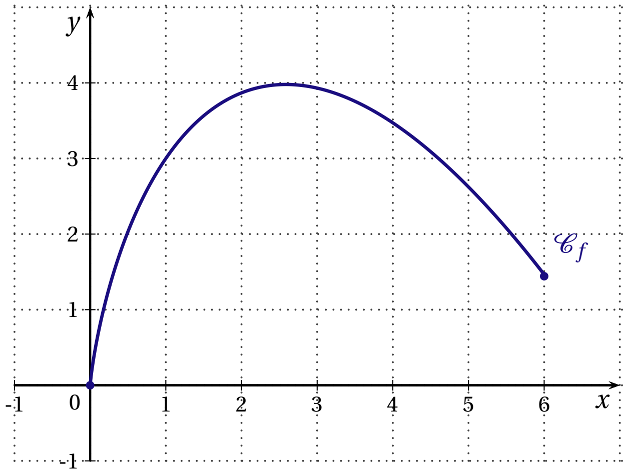
EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$.



On pose $I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a) $0 \leqslant I \leqslant 2$ b) $2 \leqslant I \leqslant 4$ c) $4 \leqslant I \leqslant 6$ d) $6 \leqslant I \leqslant 8$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - 3x^2$.
La courbe représentative de g admet un point d'inflexion qui a pour abscisse :
a) 1 b) 0 c) $\ln 3$ d) $\ln 2$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;0,6)$.
La probabilité qui admet pour valeur approchée 0,012 est :
a) $p(X = 2)$ b) $p(X \geqslant 2)$ c) $p(X \leqslant 2)$ d) $p(X < 2)$

4. Une société de vente en ligne de chaussures souhaite connaître la proportion d'articles présentant un défaut de coloris. Pour cela, on prélève au hasard dans le stock 400 paires de chaussures. On constate que 24 paires présentent ce défaut.
L'intervalle de confiance, au seuil de confiance de 95 %, de la proportion p de paires de chaussures présentant un défaut de coloris est :
a) $[0,89;0,99]$ b) $[0,01;0,11]$ c) $[0,05;0,07]$ d) $[0,92;0,96]$

EXERCICE 2 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1;45]$ par $g(x) = -20x + 5x\ln(x) + 30$.

1. a) On note g' la fonction dérivée de g.
   Montrer que, pour tout x appartenant à $[1;45]$, on a $g'(x) = -15 + 5\ln(x)$.
   b) Montrer que l'inégalité $-15 + 5\ln(x) \geqslant 0$ est équivalente à $x \geqslant \mathrm{e}^3$.
   c) Dresser le tableau de variations de la fonction g (les valeurs seront arrondies au centième si besoin).
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;45]$.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
   c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1;45]$.
3. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[1;45]$ par $G(x) = -11{,}25x^2 + 2{,}5x^2\ln(x) + 30x$.
   Montrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[1;45]$.
4. a) Calculer une valeur approchée au dixième de l'intégrale $\displaystyle\int_{10}^{45} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Déduire de la question précédente la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[10;45]$. Arrondir le résultat à l'unité.

PARTIE B

Un ballon sonde, lâché à une altitude de 1 km, relève en continu la température atmosphérique jusqu'à 45 km d'altitude.
On admet que la fonction g définie dans la partie A modélise la température de l'air, exprimée en degrés Celsius, en fonction de l'altitude x du ballon sonde, exprimée en km.
À l'aide des résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer l'altitude à partir de laquelle la température devient inférieure à 0 degré Celsius.
2. Déterminer la température minimale relevée par la sonde.
3. On appelle stratosphère la couche atmosphérique se situant entre 10 km et 45 km d'altitude.
   Déterminer la température moyenne de la stratosphère. Le résultat sera arrondi au degré.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le gérant d'un hôtel situé dans la ville de Lyon étudie la fréquentation de son établissement afin de prévoir au mieux son budget pour les années futures.
Le 5 décembre 1998, le site historique de Lyon a été inscrit au patrimoine mondial de l'UNESCO et l'hôtel a vu son nombre de clients augmenter significativement comme l'indique le tableau ci-dessous :

Année	1997	1998	1999	2000
Nombre de clients	950	1 105	2 103	2 470

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre de clients entre 1997 et 2000.

Par ailleurs, depuis le 1er janvier 2000, une étude statistique a permis de mettre en évidence que, chaque année, l'hôtel compte 1 200 nouveaux clients et que 70 % des clients de l'année précédente reviennent.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre total de clients de l'hôtel durant l'année $2000+n$.
On a ainsi $u_0 = 2\,470$ et, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,7u_n + 1\,200$.

