EXERCICE 1 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

PARTIE A

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur, ainsi :

— Parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un défaut de batterie et parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un disque dur défectueux.
— Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5 % ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société MICRO garde constant le niveau de qualité de ses produits.
Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1
La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

Proposition 2
La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,048 5.

Proposition 3
Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

PARTIE B

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 4
La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

PARTIE C

L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que 98 % des clés commercialisées fonctionnent correctement.
Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 5
Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :    n est un nombre entier naturel
               C est un nombre réel
TRAITEMENT :   Affecter à C la valeur 300
               Affecter à n la valeur 0
               Tant que C < 400 faire
                  | C prend la valeur C − C × 0,08 + 50
                  | n prend la valeur n + 1
               Fin Tant que
SORTIE :       Afficher n
```

   a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$	$\times\times\times$	vrai		$\ldots$
Valeur de C	300	326		$\ldots$
Valeur de n	0	1		$\ldots$

   b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

   a) Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

   b) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
   Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0{,}92 \times V_n$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n$.

   d) Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

   a) Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question?

   b) Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

— Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.

— Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.

— Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix}100 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}.$$

   Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
   Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
   À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
   a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

EXERCICE 3 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

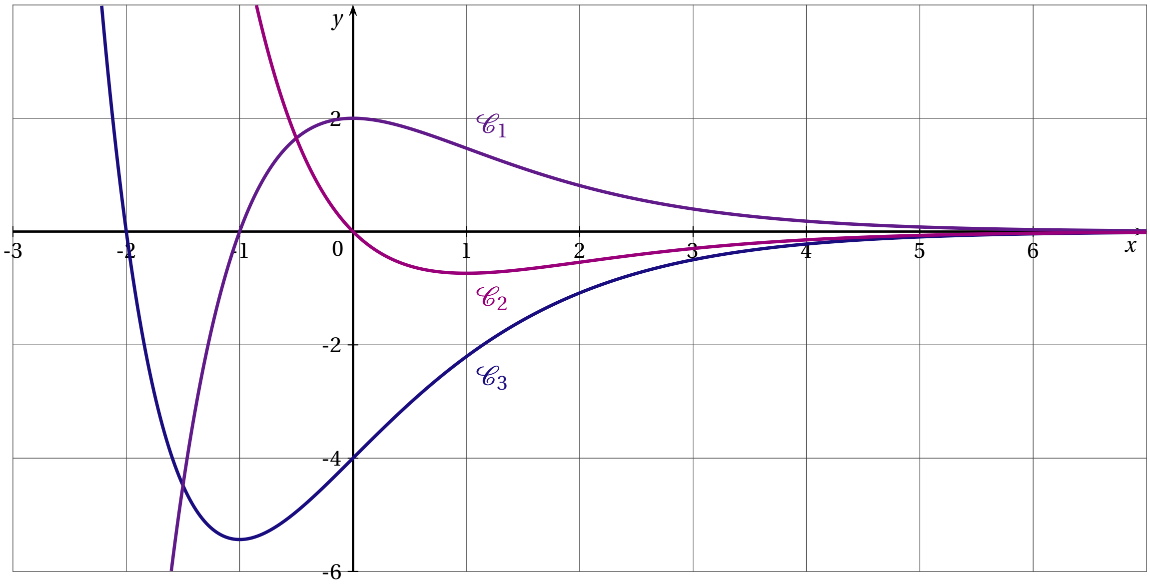
On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

PARTIE A

1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.
3. En déduire les variations de la fonction f.

PARTIE B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.
Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

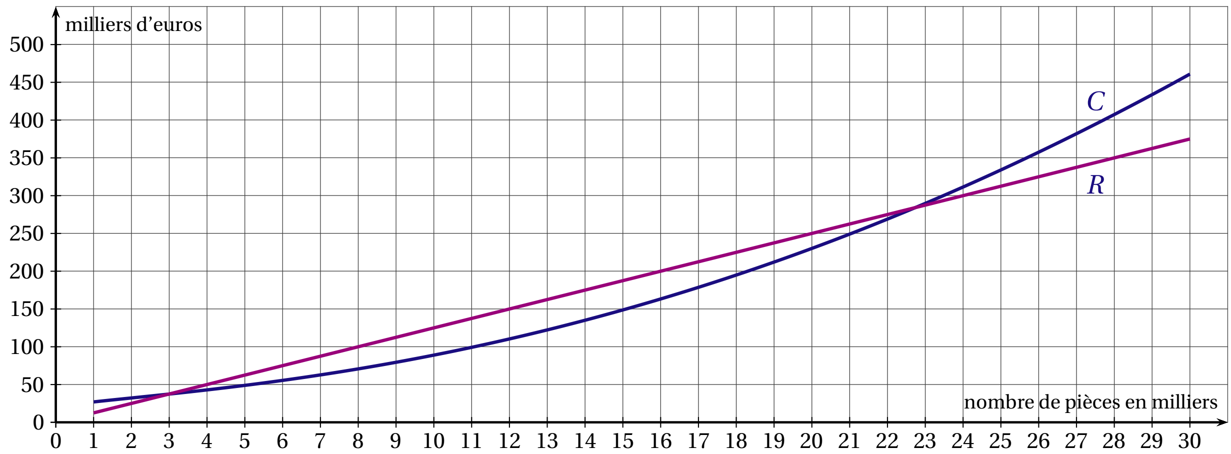


EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

Une entreprise produit et vend des composants électroniques.
Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.
Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

PARTIE A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1;30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

PARTIE B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1;30]$ par $B(x) = -0{,}5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$.

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1;30]$.
2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1;30]$.
   Justifier le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1;30]$.

x	1		2		30
$B'(x)$	7	↗	$6+2\ln 21$	↘	$-22+2\ln 30$

3. a) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;30]$.
   b) Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1;30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
   Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?