EXERCICE 1 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits.

   Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

   a) $[0{,}713; 0{,}771]$ b) $[0{,}692; 0{,}808]$ c) $[0{,}754; 0{,}813]$ d) $[0{,}701; 0{,}799]$

2. En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[4; 11]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

   a) $\dfrac{6}{11}$ b) $\dfrac{10}{7}$ c) $\dfrac{10}{11}$ d) $\dfrac{6}{7}$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\text{e}^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

   a) $f'(x) = -2\text{e}^{-2x+3}$ b) $f'(x) = \text{e}^{-2x+3}$
   c) $f'(x) = (-2x+3)\text{e}^{-2x+3}$ d) $f'(x) = (-2x-1)\text{e}^{-2x+3}$

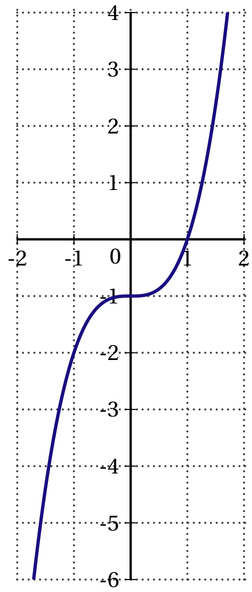
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' soit aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La courbe ci-contre représente la fonction f''.
   On peut alors affirmer que :

   a) f est convexe sur $[-2; 2]$.

   b) f est concave sur $[-2; 2]$.

   c) La courbe représentative de f sur $[-2; 2]$ admet un point d'inflexion.

   d) f' est croissante sur $[-2; 2]$.



EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un loueur de voitures dispose au 1^er^ mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1^er^ mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^er^ mars de l'année $2015 + n$.
On a donc $u_0 = 10000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 3000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12000$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).

   c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12000 - 2000 \times 0{,}75^n$.

   d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
   On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

   a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

```
INITIALISATION
            U prend la valeur 10 000
            N prend la valeur 0
TRAITEMENT
            Tant que ...
                N prend la valeur .............
                U prend la valeur .............
            Fin Tant que
SORTIE
            Afficher ...
```

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

   c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $12000 - 2000 \times 0{,}75^n \geqslant 11950$.

EXERCICE 2 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1er janvier 2014.
On admet que :

— Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,2 ;
— s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de 0,4.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».
Pour tout entier naturel n, on note :

— c_n la probabilité de l'évènement « Hugo court le $(n+1)$-ième jour » ;
— r_n la probabilité de l'évènement « Hugo ne court pas le $(n+1)$-ième jour » ;
— P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le $(n+1)$-ième jour.

Le 1er janvier 2014, motivé, le jeune homme court.
On a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} c_0 & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0{,}750\,016 & 0{,}249\,984 \\ 0{,}749\,952 & 0{,}250\,048 \end{pmatrix}$.
   Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7e jour ?
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6.
4. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}2c_n + 0{,}6$.
5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0{,}75$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $c_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^n$.
   d) Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?
   e) Conjecturer alors l'état stable de ce graphe.
   Comment valider votre conjecture ?

EXERCICE 3 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae ... dont certaines sont interprétées en français.
Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.
Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.
Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.
On note :

— R l'évènement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;

— F l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Calculer $P(R)$, la probabilité de l'évènement R.
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les évènements R et F.
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5 % sont interprétées en français.
   Montrer que $P\left(F \cap \overline{R}\right) = 0,28$.
5. En déduire $P_{\overline{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

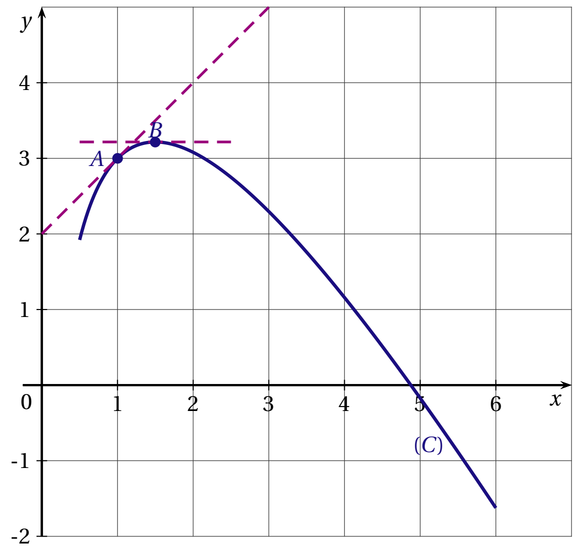
PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5;6]$. Les points $A(1;3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1{,}5)$.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coordonnées $(0;2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0{,}5;6]$. Argumenter la réponse.

PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5;6]$ par $f(x) = -2x+5+3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0{,}5;6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur $[0{,}5;6]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0{,}5;6]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0{,}5;6]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur $[0{,}5;6]$.
5. On considère la fonction F définie sur $[0{,}5;6]$ par $F(x) = -x^2+2x+3x\ln(x)$.
   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0{,}5;6]$.
   b) En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.