

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Une justification est attendue.

AFFIRMATION A

Un objet subit trois augmentations successives de 10 %. Une baisse de 25 % suffit à ramener le prix de cet objet en dessous de son prix initial.

AFFIRMATION B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées (2;3).

AFFIRMATION C

La valeur exacte de la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{3}$ est : $6 \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{13} \right]$.

AFFIRMATION D

Dans un hôtel, le petit déjeuner n'est servi que jusqu'à 10 heures 15 minutes. Pierre, qui réside dans cet hôtel, se lève entre 9 heures et 11 heures.

On admet que l'heure de lever de Pierre est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9; 11]$. La probabilité que Pierre ne puisse pas prendre son petit déjeuner est 0,425.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.
Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,001 près

PARTIE A

Une étude portant sur la recharge des véhicules électriques indique que 10 % des recharges sont effectuées sur des bornes publiques. Dans les autres cas, la recharge s'effectue chez des particuliers.

Il existe deux types de recharge : la recharge « standard » et la recharge « accélérée ».

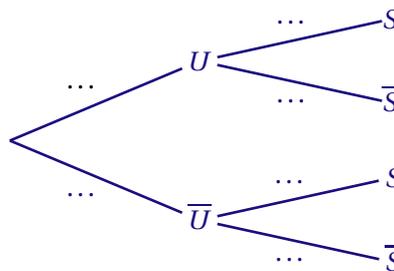
Les recharges « standard » représentent 25 % des recharges effectuées sur des bornes publiques et 95 % des recharges effectuées chez les particuliers.

On choisit au hasard un véhicule électrique qui vient d'être rechargé et on considère les événements suivants :

- U : « la recharge a été effectuée sur une borne publique » ;
- S : « la recharge a été effectuée de façon standard ».

On rappelle que si A et B sont deux événements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus, \bar{A} désigne l'évènement contraire de A .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Justifier que $P(S) = 0,88$.
3. Sachant que le véhicule choisi a été rechargé de façon standard, calculer la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique.

PARTIE B

Une société fabriquant des batteries pour véhicules électriques effectue une charge complète de chacune de ses batteries lors de la fabrication. Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de charge de ces batteries, exprimée en heures, par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 6 et d'écart type σ .

1. Sachant qu'environ 95 % des durées de charge sont comprises entre 2,6 h et 9,4 h, justifier que l'on peut choisir $\sigma = 1,7$.
2. a) Calculer $P(T > 7)$.
b) Sachant que l'une des batteries mise en charge n'est pas rechargée complètement au bout de 7 heures, quelle est la probabilité qu'elle ne le soit toujours pas au bout de 9 heures?

PARTIE C

Le fabricant de batteries affirme que 80 % de ses batteries peuvent assurer 350 cycles de rechargement complet sans perte significative de puissance.

Une association de consommateurs réalise une enquête sur 57 batteries de cette marque.

Parmi celles-ci, seules 40 n'ont pas subi de perte de puissance significative. Cette étude peut-elle remettre en cause l'affirmation du constructeur? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Au 1^{er} janvier 2018, madame DURAND dispose d'un capital de 16 000 €. Le 1^{er} juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.

PARTIE A

On modélise le montant du capital de madame DURAND au 1^{er} janvier par une suite (u_n) . Plus précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital de madame DURAND disponible le 1^{er} janvier de l'année 2018 + n .

