EXERCICE 1 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.
À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

— 60% des clients sont des hommes ;

— 80% des hommes mangent un dessert alors que seulement 45% des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

— H l'événement « le client interrogé est un homme » ;

— D l'événement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

— $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A ;

— $p(A)$ la probabilité d'un événement A.

PARTIE A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
3. Montrer que $p(D) = 0,66$.
4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

PARTIE B

Le directeur de cette chaîne souhaite savoir si ses clients actuels sont satisfaits des menus proposés dans ses restaurants.
Une enquête de satisfaction est réalisée sur un échantillon de 300 clients et 204 se déclarent satisfaits des menus proposés.

1. Donner un intervalle de confiance au niveau de 95% de la proportion de clients satisfaits.
2. Le directeur souhaite cependant avoir une estimation plus précise et donc veut un intervalle de confiance au niveau de 95% d'amplitude 0,06.
   Déterminer le nombre de personnes à interroger pour obtenir un tel intervalle.

EXERCICE 2 (4 *points*) *Commun à tous les candidats*

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponses n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Noter sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Les parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 90 et d'écart-type 6. Une valeur arrondie au millième de $p(X \geqslant 100)$ est :

   a) 0,500 b) 0,452 c) 0,048 d) 0,952

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type 10. Une valeur arrondie au millième de $p\left(\mu - 20 \leqslant Y \leqslant \mu + 20\right)$ est :

   a) 0,68 b) 0,5 c) 0,8 d) 0,95

PARTIE B

Pour les deux questions suivantes, on considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-5;3]$. On donne ci-dessous le tableau de variation de f'.

x	-5	-1	1	3
Variation de f'	$-0{,}5$	-3	0	4

3. La fonction f est :
   a) croissante sur $[-5;3]$
   b) décroissante sur $[-5;1]$
   c) décroissante sur $[-5;3]$
   d) croissante sur $[-1;3]$
4. La fonction f est :
   a) convexe sur $[-5;-1]$
   b) concave sur $[-5;-1]$
   c) concave sur $[-5;1]$
   d) convexe sur $[-5;3]$

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le 31 décembre 2015 une forêt comportait 1500 arbres. Les exploitants de cette forêt prévoient que chaque année, 5% des arbres seront coupés et 50 arbres seront plantés.
On modélise le nombre d'arbres de cette forêt par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'arbres au 31 décembre de l'année $(2015+n)$.
Ainsi $u_0 = 1500$.

PARTIE A

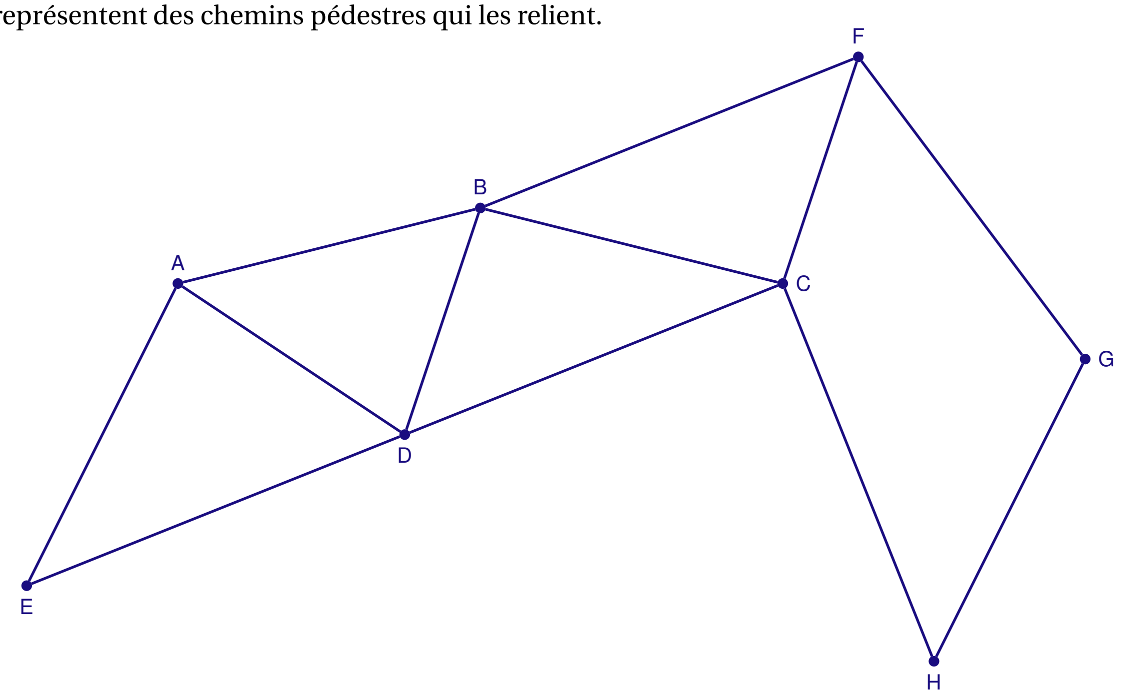
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}95 \times u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 1000$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser la raison et le premier terme.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 1000 + 500 \times 0{,}95^n$.
   c) En déduire le nombre d'arbres prévisibles dans cette forêt le 31 décembre 2030.

