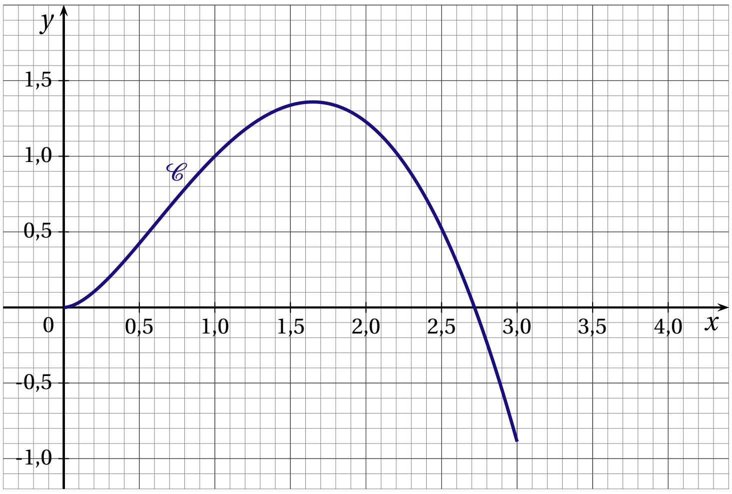
EXERCICE 1 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;3]$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;3]$, on note f' sa fonction dérivée et on admet que sa dérivée seconde f'' est définie sur $]0;3]$ par : $f''(x) = -1 - 2\ln x$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Sur $]0;3]$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :
   a) e b) 2,72 c) $\frac{1}{2}\mathrm{e}+1$

2. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :
   a) e b) $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ c) $\sqrt{\mathrm{e}}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;3]$ on a :
   a) $f'(x) = x(1 - 2\ln x)$ b) $f'(x) = -\frac{2}{x}$ c) $f'(x) = -2$

4. Sur l'intervalle $[1;3]$:
   a) f est convexe b) f est décroissante c) f' est décroissante

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :
   a) $y = -x + \mathrm{e}$ b) $y = -\mathrm{e}x$ c) $y = -\mathrm{e}x + \mathrm{e}^2$

EXERCICE 2 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,001 près.

PARTIE A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

— 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
— 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
— 80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

— A : « l'employé fait partie du service A » ;
— B : « l'employé fait partie du service B » ;
— C : « l'employé fait partie du service C » ;
— T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité d'un évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$.

1. a) Justifier que $P(A) = 0,45$.
   b) Donner $P_A(T)$.
   c) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.
3. Montrer que $P(T) = 0,482$.
4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

PARTIE B

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque employé en France, associe son temps de trajet quotidien, en minutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart type 10.

1. Calculer la probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes.
2. Déterminer $P(X > 50)$.
3. À l'aide de la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée du nombre a à l'unité près, tel que $P(X > a) = 0,2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressés par cette offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieure à 0,15 avec un niveau de confiance de 0,95. Quel est le nombre minimal d'employés à consulter ?

EXERCICE 3 (4 *points*) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

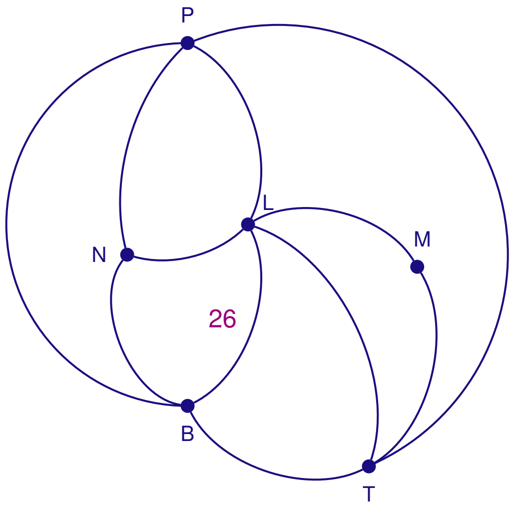
En économie le résultat net désigne la différence entre la recette et les charges d'une entreprise sur une période donnée. Lorsqu'il est strictement positif, c'est un bénéfice.
Propriétaire d'une société, Pierre veut estimer son résultat net à la fin de chaque mois.
À la fin du mois de janvier 2018, celui-ci était de 10 000 euros.
Pierre modélise ce résultat net par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 10000$ et de terme général u_n tel que $u_{n+1} = 1{,}02u_n - 500$ où n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2018.