On a donc $u_0 = 16\,000$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Exprimer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant votre réponse.
 - Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
- À l'aide d'un algorithme, madame DURAND souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur ou égal à 2 000 €.
 - Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← ...
N ← 0
Tant que U ...
    N ← ...
    U ← ...
Fin Tant que
```

- Quelle est la valeur numérique contenue par la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme?

PARTIE B

Cherchant à anticiper la diminution de son capital disponible, madame DURAND décide d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1^{er} décembre.

On note v_n la valeur du capital le 1^{er} janvier de l'année 2018 + n . On a ainsi $v_0 = 16\,000$.

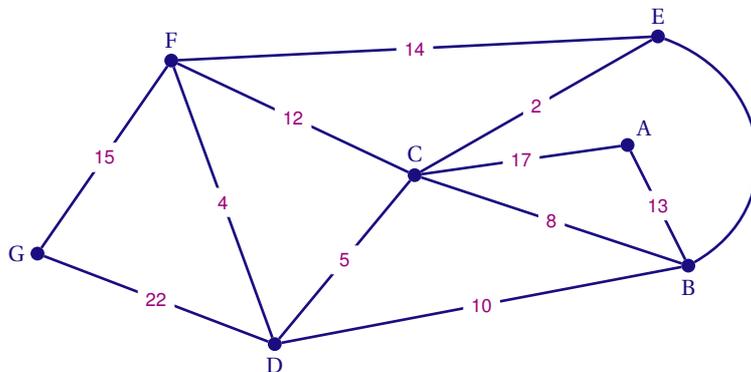
- Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0,85 \times v_n + 300$.
- On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 2\,000$.
 - Calculer w_0 .
 - Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85.
 - En déduire que, pour tout entier n , $v_n = 2\,000 + 14\,000 \times 0,85^n$.
- En s'y prenant ainsi, madame DURAND espère toujours disposer d'un capital supérieur à 2 500 €. A-t-elle raison?

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

En vacances, Assan et Chloé projettent de visiter sept sites touristiques et se sont procurés le plan des sentiers reliant ces sites.

Ci-dessous, ils ont représenté ce plan par un graphe connexe pondéré par les temps de parcours en minutes séparant les lieux de visites notés A, B, C, D, E, F et G.



PARTIE A

1. Est-il possible, pour Assan et Chloé, d'effectuer un trajet empruntant une et une seule fois tous les sentiers? Justifier votre réponse.
2. Déterminer, par la méthode de votre choix, le trajet le plus court leur permettant de relier la station A à la station G en précisant le temps de parcours.

PARTIE B

Sur les sites B et G, l'office de tourisme loue des audio-guides que les visiteurs peuvent rendre sur l'un ou l'autre des deux sites à la fin de la journée. Une étude a mis en évidence que chaque jour :

- 10 % des audio-guides loués sur le site B sont rendus sur le site G, les autres étant rendus sur le site B;
- 15 % des audio-guides loués sur le site G sont rendus sur le site B, les autres étant rendus sur le site G.

On étudie l'évolution de la répartition des audio-guides sur les deux sites.

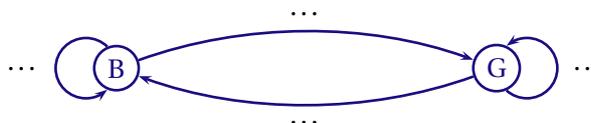
Pour tout entier naturel non nul n :

- on note b_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site B à la fin de la n -ième journée,
- on note g_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site G à la fin de la n -ième journée.

