EXERCICE 1 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = -1 + x\mathrm{e}^x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
   (*On rappelle le résultat :* $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$)
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel x on a $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f (la valeur de l'extremum sera arrondie à 10^{-2}).
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = x - 1$.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T ?
6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier la conjecture émise à la question 5.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

— 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;

— parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;

— parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :
T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{\text{T}}$ son évènement contraire ;
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{\text{B}}$ son évènement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. a) Donner sans justification la probabilité $p(\text{T})$ de l'évènement T.

   b) Donner sans justification $p_{\text{T}}(\text{B})$ et $p_{\overline{\text{T}}}(\text{B})$

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. a) Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

   b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).

5. Les évènements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.

6. Calculer la probabilité de l'évènement $\text{T} \cup \text{B}$ puis interpréter ce résultat.

7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).

   Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.

   a) Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (on n'attend pas de justification).

   b) Donner la loi de probabilité de S.

   c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Deux enfants Alexis et Bilal jouent dans la cour de leur immeuble.
Ils décident d'entamer une compétition formée d'une série de parties (notées partie 1, partie 2, ...).
On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :

— Alexis a 65 % de chances de gagner la partie 1 ;
— si Alexis gagne la partie n, alors il a 10 % de chances de gagner la partie $n+1$;
— si Alexis perd la partie n, alors il a 60 % de chances de gagner la partie $n+1$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note :

— A_n l'évènement : « Alexis gagne la partie n » ;
— B_n l'évènement : « Bilal gagne la partie n »(on remarquera que : $B_n = \overline{A_n}$) ;
— a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n celle de l'évènement B_n.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

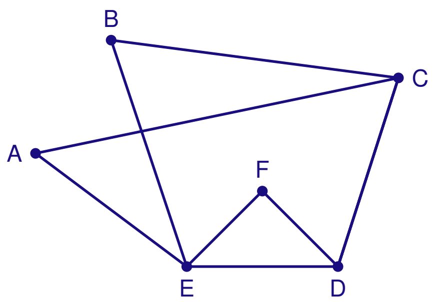
PARTIE A : Étude d'un graphe probabiliste

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste lors de la partie n.

1. a) Donner sans justification la matrice P_1.
   b) Traduire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On admet que la matrice de transition M associée au graphe probabiliste précédent est $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
   a) Donner M^2 (on pourra utiliser la calculatrice ; les coefficients de M^2 seront donnés sous forme décimale exacte).
   b) En déduire la probabilité que Bilal gagne la partie 3, en justifiant la réponse (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie à 10^{-2}).
3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable (x et y sont des nombres réels tels que $x+y=1$).
   a) Déterminer les nombres x et y.
   b) Interpréter ces deux valeurs.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique

Carlos (C), Dora (D), Edwige (E) et Farid (F), eux aussi intéressés par le jeu, décident de rejoindre Alexis (A) et Bilal (B) et de former ainsi des équipes.
Comme ils ne s'entendent pas tous entre eux, ils optent pour une répartition en équipe par affinité.
On donne ci-après le graphe G d'incompatibilité entre les différents enfants :



Par exemple, Alexis ne peut pas se trouver dans une équipe où il y aurait Carlos ou Edwige.
Cela est représenté dans le graphe par le fait que les sommets A et C, ainsi que les sommets A et E sont adjacents.

1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G?

2. Donner en justifiant un encadrement du nombre chromatique du graphe G.
3. Proposer une coloration du graphe (sans justification) puis en déduire le nombre chromatique du graphe G.
4. Proposer une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes.

EXERCICE 3 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Le tableau suivant donne la valeur de revente d'une machine outil au bout de t années d'utilisation (les prix sont donnés en centaines d'euros). On veut faire une estimation de son prix de revente au-delà de 6 ans.