1. Quel est le montant du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 25000$.
   a) Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme a_0 et la raison.
   b) Exprimer a_n en fonction de n et montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 25000 - 15000 \times 1{,}02^n$.
   c) Résoudre l'inéquation $25000 - 15000 \times 1{,}02^n > 0$ où n désigne un entier naturel.
   Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.
3. À l'aide d'un algorithme, Pierre souhaite déterminer le cumul total des résultats nets mensuels de la société jusqu'au dernier mois où l'entreprise est bénéficiaire.
   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre de mois pendant lesquels l'entreprise est bénéficiaire et la variable S le cumul total des résultats nets mensuels sur cette période.

```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que ..................
    S ..................
    U ..................
    N ..................
Fin Tant que
```

EXERCICE 3 (4 *points*) *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).
Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



PARTIE A

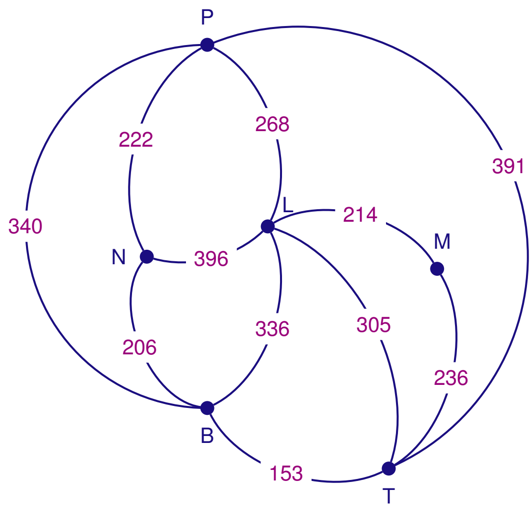
1. a) Quel est l'ordre du graphe?
   b) Le graphe est-il complet? Justifier la réponse.
2. a) On admet que le graphe est connexe. Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule. Est-ce possible? Justifier la réponse.
   b) Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport? Justifier la réponse.
3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétique). On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

   a) Recopier et compléter la matrice d'adjacence.
   b) Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.
   Déterminer le nombre de trajets possibles.

PARTIE B

On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.
Déterminer un trajet qui minimise son temps de parcours.

EXERCICE 4 (5 *points*) *Commun à tous les candidats*

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

— la fonction f définie sur $[0;14]$ par $f(x) = 2\,000\mathrm{e}^{-0,2x}$ pour le produit A ;

— la fonction g définie sur $[0;14]$ par $g(x) = 15x^2 + 50x$ pour le produit B, où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.

PARTIE A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes. Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

PARTIE B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;14]$ on pose $h(x) = f(x) + g(x)$.
On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0;14]$.

1. a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?
   b) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;14]$ $h'(x) = -400\mathrm{e}^{-0,2x} + 30x + 50$.
2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle $[0;14]$ est :

x	0	14
variation de h'	-350 ↗	$h'(14) \approx 446$

a) Justifier que l'équation $h'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 14]$ et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

b) En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; 14]$.

3. Voici un algorithme :

```
Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Tant que Y ⩽ 0
    X ← X + 0,1
    Y ← −400 exp(−0,2X) + 30X + 50
Fin Tant que
```

a) Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?

b) En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0,001 près de α après l'exécution de l'algorithme.

4. a) Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur $[0; 14]$ est :

$$H(x) = -10\,000\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2.$$

b) Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.