

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

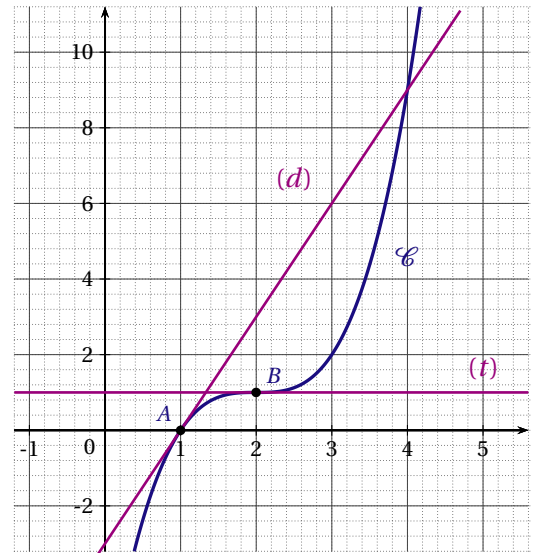
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Seules les affirmations 1, 2 et 3 s'appuient sur la figure ci-dessous dans laquelle :

- la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction g définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- le point A est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 et le point B celui d'abscisse 2,
- la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A ,
- la tangente (t) à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est horizontale.



Affirmation 1

$$g'(1) = 1$$

Affirmation 2

Toute primitive de la fonction g est strictement croissante sur $[0; 3]$.

Affirmation 3

Le point B est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction g .

Affirmation 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $f(x) = xe^{3x}$.

La fonction dérivée de f notée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3e^{3x}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les parties de cet exercice sont indépendantes.

Le syndrome d'apnée du sommeil se manifeste par des interruptions répétées de la respiration pendant le sommeil. Ce syndrome peut être dû à plusieurs facteurs.

PARTIE A

Sauf indication contraire, les résultats numériques seront approchés à 10^{-4} près

Dans cette partie, on cherche à étudier le lien entre le surpoids et le syndrome d'apnée du sommeil dans une population donnée.

Parmi les personnes participant à l'étude, 41 % sont en surpoids.

On observe que parmi les individus en surpoids, 12 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 4 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil.

Pour tout événement E , on note $\bar{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité.

Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude, et on note :

- S l'évènement : « la personne est en surpoids » ;
- A l'évènement : « la personne souffre d'apnée du sommeil ».

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en surpoids et souffre d'apnée du sommeil.
3. Montrer que $p(A) = 0,0728$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome d'apnée du sommeil. Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids?

PARTIE B

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier d'un patient souffrant d'apnée du sommeil.

Pendant plusieurs nuits, on observe son rythme respiratoire au cours de son sommeil. Ces examens permettent d'établir que la durée, en seconde, des apnées de ce patient peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 22$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(14 \leq D \leq 30)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Calculer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de la probabilité qu'une apnée de ce patient dure plus de 30 secondes.

PARTIE C

Une entreprise d'équipement médical commercialise un dispositif de ventilation en pression positive continue. Ce dernier permet de maintenir ouvertes les voies respiratoires du patient, prévenant ainsi les apnées du sommeil.

L'entreprise affirme que 91 % des patients qui utilisent le dispositif ressentent une amélioration de la qualité de leur sommeil.

Une étude est menée sur 348 patients auxquels on fait tester le dispositif. Après plusieurs nuits, 290 personnes déclarent avoir ressenti une amélioration de la qualité de leur sommeil.

Peut-on remettre en cause l'affirmation de l'entreprise d'équipement médical? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES

Au 31 décembre 2017, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en millier, au 31 décembre de l'année $(2017 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2018.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 180$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 900$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.
 - b) Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = -450 \times 0,8^n + 900$.
4. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation? Justifier la réponse.
5. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois?
6. La direction du magazine s'engage à verser chaque année 1 euro par abonnement à une association caritative.

