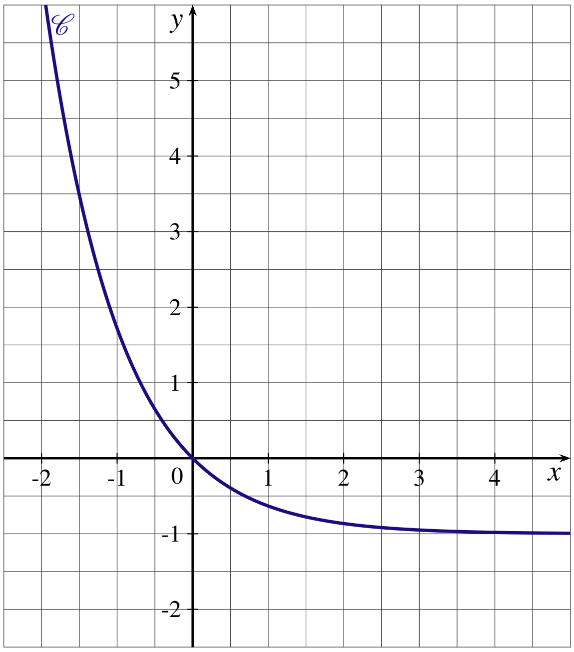
EXERCICE 1 (3 *points*) *Commun à tous les candidats*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On note F la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est 0.

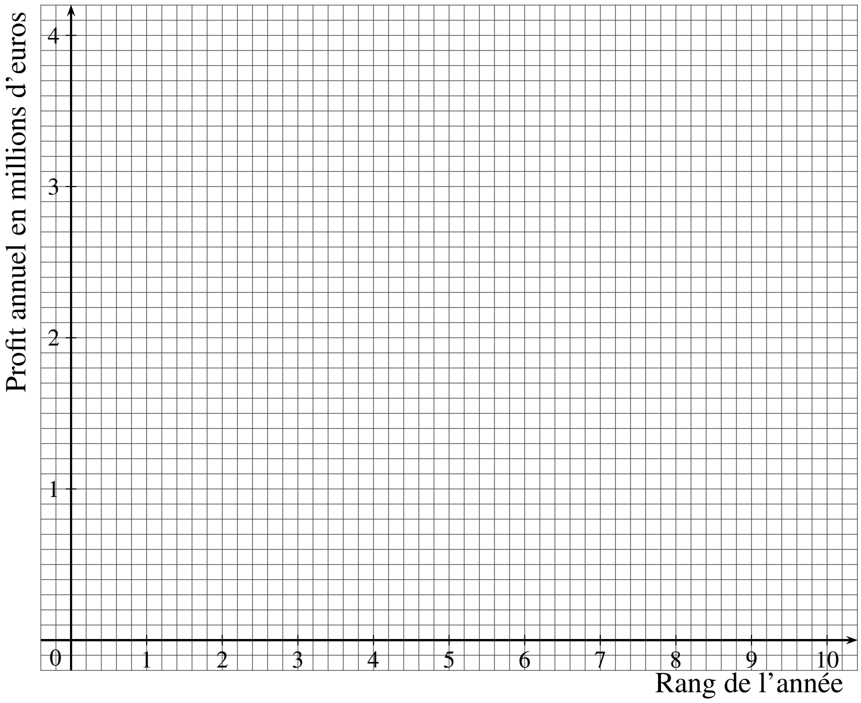
1. $f(\ln(2)) = -3$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
3. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x > 1$.
5. La fonction F est croissante sur l'intervalle $[-1;0]$.
6. Pour tout nombre réel x, on a $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$.

EXERCICE 2 (*5 points*) *Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau suivant donne l'évolution du profit annuel d'une entreprise de l'année 1999 à l'année 2005.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Profit annuel en millions d'euros (y_i)	1,26	1,98	2,28	2,62	2,84	3,00	3,20

1. Construire le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans le repère orthogonal représenté ci-dessous.



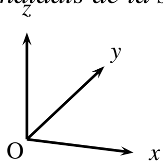
2. La forme du nuage suggère un ajustement logarithmique. On décide donc d'étudier la série $(x_i; z_i)$, où $z_i = e^{y_i}$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs décimales arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = e^{y_i}$	3,53			13,74	17,12	20,09	24,53

