, une estimation de la proportion de poubelles de déchets recyclables qui ne sont pas conformes.
- La proportion de poubelles de déchets recyclables qui ne sont pas conformes est-elle nécessairement comprise dans cet intervalle de confiance?

NOUVELLE CALÉDONIE 2016

EXERCICE 1

(6 points)

La politique communautaire de gestion des déchets et ses déclinaisons françaises sont définies par de nombreuses directives, dont la portée varie. Certaines ont une portée générale et d'autres concernent certaines catégories de déchets spécifiques.

Le Projet de Plan national de prévention des déchets 2010-2020 concerne les déchets ménagers et assimilés (DMA). L'objectif proposé par ce projet est une réduction annuelle de 7% des DMA produits par habitant entre 2010 et 2020.

Les DMA produits en France ont été de 590 kg par habitant en 2011 et de 570 kg par habitant en 2013.

Source ADEME

PARTIE A

La réduction des DMA produits entre 2011 et 2013 atteint-elle l'objectif fixé par le Projet de Plan national de prévention des déchets?

PARTIE B

On considère que les objectifs du plan national de prévention des déchets sont atteints à partir de 2013.

On modélise par une suite (u_n) la quantité de DMA produits en kg par habitant, le terme u_n correspondant à l'année $(2013 + n)$. Ainsi $u_0 = 570$.

1. Calculer u_1 .
2. Quelle est la quantité de DMA produits, arrondie au kg par habitant, en 2015?
3. Déterminer la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n .

PARTIE C

On considère l'algorithme ci-contre :

Variables	n : un nombre entier naturel q : un nombre réel u : un nombre réel
Entrée	Saisir n
Initialisation	Affecter à u la valeur 570 Affecter à q la valeur 0,93
Traitement	Répéter n fois Affecter à u la valeur $u \times q$
Sortie	Afficher u

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 4$.

Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies au kg près par habitant).

	n	q	u
Entrées et initialisation	4	0,93	570
1 ^{er} passage dans la boucle de l'algorithme			
2 ^e passage dans la boucle de l'algorithme			
3 ^e passage dans la boucle de l'algorithme			
4 ^e passage dans la boucle de l'algorithme			

2. Interpréter la valeur de u obtenue au quatrième passage dans la boucle de l'algorithme.

3. Quel sera le pourcentage de réduction des DMA produits entre 2013 et 2017 si l'objectif du Projet de Plan national de prévention des déchets est atteint chaque année?
4. Quelle devrait être la quantité de DMA produits en 2020 pour atteindre l'objectif fixé par le Projet de Plan national de prévention des déchets?

EXERCICE 2

(5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

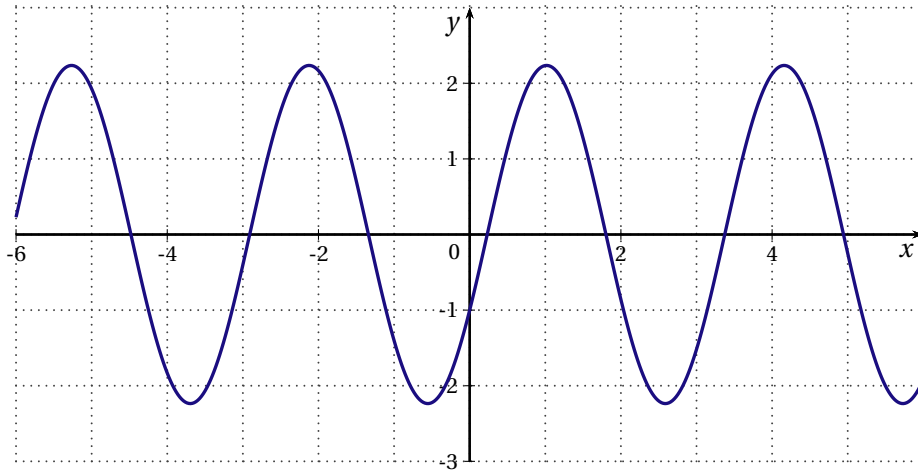
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Considérons les deux nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Affirmation 1 : Le produit $z_1 \times z_2$ est égal à $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

