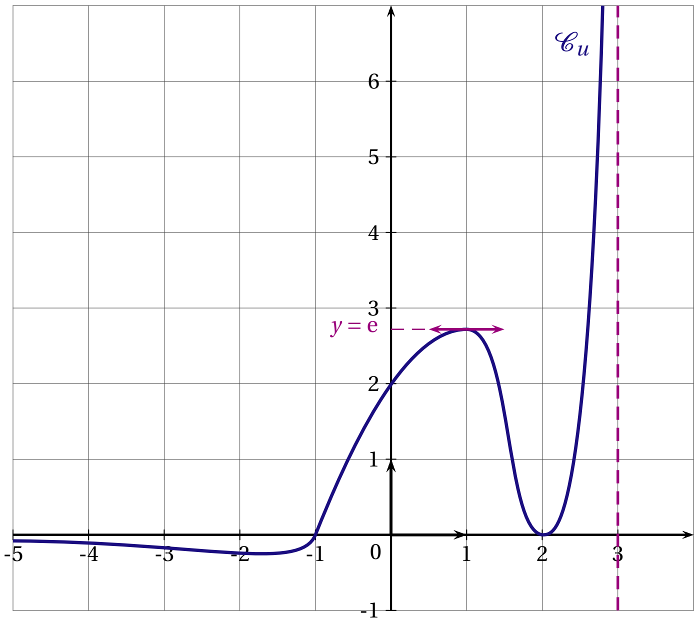
EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty;3[$.
On note u' la dérivée de u.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ représentant la fonction u.
L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont deux asymptotes à $\mathscr{C}_u$.
La droite d'équation $y = \mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_u$ en son point d'abscisse 1.
La courbe $\mathscr{C}_u$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et lui est tangente au point d'abscisse 2.

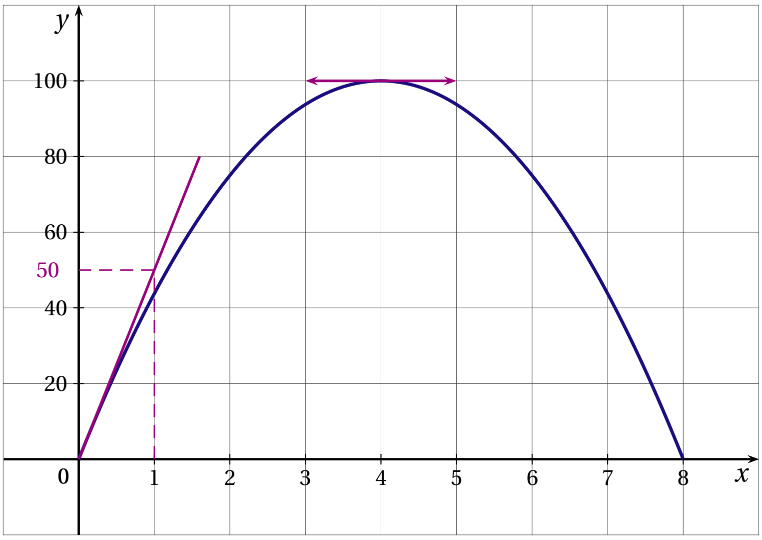


Cet exercice est un « Vrai-Faux ». Voici huit affirmations.
Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.
Chaque bonne réponse apporte 0,5 *point.*

1. a) $u'(1) = \mathrm{e}$.
   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$.
   c) $\lim\limits_{x \to 3} = +\infty$.
   d) L'équation $u(x) = 1$ admet exactement trois solutions.
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1;2[$ telle que $f = \ln(u)$.
   On note f' sa fonction dérivée.
   a) Sur l'intervalle $]-1;0[$, f change de signe.
   b) $f'(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   c) L'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.
   d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$.

EXERCICE 2 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction une fonction f définie et dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0; 100]$.
On dit qu'il y a « saturation » lorsque la fonction de satisfaction prend la valeur 100.
La fonction v, dérivée de la fonction f, est appelée fonction « envie ». On a donc $v = f'$.
On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive, sinon on dit qu'il y a « rejet ».
Charlotte doit rédiger un mémoire de recherche. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour. En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus.
Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées quotidiennement à travailler.
La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.
La tangente à cette courbe au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.
La courbe passe par l'origine du repère et la tangente en ce point passe par le point de coordonnées $(1;50)$.



1. Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :
   a) Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il « saturation » ?
   b) Sur quel intervalle y a-t-il « envie » ?
   c) Sur quel intervalle y a-t-il « rejet » ?
   d) Donner $v(4)$.
2. On admettra que la fonction v est ici une fonction affine définie sur l'intervalle $[0;8]$.
   Expliquer pourquoi son expression est : $v(x) = -\dfrac{25}{2}x + 50$.
3. Sachant que $f(0) = 0$, déterminer $f(x)$ pour $x \in [0;8]$.
4. En déduire les valeurs de x pour lesquelles la satisfaction prend la valeur 75.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans tout cet exercice on donnera la valeur exacte de chaque résultat.

Grâce à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

— s'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas;

— s'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux du détecteur de l'une de ces bornes :

— lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois;

— lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage 60 % des véhicules sont des camions. On considère les évènements suivants :

— C : « Le véhicule qui se présente est un camion »

— H : « Le ticket sort en haut »

— B : « Le ticket sort en bas ».

Notation : pour tout évènement E et tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p(E)$ la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.

1. Donner les probabilités : $p(\text{C})$; $p_{\overline{\text{C}}}(\text{H})$ et $p_{\overline{\text{C}}}(\text{B})$.
2. Construire un arbre probabiliste présentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le ticket sorte en haut.
4. Montrer que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.
5. Trois véhicules se présentent l'un après l'autre à cette borne de péage défectueuse. On modélise cette situation comme un tirage avec remise.

   Calculer la probabilité qu'au moins l'un des conducteurs soit contraint de descendre de son véhicule pour saisir son ticket.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

— s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de 0,6;

— s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de 0,9.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. a) Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour?

   b) Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour?

2. On note D l'évènement : « Franck a joué » et E l'évènement : « Franck a su résister ».

   a) Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.

   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : « Franck a joué le n-ième jour » et E_n l'évènement : « Franck a su résister le n-ième jour ».
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix}$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n.
   On a ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer P_2.

   b) Donner la relation liant P_{n+1} et P_n.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = -0{,}5d_n + 0{,}9$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0{,}6$.

   a) Démontrer que la suite u est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.

   b) Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.

   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (7 *points*) *Commun à tous les candidats*

Une substance médicamenteuse est injectée par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent l'injection, la substance est éliminée par les reins.
La quantité q_i de substance présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

t_i (en heures)	0	2	4	6	8
q_i (en mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

PARTIE A- Modélisation par une fonction affine

Le nuage de points associé à la série $\left(t_i ; q_i\right)$, représenté dans un repère orthogonal, est donné sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite (D) d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés. On donnera la valeur des coefficients arrondie au centième.
2. Tracer la droite (D) sur la feuille annexe.
3. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, donner une estimation de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

PARTIE B - Autre modélisation

On pose $y_i = \dfrac{\ln\left(q_i\right)}{\ln(10)}$.

1. Compléter le tableau de l'annexe. On arrondira les valeurs au centième.
2. a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la forme $y = at + b$ de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés. On arrondira a à 10^{-3} et b à l'unité.

   b) Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme : $q(t) = B\mathrm{e}^{-At}$ (on donnera l'arrondi au centième de A et la valeur de B arrondie à l'unité).
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 12]$ par $f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}$.

   a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

   b) On suppose que la quantité q de substance présente dans le sang à l'instant t (t exprimé en heures) est donnée par $q(t) = f(t)$ pour t variant de 0 à 12 heures.
   Calculer à 10^{-1} près la quantité de substance présente dans le sang au bout de 12 heures.

