EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

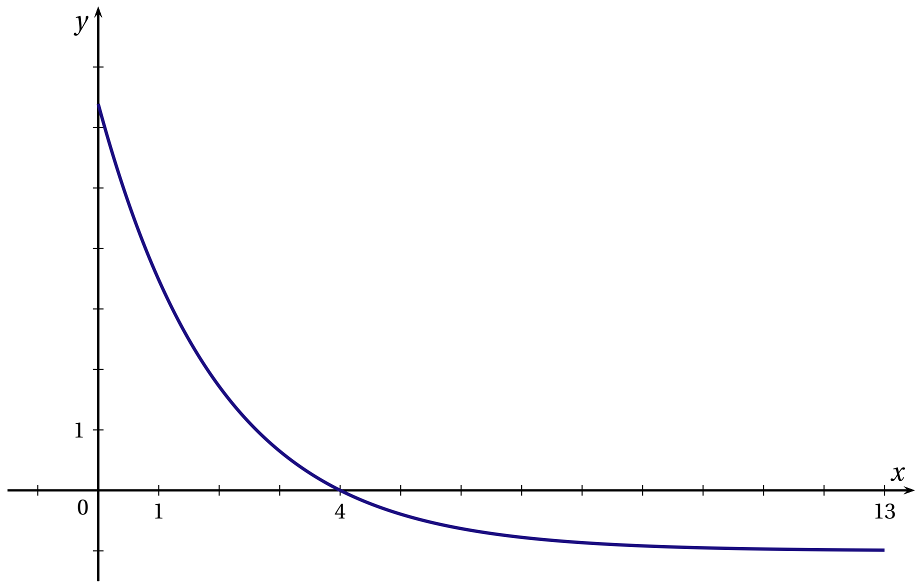
Pour chacune des situations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse justifier la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$.

x	-3		-1		0		1
Variations de f	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

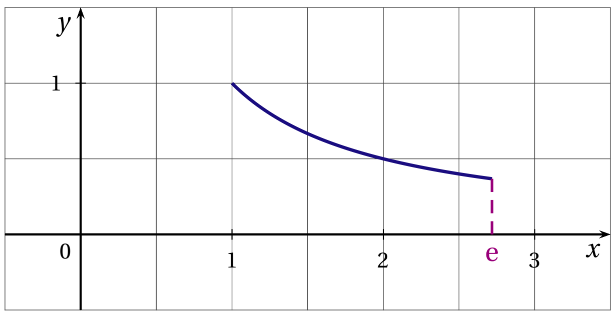
Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3; 1]$.

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; 13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle $[0; 13]$.

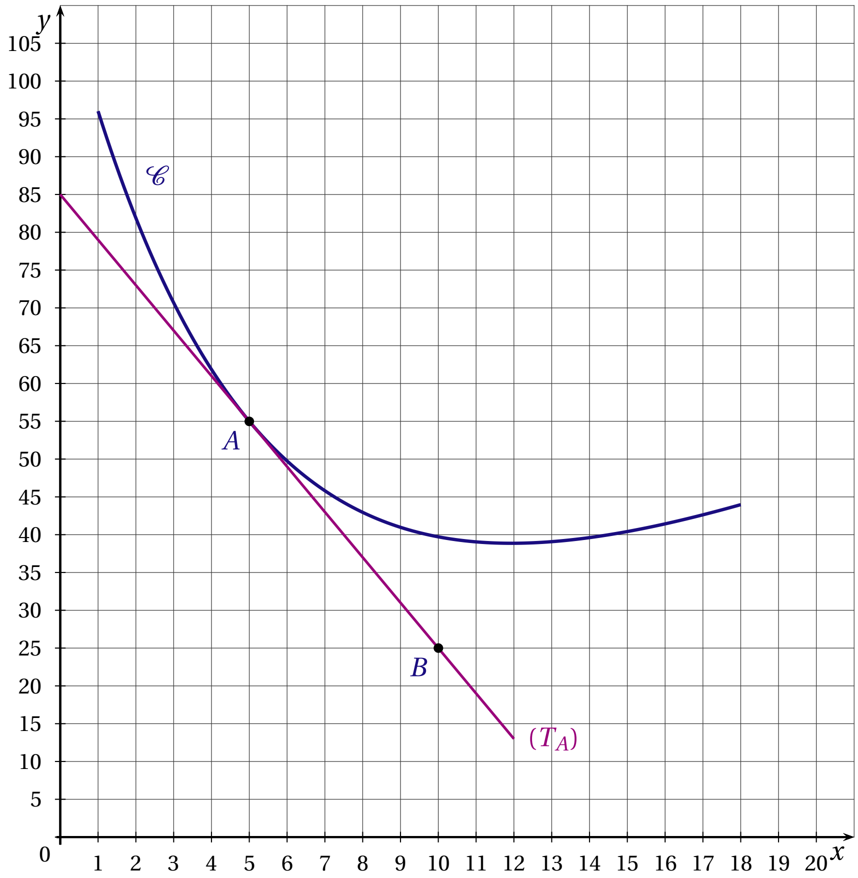
3. La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction h définie sur l'intervalle $[1; \text{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.