2. Déterminer le nombre total de clients durant l'année 2001.
3. Le gérant de l'hôtel souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients annuel dépassera 3 900.

   Indiquer, en justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année correspondante.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

U prend la valeur 2 470
N prend la valeur 0
Tant que $U < 3900$
    U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$
    N prend la valeur $N+1$
Fin tant que
Afficher 2000 + N
	U prend la valeur 2 470
	N prend la valeur 0
	Tant que $U > 3900$
	    U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$
	    N prend la valeur $N+1$
	Fin tant que
	Afficher 2000 + N
		N prend la valeur 0
		N prend la valeur 0
		Tant que $U < 3900$
		    U prend la valeur $0,7 \times U + 1200$
		    N prend la valeur $N+1$
		Fin tant que
		Afficher U

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4\,000$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et préciser le premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c) Justifier que $u_n = 4\,000 - 1\,530 \times 0,7^n$ pour tout entier naturel n.
   d) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de clients a dépassé 3 900.
5. À long terme, déterminer le nombre de clients que le gérant de l'hôtel peut espérer avoir chaque année.

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Un groupe de touristes a réservé toutes les chambres d'un hôtel-restaurant à Venise qui propose tous les soirs à ses pensionnaires le choix entre un menu gastronomique et un menu traditionnel.
On considère, pour la modélisation, que chaque soir les clients choisissent un des deux menus et que le restaurant est réservé aux clients de l'hôtel.
Une étude sur les habitudes des clients montre que, si un soir donné, un client choisit le menu gastronomique, il choisit également le menu gastronomique le soir suivant dans 60 % des cas.
Si le client choisit le menu traditionnel un soir donné, il choisit également le menu traditionnel le soir suivant dans 70 % des cas.
Afin de mieux prévoir ses commandes pour la saison estivale, le gérant souhaite connaître la proportion de clients choisissant le menu gastronomique ou le menu traditionnel à partir du 1er juin 2015. Ce soir-là, 55 % des clients ont choisi le menu gastronomique.
On note g_0 la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 1er juin 2015 ; on a donc $g_0 = 0{,}55$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note g_n la probabilité qu'un client choisi au hasard prenne le menu gastronomique le n-ième soir après le 1er juin 2015.
Ainsi, g_1 est la probabilité qu'un client ait choisi le menu gastronomique le soir du 2 juin 2015.
De la même façon, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note t_n la probabilité qu'un client, choisi au hasard, prenne le menu traditionnel le n-ième soir après le 1er juin 2015.
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste au n-ième soir.
On note G l'état « le client choisit le menu gastronomique » et T l'état « le client choisit le menu traditionnel ».

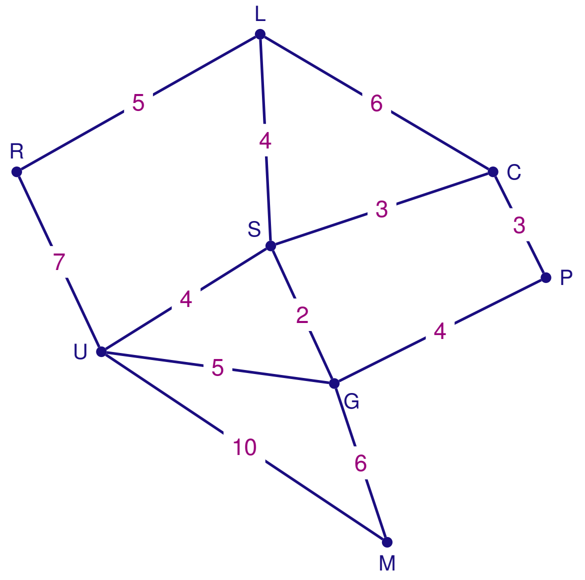
1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets G et T.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

2. a) Donner la matrice P_0 correspondant à l'état initial.
   b) Calculer la probabilité qu'un client choisisse le menu gastronomique le 4 juin 2015. On arrondira le résultat au centième.
3. a) Déterminer la matrice $P = (g \quad t)$ correspondant à l'état stable du graphe probabiliste.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

L'hôtel propose également à ses clients des balades en gondole sur les canaux de Venise.
Le graphe ci-dessous représente les principaux canaux de Venise empruntés par le gondolier.
Chaque arête représente un canal et chaque sommet un lieu de la ville.
Le poids de chaque arête représente la durée de parcours, exprimée en minutes, entre deux lieux de la ville en empruntant les canaux.