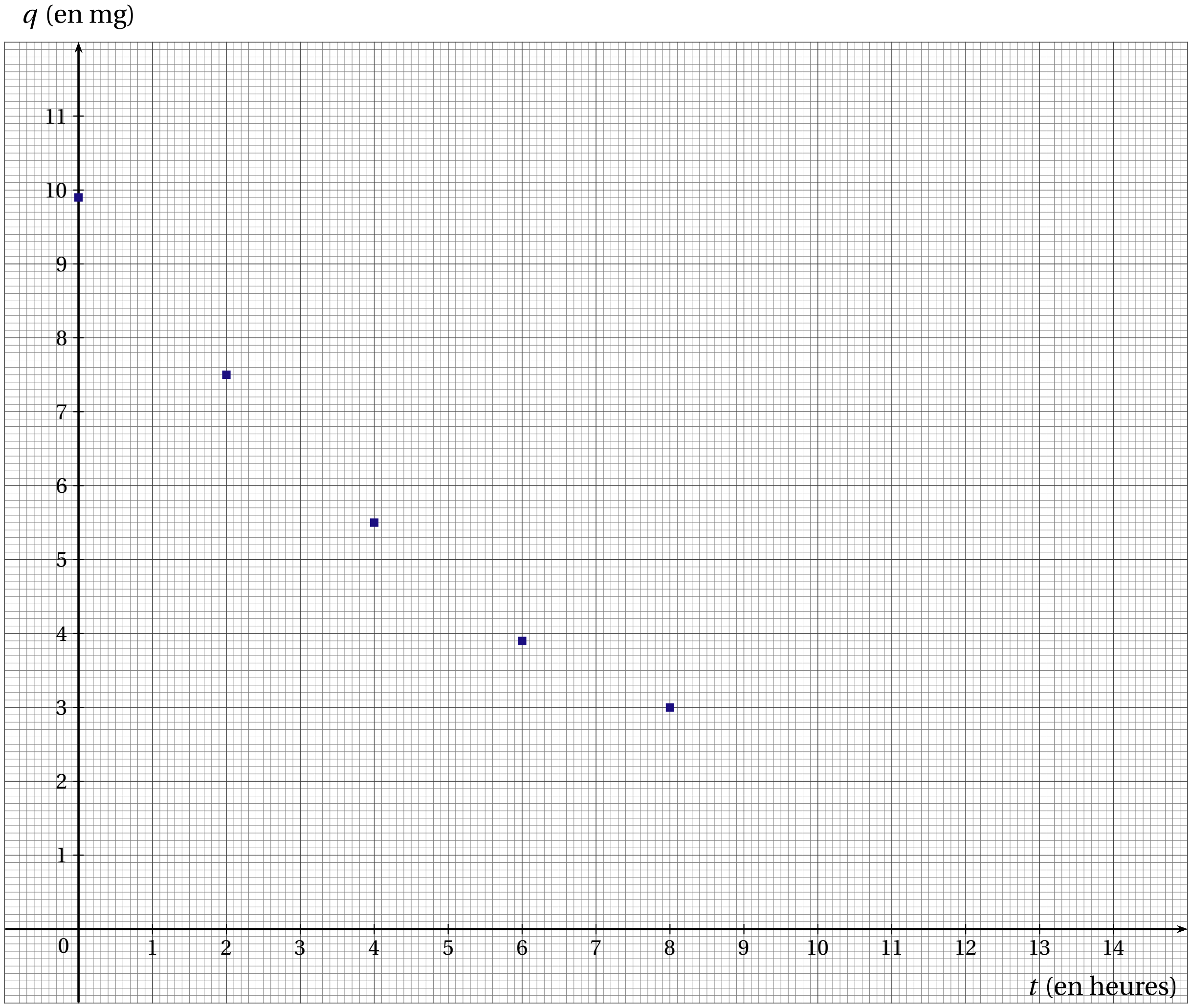
   c) En comparant les réponses trouvées à la question précédente et à la question 3 de la partie A, dire lequel de ces deux modèles vous paraît le mieux adapté à la situation.

PARTIE C - Valeur moyenne

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 12]$ par $F(t) = -\dfrac{200}{3}\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   Montrer que F est une primitive de f sur $[0 ; 12]$.
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.
3. En déduire, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

ANNEXE DE L'EXERCICE 4

PARTIE A



PARTIE B

t_i (en heures)	0	2	4	6	8
y_i (au centième près)					