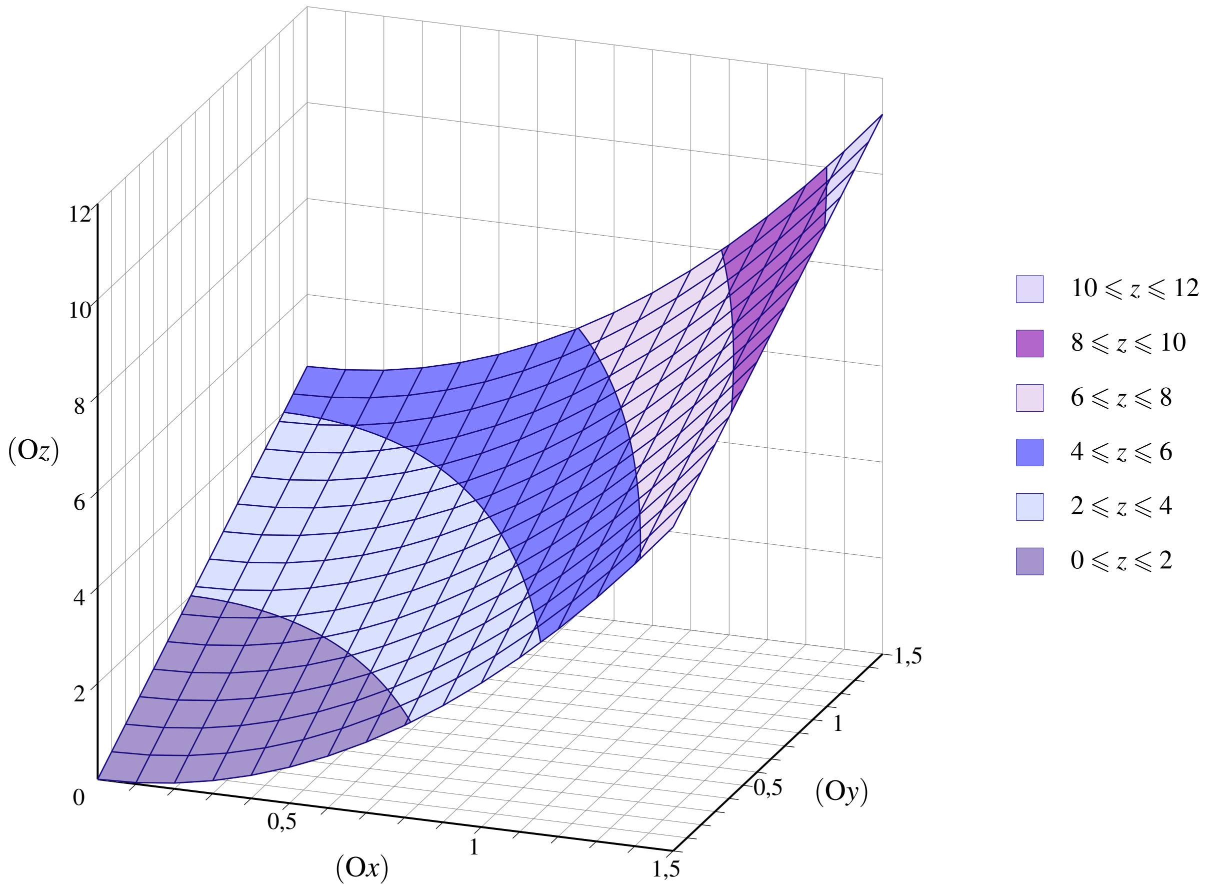
3. Donner l'équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les résultats obtenus à la calculatrice seront arrondis au centième (avec ces arrondis, on obtient une équation de la forme $z = ax$).
4. En déduire que la courbe d'équation $y = \ln(x) + 1{,}23$ approche le nuage de points.
5. On suppose que l'évolution du profit annuel se poursuit suivant ce modèle.
   a) Calculer le profit annuel, exprimé en millions d'euros, attendu pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
   b) Déterminer à partir de quelle année le profit annuel initial (c'est à dire celui de l'année 1999) aura au moins triplé.

EXERCICE 2 (*5 points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0;1{,}5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0;1{,}5]$.



PARTIE A : Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1;1;6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

PARTIE B : Recherche d'un coût minimum.