C : Ca'Pesaro
G : Palazzo Grimani di San Luca
L : Palazzo Labia
M : Piazza San Marco
P : Ponte Di Rialto
R : Piazzale Roma
S : Campo Di San Polo
U : Universita Ca'Foscari

Le gondolier employé par l'hôtel inspecte régulièrement les canaux pour en vérifier la navigabilité.
Il souhaite optimiser son trajet en inspectant une fois et une seule chaque canal.

1. Justifier qu'un tel trajet est possible et indiquer quels sont les lieux possibles de départ et d'arrivée.
2. Déterminer la durée pour effectuer ce trajet.

EXERCICE 4 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

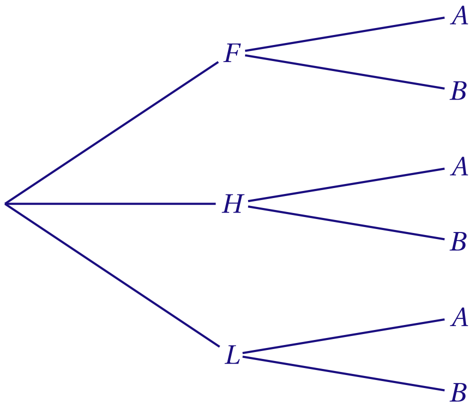
L'entreprise Éclairage vend des ampoules à deux magasins de bricolage : Atelier et Bricolo.
Cette entreprise propose trois types d'ampoules : les ampoules fluocompactes qui représentent 30 % du stock, les ampoules halogènes qui représentent 25 % du stock et les ampoules à LED qui représentent 45 % du stock.
On sait que :

— 65 % des ampoules fluocompactes sont achetées par le magasin Atelier ;
— 70 % des ampoules halogènes sont achetées par le magasin Bricolo ;
— 50 % des ampoules à LED sont achetées par le magasin Atelier.

On prélève au hasard une ampoule provenant du stock de l'entreprise Éclairage.
On considère les évènements suivants :

F : « l'ampoule est une ampoule fluocompacte » ;
H : « l'ampoule est une ampoule halogène » ;
L : « l'ampoule est une ampoule à LED » ;
A : « l'ampoule est achetée par le magasin Atelier » ;
B : « l'ampoule est achetée par le magasin Bricolo ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :

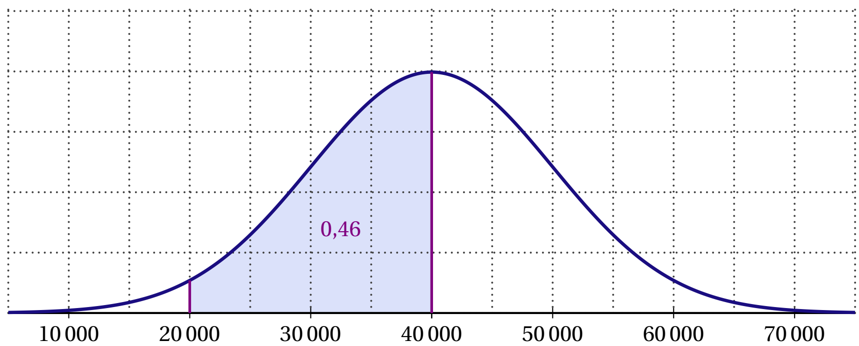


2. Calculer $p(F \cap A)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer la probabilité qu'une ampoule soit achetée par le magasin Bricolo.

PARTIE B

Une norme de qualité stipule qu'une marque peut commercialiser ses ampoules si leur durée de vie est supérieure à 20 000 heures avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque ÉclaireBien. On admet que X suit la loi normale dont la fonction de densité est tracée ci-après.
   L'aire grisée comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 0,46.



À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

a) Donner l'espérance mathématique de X.

b) Déterminer $p(20\,000 < X < 60\,000)$.

c) Déterminer si la marque ÉclaireBien pourra commercialiser ses ampoules. Justifier la réponse.

2. On note Y la variable aléatoire correspondant à la durée de vie, en heures, d'une ampoule de la marque BelleLampe.
On admet que Y suit la loi normale d'espérance $42\,000$ et d'écart-type $15\,000$.

a) Justifier que la marque BelleLampe ne pourra pas commercialiser ses ampoules.

b) Déterminer le nombre a, arrondi à l'unité, tel que $p(Y < a) = 0{,}05$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.