2. **Affirmation 2 :** La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$ admet comme représentation graphique :



3. **Affirmation 3 :** La solution de l'équation $\ln(x+3) = 5$ est $e^5 - 3$.
4. La durée de vie en heures d'un certain type d'ampoules électriques est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\ 125$ (exprimé en h).
- Affirmation 4 :** En moyenne, la durée de vie d'une ampoule est 1 250 h.
5. **Affirmation 5 :** La fonction $F(x) = x \ln x - x + 2$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

EXERCICE 3

(4 points)

Le bassin d'une piscine municipale a une capacité de 600 000 litres d'eau. Afin de respecter les normes d'hygiène et de sécurité, 30 000 litres d'eau de la piscine sont renouvelés chaque heure et le taux de chlore maximum autorisé est de 0,25 mg/L.

Un soir après la fermeture de la piscine, alors que le taux de chlore est indétectable, 1 kg de chlore est déversé par erreur dans le bassin à 20 h.

Le directeur de la piscine souhaiterait savoir quand il pourra ouvrir à nouveau la piscine au public.

On modélise la concentration massique du chlore présent dans la piscine par une fonction f . Lorsque t désigne le temps écoulé depuis l'accident, exprimé en heures, $f(t)$ représente la concentration massique du chlore présent dans la piscine en milligrammes par litre.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,05y = 0 \quad \text{où } y \text{ désigne une fonction de la variable } t.$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E).
b) Que vaut $f(0)$? En déduire une expression de $f(t)$ sur $[0; +\infty[$.
2. On admet que f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{5}{3} \times e^{-0,05t}$.
À quel moment la piscine pourra-t-elle ouvrir de nouveau au public?

EXERCICE 4

(5 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une usine fabrique des batteries au lithium-ion pour des vélos électriques. Le cahier des charges indique qu'une batterie mesure 15 cm de large.

Lors de la fabrication, on modélise la largeur des batteries par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 0,02$. L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité de la production dans cette usine.

PARTIE A

Une batterie est jugée conforme lorsque sa largeur, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[14,95; 15,05]$.

1. Calculer la probabilité qu'une batterie prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

L'usine vend ses batteries au lithium-ion par lots de 2 000 aux fabricants de vélos électriques. En moyenne, chaque lot de 2 000 batteries en contient 24 non conformes.

On note p la probabilité qu'une batterie soit non conforme. On prélève au hasard 2 000 batteries dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On modélise le nombre de batteries non conformes dans un lot de 2 000 par une variable aléatoire Y .

2. Quelle loi suit la variable aléatoire Y ? Préciser ses paramètres.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 30 batteries non conformes dans un lot de 2 000 batteries.

PARTIE B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct des machines de la chaîne de production, on admet que la proportion p de batteries non conformes est 1,2 %.

Le responsable de l'usine affirme qu'il ne vend pas de lot de 2 000 batteries qui en contienne plus de 40 non conformes. Quelle est la fiabilité de cette affirmation?

Justifier.

POLYNÉSIE 2016

EXERCICE 1

(3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et la seule réponse choisie.

Dans cet exercice, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. L'écriture exponentielle du nombre complexe $z = \frac{-3i}{1+i}$ est :

- a) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ b) $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ c) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ d) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Soit f la fonction définie pour tout réel t positif par : $f(t) = 8e^{-0,12t} + 11$. La valeur moyenne de f arrondie à 10^{-1} sur l'intervalle $[0; 24]$ est :

