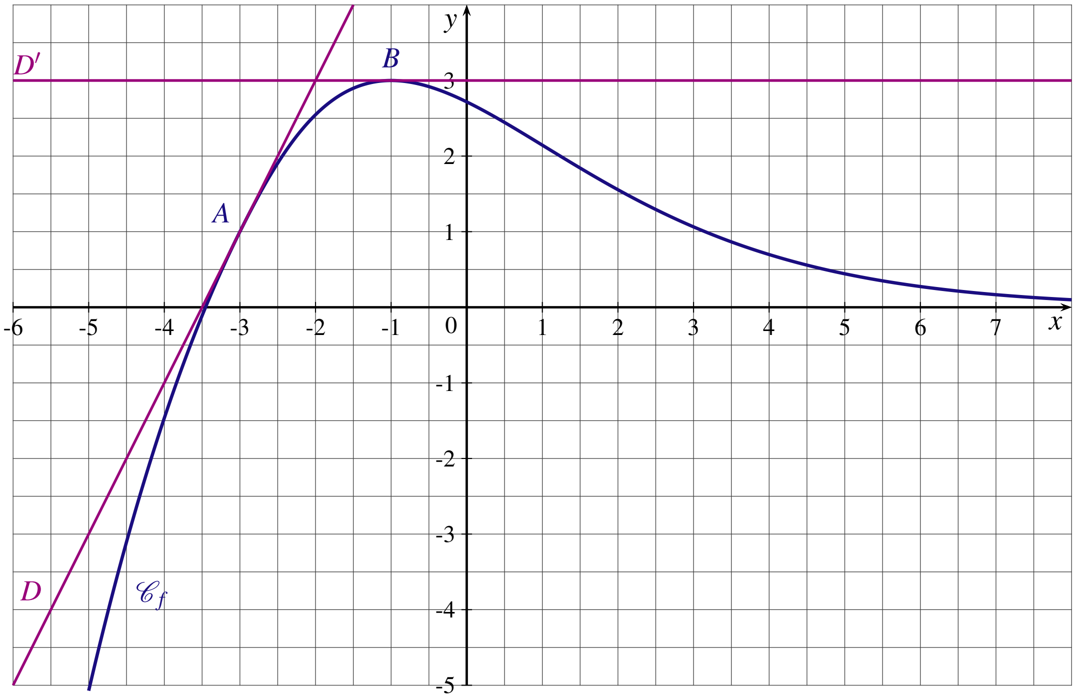
EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan.
Cette courbe passe par les points $A(-3;1)$ et $B(-1;3)$.
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-3,1;+\infty[$ par $h(x) = \ln[f(x)]$. On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]-3,1;+\infty[$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ (on justifiera le résultat).
   b) Calculer $h'(-3)$.

EXERCICE 2 (*5 points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

— La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7.

— Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n+1)$ est seulement de 0,4.

— Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n + 1)$ est de 0,9.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'évènement : « A gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », et on note $a_n = p(A_n)$.
Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n), en utilisant deux méthodes différentes.

PREMIÈRE MÉTHODE : graphe probabiliste

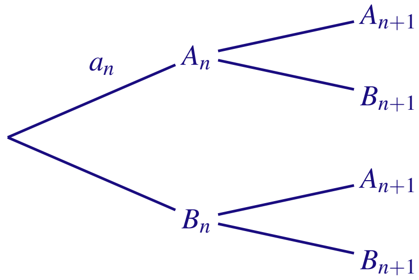
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ième}}$ semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.
2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$.
   Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la $4^{\text{ème}}$ semaine ?
3. Déterminer la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

DEUXIÈME MÉTHODE : probabilité et suites

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1. a) Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.



   b) Justifier que $a_{n+1} = 0,9 - 0,5a_n$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par : $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $(-0,5)$.
   b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

EXERCICE 3 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut D_{A} et le défaut D_{B}, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut D_{A}, 37 % ont le défaut D_{B}, et 10 % ont les deux défauts.

   On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?

2. *Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.*

   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut D_{A}, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut D_{B}. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut D_{A} sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut D_{B} sont réparables.

   On choisit une pièce au hasard.

   On note :

   A l'évènement : « La pièce a le défaut D_{A} »,

   B l'évènement : « La pièce a le défaut D_{B} »,

   R l'évènement : « La pièce est réparable ».

   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation

   b) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie a le défaut D_{A} et est réparable ».

   c) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie est réparable ».

   d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut D_{A} (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

   e) À trois moments différents, on choisit au hasard une pièce parmi les pièces défectueuses qui ont un seul défaut. On suppose que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.

      Calculer la probabilité pour que, sur les 3 pièces choisies, exactement 2 pièces aient le défaut D_{A}.

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

— $f(x) = -4x^2 + 8x$ pour $x \in [0;1]$.
— $f(x) = \ln x - x + 5$ pour $x \in [1;5]$.

La courbe $(\mathscr{C})$, représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0;1]$, et décroissante sur $[1;5]$.
2. a) Donner une primitive de la fonction f sur $[0;1]$.
   b) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
3. a) Soient g et G les fonctions définie sur $[1;5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[1;5]$.
   b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.