SUJET ANTILLES GUYANE
(Deuxième session

EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.
Barême : *Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. La fonction $F : x \longmapsto \ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction f définie par :
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 3xe^{x^2}\,dx$ est égale à :
   - $6(e-1)$
   - $\dfrac{3}{2}(e-1)$
   - $\dfrac{3}{2}e$
3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 1$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonorrnal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :
   - $(2\,;\,0)$
   - $(1\,;\,-1)$
   - $\left(2\,;\,\dfrac{3}{2} - \ln 2\right)$
4. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
   - $y = 0$
   - $y = 2x - \ln 2$
   - $y = 2x$.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. a) Construire le nuage de points de coordonnées (a_i, y_i) dans le plan muni du repère orthogonal suivant
   — sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm,
   — sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm.

   b) Un ajustement affine semble-t-il adapté ?
2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

   a) Compléter sur la feuille annexe le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

   On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

   b) Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

   c) En déduire la relation : $y = 61{,}3 \ln x - 197$.

   d) Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ?

   e) À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ?

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise désire construire dans son hall d'entrée un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de hauteur 5 dm (décimètres).
Ses deux autres dimensions, exprimées en dm, sont des entiers naturels x et y tels que $x \in]0\ ;\ 20[$ et $y \in]0\ ;\ 20[$.
La structure de cette construction est un bâti métallique correspondant aux 12 arêtes du pavé droit et nécessitant des réglettes d'aluminium dont le prix de revient est de 0,8 euro le dm.
Les quatre parois verticales et le fond de cet aquarium sont construits en verre.

PARTIE A

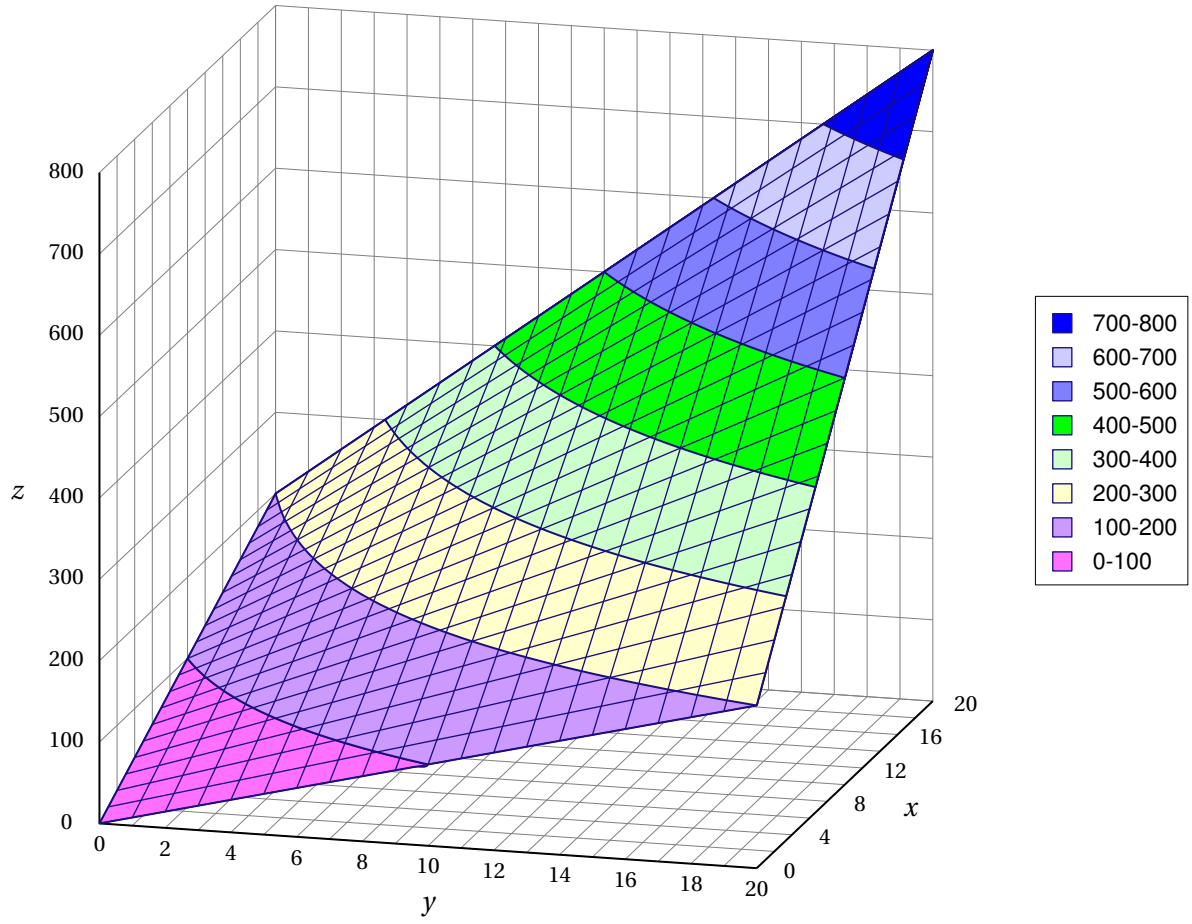
On décide d'investir exactement 80 euros pour la construction du bâti métallique.