- a) 15,2 b) 13,6 c) 16,7 d) 11,2

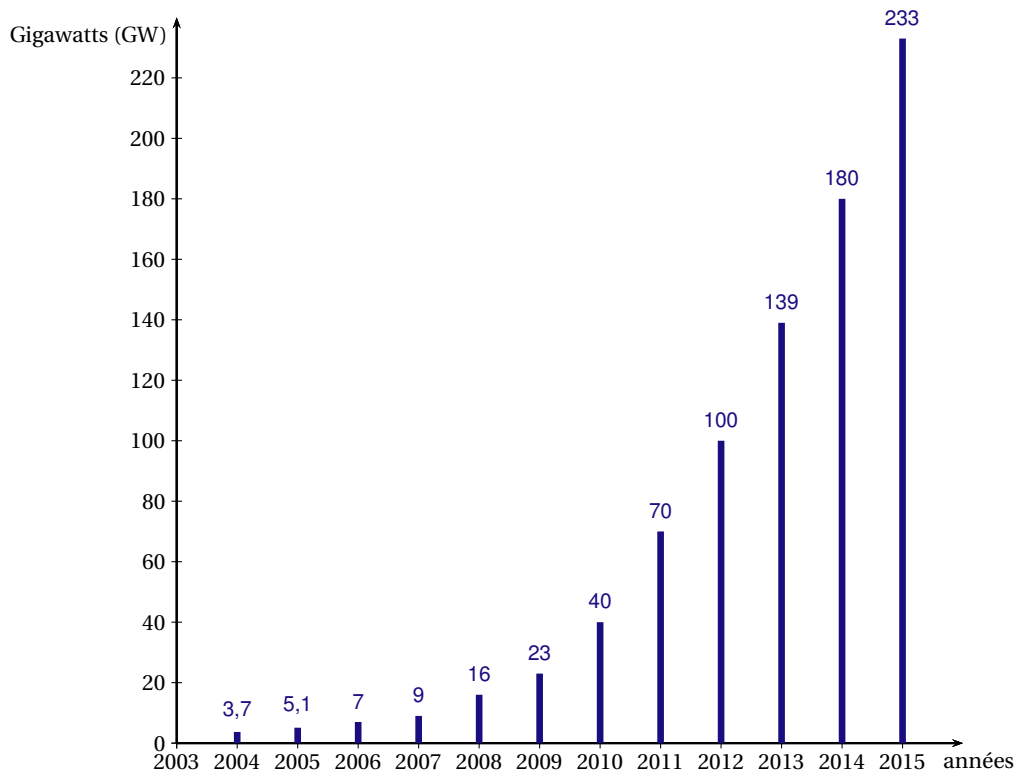
3. On donne dans un repère orthonormé les points : $A(0;2)$; $B(1;3)$; $C(-2;1)$ et $D(-1;0)$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ est égal à :

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -2$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

EXERCICE 2**(6 points)**

L'énergie photovoltaïque voit son coût baisser de façon importante depuis plusieurs années, ce qui engendre une croissance forte de ce secteur. L'évolution de la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde entre fin 2004 et fin 2015 est résumée dans le graphique ci-dessous :

Puissance solaire photovoltaïque installée dans le Monde

- Calculer les pourcentages d'augmentation annuels entre 2013 et 2014 ainsi qu'entre 2014 et 2015 (arrondir à 10^{-1}).
- On se propose d'estimer la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dans les 15 ans à venir, si le taux de croissance annuel reste constant et égal à 30 %.
On note P_n la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde, en GW, à la fin de l'année 2015 + n . On a ainsi $P_0 = 233$.
 - Calculer P_1 puis P_2 (arrondir à 10^{-1}).
 - Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
 - En déduire la nature de la suite (P_n) et donner ses éléments caractéristiques.
 - Exprimer P_n en fonction de n .
 - Calculer la puissance solaire photovoltaïque, en GW, installée dans le monde fin 2025 (arrondir à l'unité).
 - Quel est le pourcentage global d'augmentation de cette puissance solaire mondiale entre 2015 et 2025 (arrondir à l'unité) ?
- On veut déterminer l'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde atteindrait 16 000 GW. Pour atteindre cette puissance, les panneaux photovoltaïques occuperaient au sol l'équivalent d'un carré de 400 km de côté et suffiraient pour produire toute l'électricité consommée dans le monde (consommation domestique, industrielle et des transports).
 - On considère l'algorithme ci-dessous.
Recopier et compléter les lignes 3 et 7 afin que cet algorithme réponde à la question posée.