Proposition 4 : La fonction h est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[1; \text{e}]$.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 et 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;18]$.
On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point $A(5;55)$. Le point $B(10;25)$ appartient à la tangente (T_A).



On admet que $f(x) = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;18]$

1. a) Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.
   b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;18]$.
   c) Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question 1. a.
2. a) Montrer que $2 - 8\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0$ est équivalent à $x \geqslant 5 + 5\ln 4$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[1;18]$. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.
3. Déterminer, par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.
4. a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1;18]$.
   b) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   c) Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\dfrac{1}{10}I$.

EXERCICE 3 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.
La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B.
La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste.
La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

PARTIE A

On prélève au hasard une médaille produite par l'entreprise et on considère les évènements suivants :

— A : « la médaille provient de la machine M_A » ;

— B : « la médaille provient de la machine M_B » ;

— D : « la médaille est défectueuse » ;

— $\overline{D}$ est l'évènement contraire de l'évènement D.

1. a) Traduire cette situation par un arbre pondéré.

   b) Montrer que la probabilité qu'une médaille soit défectueuse est égale à 0,026.

   c) Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

2. Les médailles produites sont livrées par lots de 20. On prélève au hasard un lot de 20 médailles dans la production.

   On suppose que la production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. Les tirages sont supposés indépendants.

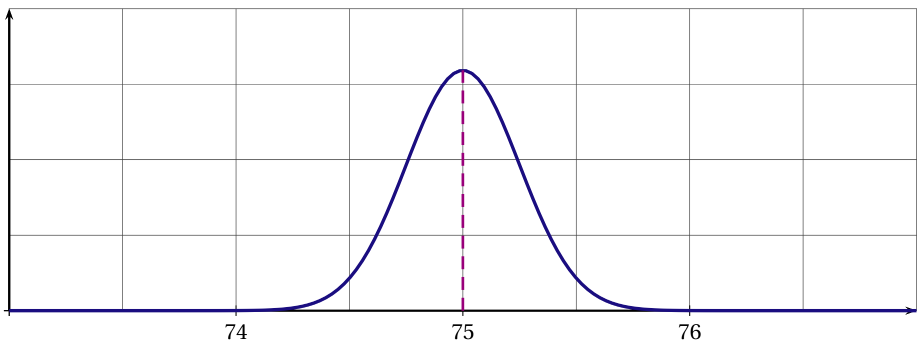
   On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médailles défectueuses contenues dans ce lot.

   a) Préciser la loi que suit X et donner ses paramètres.

   b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une médaille défectueuse dans ce lot.

PARTIE B

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74,4; 75,6]$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de Y.



1. Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $P(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6)$.

3. En utilisant un résultat du cours, déterminer la valeur de h pour que $P(75 - h \leqslant Y \leqslant 75 + h) \approx 0,95$.

PARTIE C

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine M_B, on admet que la proportion des médailles ayant une épaisseur non conforme dans la production est de 3 %.
Pour contrôler le bon fonctionnement de la machine M_B, on a prélevé au hasard un échantillon de 180 médailles et on a constaté que 11 médailles ont une épaisseur non conforme.

1. Calculer, dans l'échantillon prélevé, la fréquence des médailles dont l'épaisseur n'est pas conforme.
2. Déterminer, en justifiant, si le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.

EXERCICE 4 (5 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1$^{\text{er}}$ juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (V_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100\,000$.
Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1$^{\text{er}}$ juillet 2013.

1. a) Justifier que le volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.
   b) Déterminer le volume d'eau V_2, au matin du 3 juillet 2013.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0{,}96V_n - 500$.
2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	VARIABLES :	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	TRAITEMENT :	Affecter à V la valeur 100 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à N la valeur ...
L7		Affecter à V la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	SORTIE :	Afficher ...

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12\,500$.
   a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer U_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500$.
4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500 \leqslant 0$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 4 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

— 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
— 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
— Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathscr{G}$ de sommets S et T où :

— S est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
— T est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

— s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014+n$;
— t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

PARTIE A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathscr{G}$.
2. On admet que la matrice de transition du graphe $\mathscr{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$.

   On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathscr{G}$.

   a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcl} 0{,}41a - 0{,}09b & = & 0 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right.$.

   b) Résoudre le système précédent.
3. On admet que $a = 0{,}18$ et $b = 0{,}82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

PARTIE B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0{,}5t_n + 0{,}41$.
3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	VARIABLES :	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	TRAITEMENT :	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0{,}80$
L6		Affecter à T la valeur ...
L7		Affecter à N la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	SORTIE :	Afficher ...

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0{,}82$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.
   b) En déduire que : $t_n = -0{,}17 \times 0{,}5^n + 0{,}82$.
   c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0{,}17 \times 0{,}5^n + 0{,}82 \geqslant 0{,}80$.
   d) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.