On dispose de l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 450
S ← 450
Pour I allant de 1 à N
    U ← 0,8 * U + 180
    S ← S + U
Fin Pour
```

On affecte 3 à la variable N et on exécute l'algorithme.

- a) Après l'exécution, quelle valeur numérique contient la variable S ?
- b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Deux plateformes proposant des films en streaming se font concurrence sur le marché : Webflix et Yellow Cinéma.

Au 1^{er} janvier 2019, 63 % des utilisateurs de ces plateformes sont abonnés à Webflix et les 37 % restants à Yellow Cinéma. On souhaite étudier l'évolution du marché au fil du temps.

On estime que chaque mois :

- parmi les clients de Webflix, 89 % renouvellent leur abonnement tandis que les autres quittent la plateforme pour s'abonner à Yellow Cinéma.
- parmi les clients de Yellow Cinéma, 91 % renouvellent leur abonnement tandis que les autres quittent la plateforme pour s'abonner à Webflix.

On suppose également que le nombre total de clients reste constant.

Pour tout entier naturel n , on note :

- w_n la proportion de clients abonnés à Webflix n mois après le 1^{er} janvier 2019.
- y_n la proportion de clients abonnés à Yellow Cinéma n mois après le 1^{er} janvier 2019.

L'état probabiliste n mois après le 1^{er} janvier 2019 est noté $P_n = (w_n \quad y_n)$.

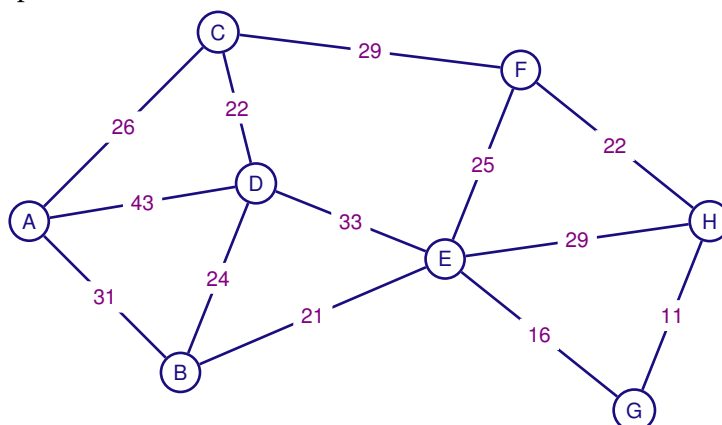
On a ainsi $P_0 = (0,63 \quad 0,37)$.

On rappelle que pour tout entier naturel n , $w_n + y_n = 1$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste dans lequel on notera respectivement W et Y les sommets correspondants aux plate-formes Webflix et Yellow Cinéma.
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans leur ordre alphabétique.
b) Calculer l'état probabiliste P_2 .
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 0,8w_n + 0,09$.
4. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n , par $a_n = w_n - 0,45$.
a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Étant donné un entier naturel n , exprimer a_n en fonction de n .
c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $w_n = 0,18 \times 0,8^n + 0,45$.
5. Les dirigeants de Webflix peuvent-ils espérer rester les leaders du marché à long terme? Expliquer.

PARTIE B

Le réseau de serveurs permettant à Webflix de diffuser les films que la plateforme propose à ses abonnés est modélisé par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent les serveurs et sur les arêtes on a indiqué les temps de réponse, exprimés en milliseconde, entre deux serveurs.



Des données doivent transiter du serveur A vers le serveur H.

1. Déterminer, à l'aide d'un algorithme, un chemin que doivent suivre ces informations pour que la transmission soit la plus rapide possible.
2. Préciser le temps de réponse pour le chemin trouvé précédemment.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

On étudie l'évolution du taux de natalité d'une population entre 1750 et 1870.

On admet que le taux de natalité peut être modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 120]$ par :

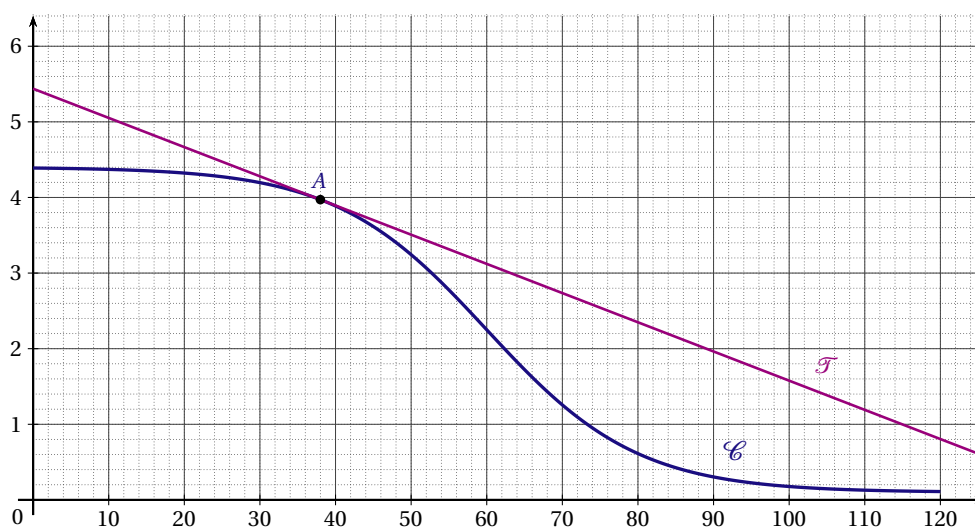
$$f(x) = 0,1 + \frac{4,3}{1 + e^{0,1x-6}}$$

où x représente le temps, exprimé en années, écoulé depuis 1750,

$f(x)$ représente le taux de natalité, exprimé en pourcentage, de la population totale.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction f , et la droite $\mathcal{T}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 38.



PARTIE A

1. Avec la précision permise par le graphique :

- Donner une valeur approchée de $f'(38)$.
- Recopier, parmi les propositions suivantes, celle qui est exacte :

$$7 \leq \int_{10}^{30} f(x) dx \leq 8 \quad ; \quad 130 \leq \int_{30}^{120} f(x) dx \leq 190 \quad ; \quad 700 \leq \int_{80}^{100} f(x) dx \leq 800.$$

2. a) Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 120]$:

$$f'(x) = -\frac{0,43e^{0,1x-6}}{(1 + e^{0,1x-6})^2}.$$

b) Retrouver le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$.

- Justifier que sur l'intervalle $[0; 120]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution que l'on appelle α .
- Encadrer α par deux entiers consécutifs.

PARTIE B

1. On admet que sur l'intervalle $[0; 120]$, la fonction g d'expression $g(x) = \frac{4,3}{(1 + e^{0,1x-6})}$ a pour primitive la fonction G d'expression $G(x) = -43 \ln(1 + e^{-0,1x+6})$.

a) Donner une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$.

b) En déduire la valeur exacte de $\int_{30}^{120} f(x) dx$.

2. Calculer le taux de natalité moyen entre 1780 et 1870. On en donnera une valeur approchée à 0,01 % près.