- 1/ Affecter à N la valeur 0
- 2/ Affecter à P la valeur 233
- 3/ Tant que ...
- 4/ Affecter à N la valeur $N + 1$
- 5/ Affecter à P la valeur $P \times 1,30$
- 6/ Fin Tant que
- 7/ Afficher ...

- b) En faisant tourner cet algorithme complété, déterminer l'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dépasserait 16 000 GW.
- c) Proposer une autre méthode, directe et non algorithmique, pour répondre à la question précédente en détaillant la démarche utilisée.

EXERCICE 3

(6 points)

Deux amis ont monté un atelier associatif pour réparer des vélos. Le but de cette association est que chaque adhérent puisse venir réparer son vélo dans cet atelier avec l'aide d'un spécialiste. Le matériel et les outils sont fournis.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

PARTIE A : les roulements à billes

Nos deux amis commandent régulièrement des lots de 60 roulements à billes pour les vélos. Ils ont constaté que, lors de leur dernière livraison, sur le lot des 60 roulements à billes, 3 étaient défectueux. Ils s'inquiètent donc de la fiabilité du fabricant. Le contrat précise que seulement 4 % des pièces sont défectueuses.

- Calculer la fréquence des pièces défectueuses dans le dernier lot.
- On considère que les pièces constituant ce lot forment un échantillon prélevé de façon aléatoire dans un stock dans lequel 4 % des pièces sont défectueuses.

- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des roulements à billes non conformes dans un échantillon de 60 roulements. Les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} .

On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % sur un échantillon de taille n , avec p la proportion de pièces défectueuses sur la population, est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- Nos amis ont-ils raison de s'inquiéter? Justifier votre réponse.

PARTIE B : les billes

Nos amis se demandent s'ils ne devraient pas plutôt commander des billes pour réparer les roulements évoqués dans la partie A.

Ils commandent une grande quantité de billes de 6 mm de diamètre.

Malheureusement, certaines présentent un défaut de diamètre. Ils s'aperçoivent qu'ils ne peuvent utiliser que les billes mesurant entre 5,9 mm et 6,1 mm.

Sur la note du fabricant est indiqué que la variable aléatoire D qui, à chaque bille, lui associe son diamètre, suit la loi normale d'espérance $\mu = 6$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,05$ mm.

Question : Calculer la probabilité $P(5,9 \leq D \leq 6,1)$. Le résultat sera arrondi à 10^{-2} .

PARTIE C : les chaînes de vélo

Un tableau est mis à disposition pour permettre aux utilisateurs de savoir quand ils doivent changer leur chaîne de vélo. Par exemple, pour une personne utilisant son vélo en ville (vitesse moyenne 16 km.h^{-1}) environ 2 heures par jour, la durée de vie moyenne de la chaîne est de 625 jours.

