

**EXERCICE 1** (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

**QUESTION 1**

La proportion de gauchers dans la population française est de 13 %.

Un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95 %, de la fréquence de gauchers dans un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population française est :

- a)  $[0,080; 0,180]$       b)  $[0,085; 0,175]$       c)  $[0,100; 0,160]$       d)  $[0,128; 0,132]$

(Les bornes de chaque intervalle sont données à  $10^{-3}$  près)

**QUESTION 2**

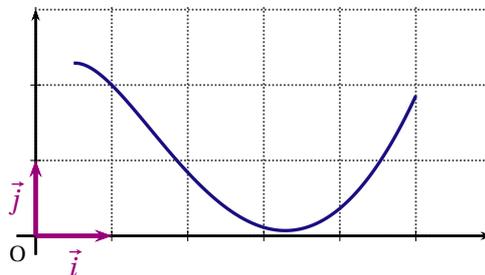
Sur  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des solutions de l'inéquation  $\ln x + \ln 3 \leq \ln(2x + 1)$  est :

- a)  $[2; +\infty[$       b)  $]0; 2]$       c)  $] -\infty; 1]$       d)  $]0; 1]$

Pour les questions 3., 4. et 5., on considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0,5; 5]$  par :

$$f(x) = x^2 - 3x \ln x + 1$$

On a représenté, ci-dessous, cette fonction  $f$  dans un repère orthonormé :



**QUESTION 3**

- a) La fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[0,5; 3]$ .  
b) La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[0,5; 5]$ .  
c) La courbe représentant  $f$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.  
d) La fonction  $f$  est concave sur l'intervalle  $[0,5; 1,5]$ .

**QUESTION 4**

On note  $I$  l'intégrale  $\int_1^2 f(x) dx$ ; on peut affirmer que :

- a)  $0,5 \leq I \leq 1$       b)  $4 \leq I \leq 7$       c)  $1 \leq I \leq 1,75$       d)  $2 \leq I \leq 4$

**QUESTION 5**

On souhaite utiliser un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée au centième de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = 1$  sur l'intervalle  $[1; 3]$ . (On admet que sur cet intervalle l'équation admet bien une unique solution.)

Voici trois algorithmes :

**Algorithme 1**

<b>Initialisation</b>
$a$ prend la valeur 1 $b$ prend la valeur 3 $s$ prend la valeur 0
<b>Traitement</b>
$n = (b - a) \times 100$ Pour $i$ allant de 1 à $n$ faire
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>x</math> prend la valeur <math>a + 0,01 \times i</math></li><li>• <math>s</math> prend la valeur <math>s + 0,01 \times f(x)</math></li></ul>
Fin de Pour
<b>Sortie</b>
Afficher $s$

**Algorithme 2**

<b>Initialisation</b>
$a$ prend la valeur 1 $b$ prend la valeur 3
<b>Traitement</b>
Tant que $b - a > 0,01$ faire
<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>c</math> prend la valeur <math>(a + b)/2</math></li><li>• Si <math>f(c) &gt; 1</math> alors <math>a</math> prend la valeur <math>c</math></li><li>• Sinon <math>b</math> prend la valeur <math>c</math></li></ul>
Fin de Tant que
<b>Sortie</b>
Afficher $a$

**Algorithme 3**

<b>Initialisation</b>
$a$ prend la valeur 1 $b$ prend la valeur 3
<b>Traitement</b>
Pour $x$ allant de 1 à 3 faire
<ul style="list-style-type: none"><li>• Si <math>f(x) &lt; 1</math> alors <math>a</math> prend la valeur <math>(a + b)/2</math></li><li>• Sinon <math>b</math> prend la valeur <math>(a + b)/2</math></li></ul>
Fin de Pour
<b>Sortie</b>
Afficher $a$

- a) L'algorithme 1 affiche une valeur approchée au centième de  $\alpha$ .
- b) L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de  $\alpha$ .
- c) L'algorithme 3 affiche une valeur approchée au centième de  $\alpha$ .
- d) Aucun des trois algorithmes n'affiche de valeur approchée au centième de  $\alpha$ .

**EXERCICE 2** (5 points)

*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un club de basketball a suivi sur plusieurs années l'évolution des abonnements annuels de ses supporters. Partant de ces observations, on décide de modéliser le nombre annuel d'abonnés sur la base d'un taux de réabonnement de 80 % d'une année sur l'autre auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnements.

On se propose d'étudier l'évolution du nombre annuel des abonnés du club de basketball à l'aide de ce modèle.

Le nombre d'abonnés au club à la fin de l'année 2014 était 1 128.

On note  $a_n$ , le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2014 +  $n$ . On a donc  $a_0 = 1 128$ .

1. Estimer le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015.
2. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $a_{n+1} = 0,8a_n + 300$ .
3. Soit  $(u_n)$  la suite définie, pour tout nombre entier naturel  $n$ , par  $u_n = 1 500 - a_n$ .
  - a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a  $a_n = 1 500 - 372 \times 0,8^n$ .
4. Résoudre algébriquement l'inéquation  $a_n > 1 450$  et interpréter le résultat obtenu.
5. La municipalité dont dépend le club de basketball prévoit de construire une nouvelle salle de sport pour accueillir les rencontres du club.

On souhaite pouvoir accueillir tous les abonnés du club auxquels s'ajouteraient 500 spectateurs occasionnels non abonnés au club.

En tenant compte des résultats précédents, combien de places de spectateurs au minimum doit-on prévoir dans cette salle?

**EXERCICE 2** (5 points)

*Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.

Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.

Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché.

Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.