À l'ouverture de la saison, il y a autant d'audio-guides sur le site B que sur le site G.

Pour tout entier naturel non nul n , on note $P_n = \begin{pmatrix} b_n & g_n \end{pmatrix}$ la matrice de l'état probabiliste à la fin de la n -ième journée. On rappelle que $b_n + g_n = 1$. On pose $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. Donner la matrice de transition M associée au graphe.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n M$.
- Calculer P_2 . On approchera les valeurs à 10^{-3} près.
 - Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

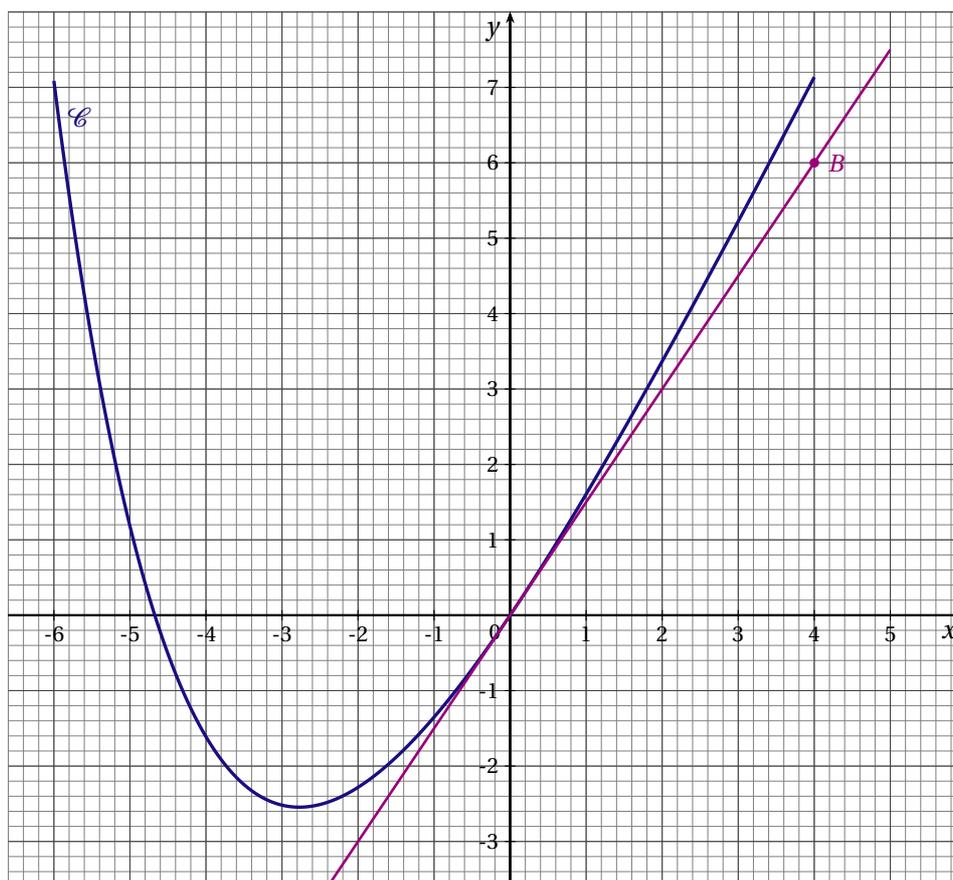
Dans la suite, on admettra que pour tout entier naturel n , on a $b_{n+1} = 0,75b_n + 0,15$.

4. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule fournit, pour tout entier n , l'expression de b_n en fonction de n . Préciser laquelle et justifier votre réponse :
- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $b_n = -0,1 \times 0,75^n + 0,6$ | b) $b_n = -0,6 \times 0,75^n + 0,1$ |
| c) $b_n = 0,1 \times 0,75^n + 0,6$ | d) $b_n = -0,1 \times 0,75^n - 0,6$ |
5. La personne chargée de la gestion des audio-guides prétend que le site G accueillera un jour moins de 35 % des audio-guides. Qu'en pensez-vous? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6; 4]$ et dont la courbe \mathcal{C} est représentée ci-dessous. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde sur l'intervalle $[-6; 4]$.



On a représenté \mathcal{D} , la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0. La droite \mathcal{D} passe par l'origine du repère et par le point $B(4; 6)$.

1. Avec la précision permise par le graphique :
 - a) donner la valeur de $f(0)$;
 - b) donner la valeur de $f'(0)$;
 - c) conjecturer la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 4]$.
2. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$ et que son expression est

$$f(x) = 2x - 1 + e^{-\frac{1}{2}x}.$$

- a) Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
 - b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geq 0$ est l'intervalle $[-2 \ln(4); 4]$.
 - c) Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 4]$.
 - d) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
3. Donner un encadrement au centième près de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
 4. Démontrer la conjecture émise dans la question 1. c.
 5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $g(x) = x^2 - x - 2e^{-\frac{1}{2}x}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $[0; 4]$.

- a) Montrer que la fonction g est une primitive la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
- b) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
En donner une valeur approchée à 0,01 près.