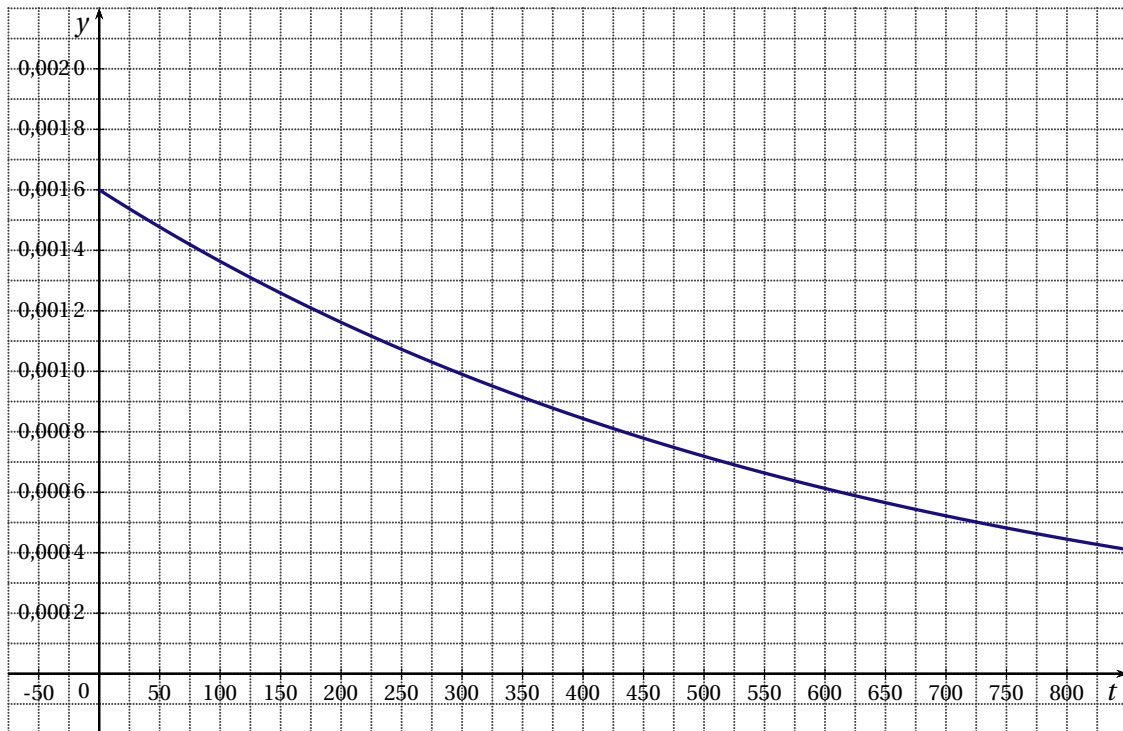
On admet que la durée de vie en jour, d'une chaîne de vélo pour un tel utilisateur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On rappelle que la probabilité que X soit inférieure ou égale à t (exprimé en jour) vaut : $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

- Démontrer que $\lambda = 0,0016$.
- Le graphique en annexe 1 représente la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0016$ (exprimé en jour^{-1}).
 - Représenter sur ce graphique la probabilité que X soit comprise entre 350 jours et 700 jours.
 - Calculer la probabilité que X soit comprise entre 350 jours et 700 jours. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
- Calculer la probabilité que X soit de moins de 550 jours. Arrondir à 10^{-3} .

4. Déterminer la valeur de x pour que $P(X < x) = 0,8$. Le résultat sera arrondi à l'unité. Interpréter ce résultat en le restituant dans le contexte.

ANNEXE 1
à rendre avec la copie



EXERCICE 4

(5 points)

PARTIE A : Lecture graphique

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en annexe 2 avec la droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1; 1,5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :
 - a) $f(x) \geq 1$.
 - b) $f'(x) \geq 0$.
2. a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0; 1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2; 7)$.
 - b) En déduire le nombre dérivé $f'(0)$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par la relation $f(x) = e^{-2x} + 5x$.

1. Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur \mathbb{R} .
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
4. a) Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
 - b) Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet :

- que la courbe C de la partie A est la représentation de la fonction f définie dans la partie B;
- que la courbe C se situe « au-dessus » de la droite tangente T sur \mathbb{R} .