1. Montrer que, pour cet investissement, les dimensions x et y sont liées par la contrainte $x + y = 20$.
2. a) Déterminer en fonction de x et y le volume V, exprimé en dm^3, de cet aquarium.
   b) En déduire le volume V en fonction de x sous la contrainte précédente.
3. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 20[$ par $f(x) = V$.
   a) Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]0\ ;\ 20[$.
   b) En déduire les dimensions de l'aquarium peur que son volume soit maximal ainsi que la valeur de ce volume maximal.

PARTIE B

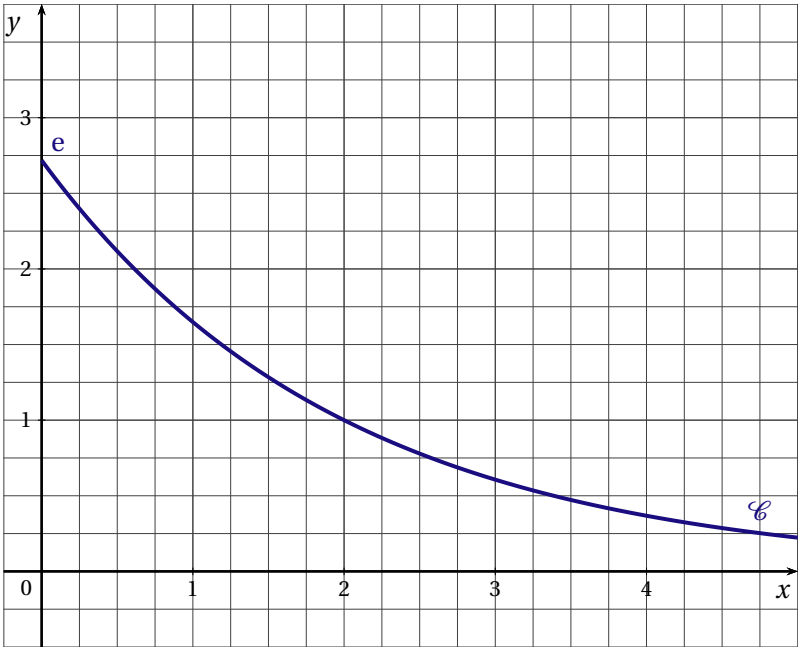
Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0\ ;\ 20[$ et tout $y \in]0\ ;\ 20[$ par $g(x,\ y) = xy + 10(x + y)$.
On donne en annexe la représentation graphique de la surface d'équation $z = g(x,\ y)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. Quelle est la nature de la section de cette surface par le plan d'équation $x = 12$, parallèle au plan $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$? Justifier la réponse.
2. Montrer que $g(x,\ y)$ représente en fonction des dimensions x et y l'aire S, exprimée en dm^2, de la surface vitrée de l'aquarium.
3. On suppose pour cette question que $x = 12$.
   a) Calculer l'aire de la surface vitrée de l'aquarium dans le cas où la contrainte de la partie A est respectée.
   b) Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de y pour lesquelles l'aire est comprise entre 400 et 500 dm^2.
   c) Vérifier le résultat précédent en utilisant le résultat de la question 1.


800
700
600
500
400
300
200
100
0
z
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
y
0
4
8
12
16
20
x
700-800
600-700
500-600
400-500
300-400
200-300
100-200
0-100

EXERCICE 3 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$ dans un repère orthonormé du plan $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.



1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y=-\dfrac{1}{2}x+2$. Tracer T sur le graphique de la feuille annexe.
2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x-2$.
   a) Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
   b) Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Hachurer sur le graphique, le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T, la droite d'équation $x=2$ et l'axe des ordonnées.
   b) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores.
Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.
On note :

— A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».

— A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2.

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\frac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$.
   a) Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?
2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\frac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\frac{1}{3}$.
   a) Illustrer cette situation par un arbre pondéré.
   b) Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\frac{1}{3}$.
   c) Calculer $P(A_1 \cap A_2)$ et $P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$; en déduire $P(A_2)$.
   d) L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?
3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.
   b) Déterminer la durée moyenne du trajet.