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.
On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.
Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x;y) = 3\left(x^2 + y\right)$.
On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$.
   Exprimer $C(x;y)$ en fonction de la seule variable x. On note f la fonction ainsi obtenue.
   Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.

2. Montrer que sur l'intervalle $[0;1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

EXERCICE 3 (*5 points*) *Commun à tous les candidats*

Une roue de loterie comporte trois secteurs notés A, B et C.
On lance la roue, elle tourne puis s'arrête devant un repère fixe.
Le mécanisme est conçu de telle sorte que, à l'arrêt de la roue, le repère fixe se trouve toujours devant l'un des trois secteurs, qui est alors déclaré « secteurs repéré ».
On note p_1 la probabilité que le secteur A soit repéré. On donne $p_1 = 0{,}2$.
On note p_2 la probabilité que le secteur B soit repéré. On donne $p_2 = 0{,}3$.

1. Calculer la probabilité, notée p_3, que le secteur C soit repéré.

   Une partie consiste à lancer la route de fois successivement. On s'intéresse aux couples de secteurs repérés obtenus à la suite des deux lancers successifs.

   On admet que les lancers de roues successifs sont indépendants.

2. Justifier que la probabilité d'obtenir le couple de secteurs repérés (A, B) est égale à 0,06.
3. Compléter le tableau suivant par les probabilités d'obtenir les différents couples de secteurs repérés possibles. Certaines probabilités sont déjà indiquées, ainsi la probabilité de tenir le couple (C, C) est égale à 0,25.

Secteur repéré au premier lancer / Secteur repéré au deuxième lancer	A	B	C
A	0,04		
B	0,06		
C			0,25

4. Montrer que la probabilité de tenir un couple de secteurs repérés ne comportant pas le secteur C est égale à 0,25.
5. De l'argent est mis en jeu dans cette partie. Le gain dépend du nombre de secteurs C repérés :
   - obtenir deux fois le secteur C fait gagner huit euros ;
   - obtenir exactement une fois le secteur C fait gagner un euro ;
   - n'obtenir aucun secteur C fait perdre dix euros.

   a) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité			0,25

   b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Interpréter ce résultat.

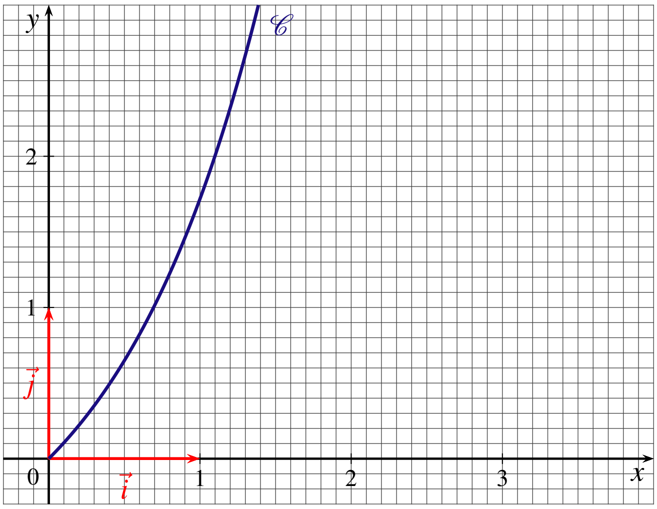
EXERCICE 4 (*7 points*) *Commun à tous les candidats*

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^x + 1}$$

Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Le plan est rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ figurant ci-dessous.



   a) Donner une équation de la tangente T à cette courbe au point O origine du repère.
   b) Tracer la droite T dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ donné.

2. **Étude de la fonction** g
   a) Calculer $g(0)$.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
   c) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
   d) Tracer la représentation graphique de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ donné.

3. La lecture graphique montre que l'équation $f(x) = g(x)$ admet dans l'intervalle $[0;+\infty[$ une unique solution, notée m.
   a) Faire figurer sur le graphique le point de coordonnées $(m; f(m))$.
   b) Prouver, par le calcul, que $m = \ln(2)$.

4. On considère le nombre suivant : $\mathscr{A} = \int_0^{\ln(2)} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Sur le graphique précédent, hachurer le domaine dont l'aire, en unités d'aires, est égale à $\mathscr{A}$.
   b) Soit la fonction dérivable G définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $G(x) = 3x - 3\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.
   Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   c) Calculer $\mathscr{A}$.