On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Le mois du début de la campagne est noté mois 0.

On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $a_n$  la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois  $n$  ;
- $b_n$  la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois  $n$  ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$  la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois  $n$ .

1. Déterminer la matrice ligne  $P_0$  de l'état probabiliste initial.
2. On note  $A$ , l'état «Le client interrogé préfère Alphamarché» et  $B$  l'état «Le client interrogé préfère Bétamarché». Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $A$  et  $B$ .
3. a) Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.  
b) Montrer que  $P_1 = (0,3 \quad 0,7)$ .
4. a) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n$  en fonction de  $P_0$ ,  $M$  et  $n$ .  
b) En déduire la matrice ligne  $P_3$  et interpréter ce résultat.
5. Le service de retrait d'Alphamarché finira-t-il par être préféré à celui de Bétamarché? Justifier.

**EXERCICE 3** (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte trois parties qui peuvent être traitées de manière indépendante

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long.

Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35 % partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70 % ont opté pour un séjour long.

**PARTIE A**

On choisit au hasard un passager du vol.

On note les évènements suivants :

—  $E$  : « Le passager voyage en classe économique. »

—  $L$  : « Le passager part pour un séjour long. »

On note  $\bar{E}$  et  $\bar{L}$  les évènements contraires des évènements  $E$  et  $L$ .

1. Déterminer la probabilité de l'évènement  $E$ , notée  $p(E)$ .
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long.
4. Montrer que  $p(L) = 0,42$ .
5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour. Quelle est la probabilité que ce passager voyage en classe économique ?

**PARTIE B**

Lors de l'embarquement, chaque passager enregistre un bagage qui sera placé dans la soute de l'avion pendant le vol. Le poids de ce bagage ne doit pas excéder 20 kg. Dans le cas où le poids de son bagage dépasserait 20 kg, le passager doit s'acquitter d'une « taxe d'excédent de bagage ». Le montant à payer en cas d'excédent est précisé dans le tableau ci-dessous.

Poids $p$ (en kg) du bagage	Taxe d'excédent de bagage
$20 < p \leq 21$	12 €
$21 < p \leq 22$	24 €
$22 < p \leq 24$	50 €
$p > 24$	20 €/kg au-delà des 20 kg autorisés

On choisit au hasard un bagage devant être transporté dans la soute de l'avion.

On admet que le poids de ce bagage, exprimé en kg, est modélisé par une variable aléatoire  $M$  qui suit la loi normale d'espérance 18,4 et d'écart type 1,2.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage.
2. Calculer la probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 €.

**PARTIE C**

L'enregistrement des bagages des passagers est possible pendant une durée de 2 h.

Un passager du vol est choisi au hasard et on note  $T$  la durée (en minutes) qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.

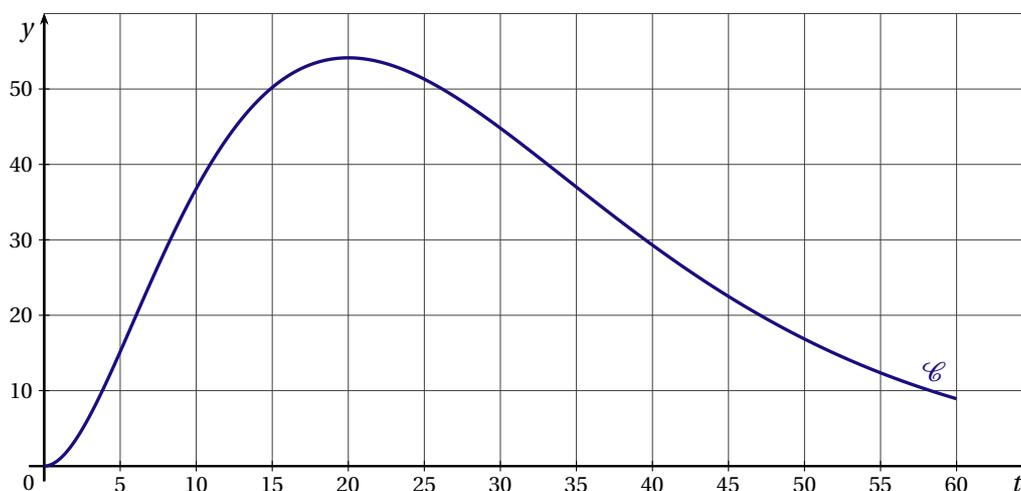
On admet que  $T$  est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 120]$ .

Déterminer la probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées.

**EXERCICE 4** (5 points)

Commun à tous les candidats

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre  $t$  de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.



**PARTIE A**

- À l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.
- Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. (Expliquer rapidement la démarche utilisée)

**PARTIE B**

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0;60]$  par :

$$f(t) = t^2 e^{-0,1t}$$

où  $t$  représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Pour étudier les propriétés de la fonction  $f$ , on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

$$f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$$

$$f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$$

$$F(t) = (-10t^2 - 200t - 2000)e^{-0,1t}$$

où  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ ,  $f''$  désigne sa dérivée seconde et  $F$  une primitive de  $f$ .

- Démontrer le résultat :  $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$  qui a été fourni par le logiciel.
- Déterminer le signe de  $f'(t)$  sur  $[0;60]$ .
  - Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0;60]$ .
- Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par  $N = \frac{1}{60} \int_0^{60} f(t) dt$ .
  - Déterminer la valeur exacte de  $N$ .
  - Quel est le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine ?
- Justifier par le calcul que, sur l'intervalle  $[0;15]$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  admet un unique point d'inflexion.  
Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion.
  - Donner une interprétation concrète de cette abscisse.