EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples).
Pour chaque question, une seule proposition exacte. Indiquer sur la copie le numéro de chaque question, et recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.
Barème : une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - e^{2x - \ln(3)}$$

et soit C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. La fonction f :

   a. est croissante sur $\mathbb{R}$ b. est décroissante sur $\mathbb{R}$ c. n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$

2. Le réel $f(1)$ est égal à :

   a. $5 - e^2$ b. $\dfrac{6 - e^2}{3}$ c. $-0,46$ d. $\dfrac{\ln(3)}{2}$

3. La limite de f en $+\infty$ est égale à :

   a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. 2 d. 0

4. La tangente à la courbe C au point d'abscisse $\ln(3)$ a pour équation :

   a. $y = -3x + 3\ln(3) - 1$ b. $y = -3x - 1$ c. $y = -6x + 6\ln(3) - 1$ d. $y = -x + \ln(3) - 3$

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

L'entreprise E produit un modèle de lave-vaisselle. La production de ce lave-vaisselle est répartie sur trois sites industriels A, B, C, qui sont d'importances inégales.

— Le site A assure 60 % de la production.

— Le site B assure 30 % de la production.

— Le site C assure le reste de la production.

Après plusieurs années de commercialisation, on note que 37 % des lave-vaisselles en provenance du site A connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation ; 25 % des lave-vaisselles provenant du site B connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation, et 12 % de ceux provenant du site C connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation.
On choisit au hasard un lave-vaisselle produit par l'entreprise E.

Dans la suite on désigne par A, (respectivement par B, C) l'évènement « le lave-vaisselle choisi est issu du site de production A (respectivement B, C) ».
On désigne par S, l'évènement « le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans » ; $\overline{S}$ désigne l'évènement contraire de S.
Dans cet exercice les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $p(A)$ et $p(B)$.
   b) On note $p_A(S)$ (respectivement $p_B(S)$, $p_C(S)$) la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A (respectivement B, C) est réalisé ; calculer $p_A(S)$, $p_B(S)$ et $p_C(S)$.
   c) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur les branches adéquates les probabilités données dans l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le lave-vaisselle provienne du site A et connaisse une panne avant 5 ans ?
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est 0,309.
4. Le lave-vaisselle est tombé en panne avant 5 ans d'utilisation ; quelle est la probabilité qu'il provienne du site B ?
5. *Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   L'entreprise E assure le service après-vente : si le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans d'utilisation, elle finance la réparation, dont le prix est estimé à 110 euros par appareil réparé.

   Déterminer, pour l'entreprise, le coût moyen par lave-vaisselle de ces réparations.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

— si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8;

— si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.
Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self »le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0{,}5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self »le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$.
6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \dfrac{2}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{6}$.
   b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.
   d) Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Afin de mesurer l'évolution de l'utilisation du vélo, une communauté urbaine organise le comptage régulier des vélos en plusieurs points de l'agglomération.
Le tableau ci-dessous indique le nombre moyen, sur un mois, de vélos comptés par jour.

Mois	Mars 2005	Juin 2005	Décembre 2005	Juin 2006	Décembre 2006	Juin 2007
Rang du mois : x_i	0	3	9	15	21	27
Nombre moyen de vélos comptés par jour (en milliers) : y_i	3,9	4,4	5,1	6,4	7,1	7,6

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
   On prendra pour unités graphiques : en abscisse, 1 centimètre pour représenter 3 mois et en ordonnées, 1 centimètre pour représenter 1 millier.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la représentation graphique.
3. Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients obtenus à 10^{-2} près.
   Tracer la droite d'ajustement sur la représentation graphique.
4. À l'aide de l'ajustement réalisé, déterminer une estimation du nombre moyen de vélos que l'on pouvait prévoir par jour au mois de décembre 2007 (on arrondira le résultat à 10^{-1}).
5. On sait qu'en décembre 2007, le nombre moyen de vélos observés a été de 7600.
   Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise dans l'estimation précédente.

EXERCICE 4 (7 *points*) *Commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5;18]$ par :

$$f(x)=4\ln(3x+1)-x+3$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur $[0{,}5;18]$. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}5;18]$, on a :

$$f'(x)=\frac{-3x+11}{3x+1}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0{,}5;18]$.
3. Vérifier que l'équation $f(x)=6$ admet une unique solution dans $[0{,}5;18]$, que l'on note α.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.
4. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}5;18]$ par :

$$F(x)=\frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1)-\frac{x^2}{2}-x.$$

   a) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0{,}5;18]$.

   b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

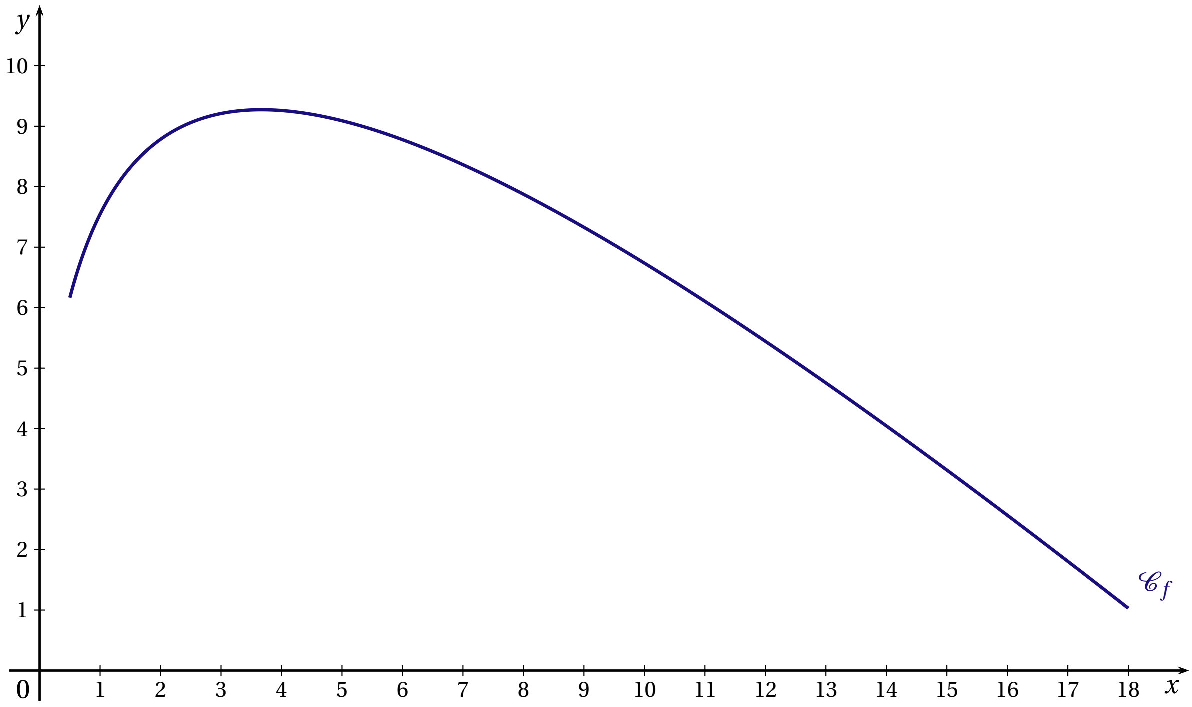
PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
En utilisant les résultats précédents et en justifiant, répondre aux questions suivantes.

1. Pour quelle quantité de pièces produites, arrondie à l'unité, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, arrondi à la dizaine d'euros ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice supérieur ou égal à 6000 euros ?
3. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces.
   On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

ANNEXE


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
x
$\mathscr{C}_f$