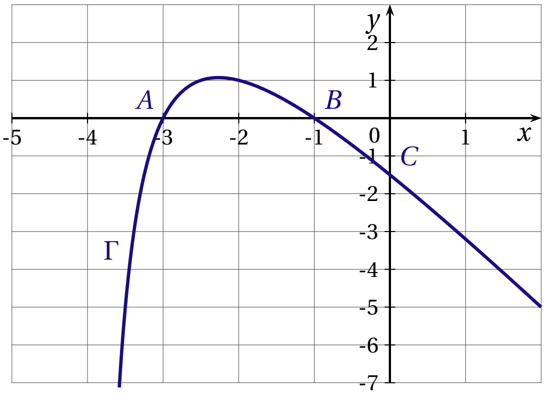
Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de revente y_i en centaines d'euros $0 \leqslant i \leqslant 6$	90	73,8	60	49,5	40,5	33	27

1. Quel est le pourcentage de baisse du prix de revente de la machine au bout de six ans d'utilisation (de t_0 à t_6) ?
2. Étude d'un modèle affine
   a) Représenter graphiquement le nuage de points $M_i\left(t_i\,;y_i\right)$ pour $0 \leqslant i \leqslant 6$ dans un repère orthogonal, en prenant comme unités graphiques : 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite dans le repère précédent.
   c) On sait qu'au bout de 10 ans la valeur de revente est de 1000 euros. Le modèle vous semble-t-il adapté pour des calculs à plus long terme ?
3. Étude d'un modèle exponentiel
   a) Pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$. Recopier et compléter le tableau suivant (en arrondissant les nombres au dixième) :

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln\left(y_i\right)$							

   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).
   c) En déduire que $y = \mathrm{e}^{-0,2t+4,5}$ est un ajustement exponentiel possible.
   d) Déterminer à l'aide de ce modèle une estimation de la valeur de revente au bout de 10 ans d'utilisation. Ce modèle vous semble-t-il mieux adapté que celui de l'ajustement affine ?
   Justifier la réponse.

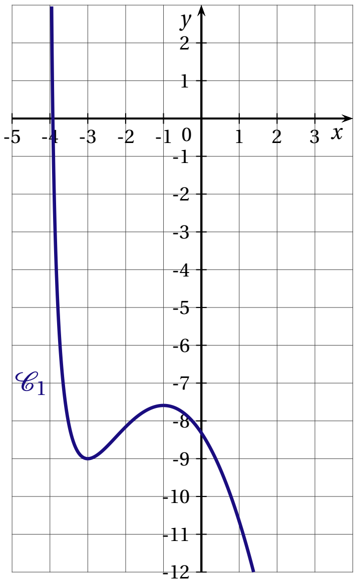
EXERCICE 4 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

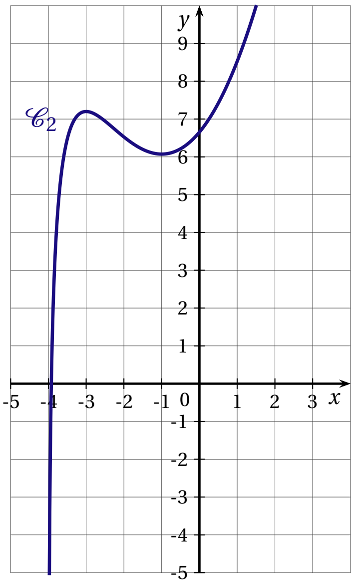


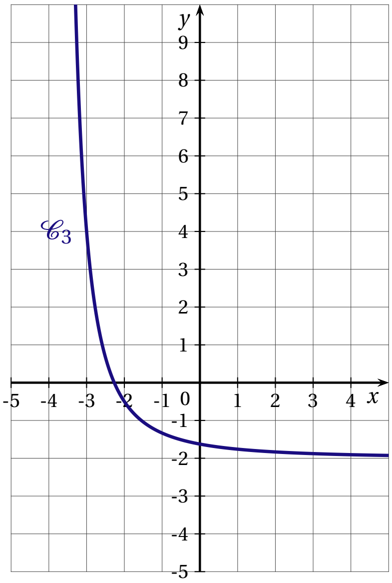
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4;+\infty[$.
Cette courbe Γ passe par les points $A(-3;0)$, $B(-1;0)$ et $C(0;-1{,}5)$.

PARTIE A

1. À l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f.
   Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :







PARTIE B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4;+\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1. a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4;+\infty[$.
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   b) Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$
2. On considère l'intégrale $I = \int_{-3}^{-1} f'(x)\,dx$.
   a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I puis en donner une valeur arrondie au dixième.
   b) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.