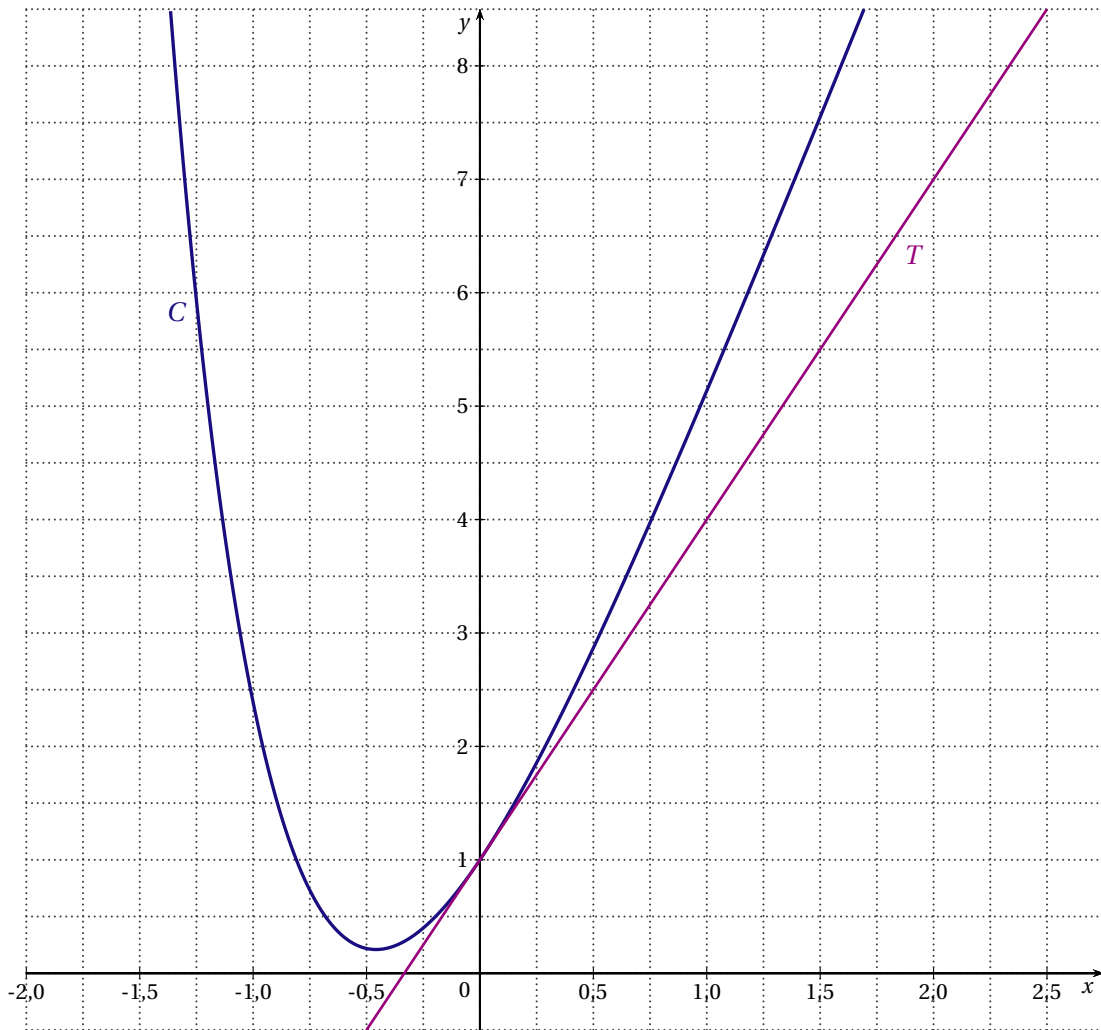
L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire \mathcal{A} comprise entre la courbe C , la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1,5$.

1. Hachurer sur le dessin, en annexe 2, l'aire \mathcal{A} que l'on veut déterminer.
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$\text{pour tout réel } x, g(x) = e^{-2x} + 2x - 1.$$

- b) Justifier que l'aire \mathcal{A} recherchée vaut, en unité d'aire : $\mathcal{A} = \int_0^{1,5} g(x) dx$.
- c) En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de \mathcal{A} .

ANNEXE 2
à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT STI2D 2016

MATHÉMATIQUES : INDEX THÉMATIQUE

Suites	5, 7, 14, 16, 22
Fonctions logarithmes	9
Fonctions exponentielles	2, 11, 26
Équations différentielles	19
Probabilités	4, 10, 12, 20, 24
QCM	1, 6, 21
VRAI-FAUX	13, 18