PARTIE B

Les arbres coupés dans cette forêt sont utilisés pour le chauffage. Le prix d'un stère de bois (unité de volume mesurant le bois) augmente chaque année de 3%.
Au bout de combien d'années le prix d'un stère de bois aura-t-il doublé ?

EXERCICE 3 (5 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



PARTIE A

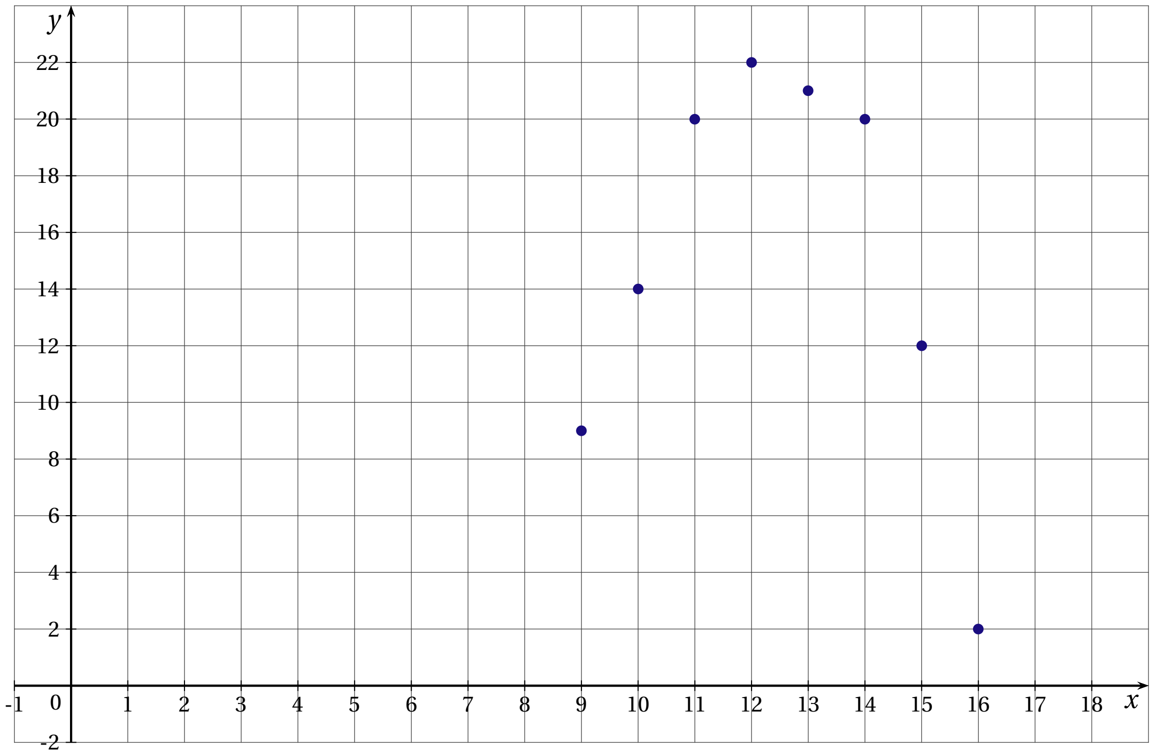
1. Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule ? Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

   On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

   Déterminer le nombre de parcours allant de E à H en 4 chemins pédestres. Les citer tous.

PARTIE B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9h à 16h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.
On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points $(9;9)$, $(11;20)$ et $(16;2)$ appartiennent à la représentation graphique de f.

1. Calculer les trois réels a, b et c.
2. En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.

EXERCICE 4 (6 *points*) *Commun à tous les candidats*

On définit une fonction g sur l'intervalle $[0,5;5]$ par $g(x) = 5x - 3x\ln x$.

1. Montrer que pour x appartenant à $[0,5;5]$, $g'(x) = 2 - 3\ln x$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g sur $[0,5;5]$.
3. En déduire pour quelle valeur x_0, arrondie au centième, la fonction g atteint un maximum.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 4$ admet deux solutions sur $[0,5;5]$ que l'on note α_1 et α_2. En donner un encadrement d'amplitude 0,01.
5. Résoudre $g(x) \geqslant 4$.
6. Montrer que la fonction G définie sur $[0,5;5]$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{13}{4}x^2$ est une primitive de g sur $[0,5;5]$.
7. Calculer alors la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0,5;5]$. On donnera la valeur arrondie au millième.