BAC 2005

SÉRIE ES

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2005

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2005

AMÉRIQUE DU NORD 2005

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

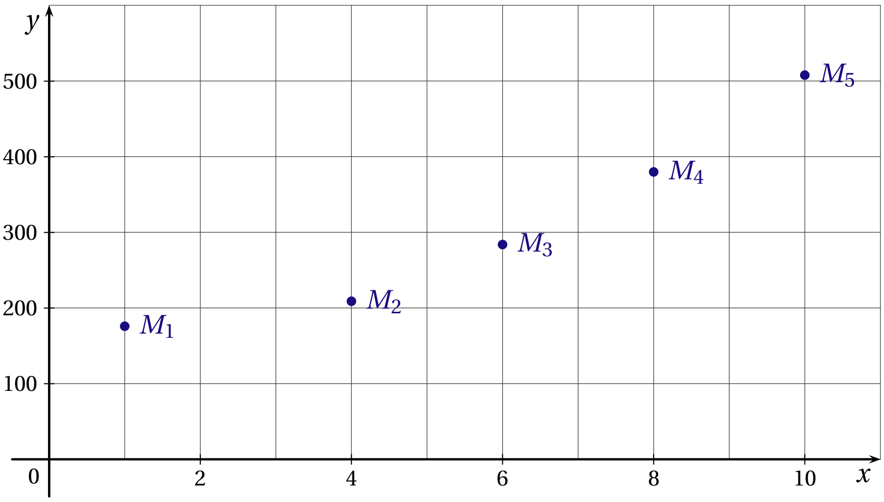
1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   b) Pour atteindre son objectif quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

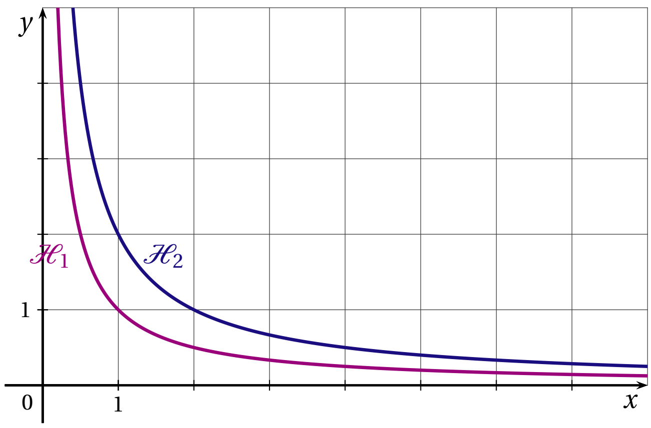
Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\,;y_i\right)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?



2. On pose $z_i = \ln y_i$.
   a) Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i, associées aux rangs x_i du tableau.
   b) Construire le nuage de points $N_i\left(x_i\,;z_i\right)$ dans le repère orthogonal suivant :
   — sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année ;
   — sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.
3. a) Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.
   b) En déduire une relation entre y et r de la forme $y = A \times k^x$. (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près)
4. a) Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).
   b) Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
   c) À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*



Les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note $\mathscr{D}_2$ le domaine délimité par les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
On note $\mathscr{D}'_2$ le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{H}_1$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}'_2$ d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.
   Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ délimité par les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. *On pourra comparer les nombres* $n(n+2)$ *et* $(n+1)^2$.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).
5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}_n$ reste supérieure à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire.
   Soit N cette valeur.
6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

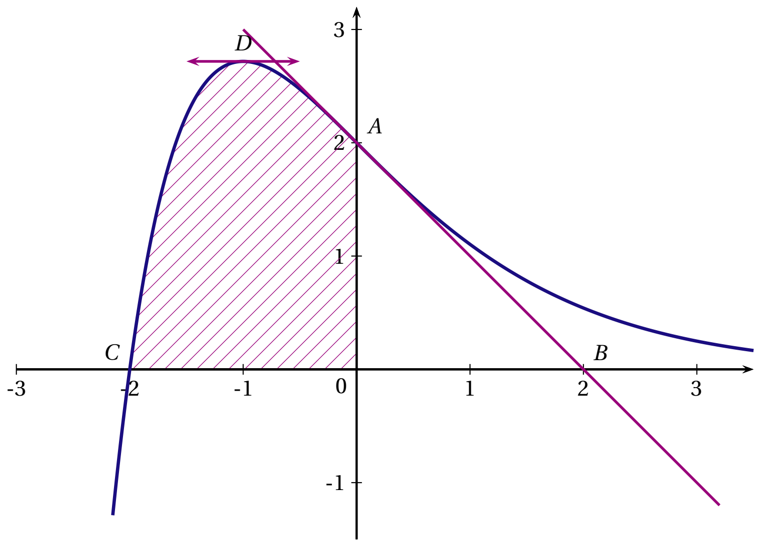
Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.
Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

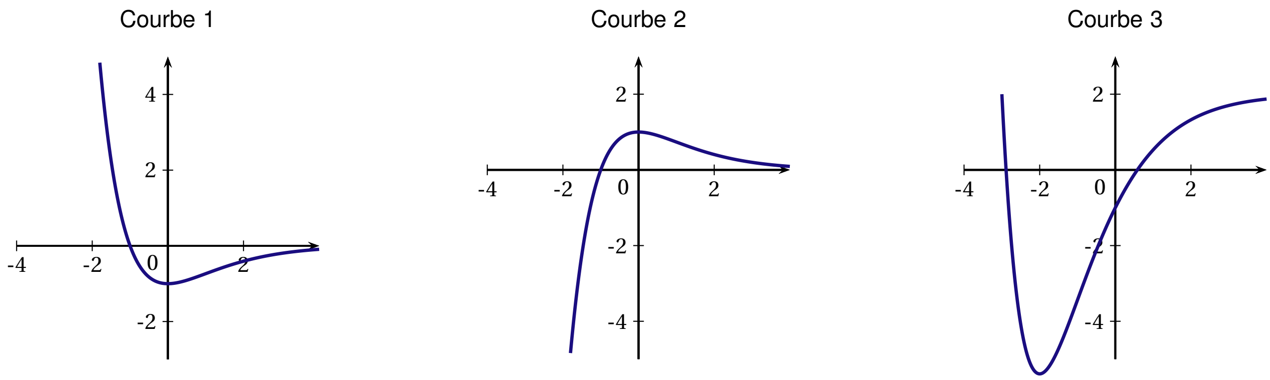
QUESTIONS	RÉPONSES
1. Soit une série statistique à deux variables $(x\ ;\ y)$. Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1{,}35x + 22{,}8$. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ $(6{,}5 ; 30{,}575)$ ☐ $(32{,}575 ; 6{,}5)$ ☐ $(6{,}5 ; 31{,}575)$
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3. L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie :	☐ pour tout x de $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ ☐ pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ ☐ pour tout x de $]1\ ;\ +\infty[$
4. Pour tout réel x, le nombre $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$ égal à :	☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 2}$ ☐ $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$
5. On pose $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$ alors le nombre $I - J$ est égal à :	☐ $\ln\dfrac{2}{3}$ ☐ $\ln\dfrac{3}{2}$ ☐ $\dfrac{3}{2}$
6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \dfrac{2}{100}\right)^x \leqslant 0{,}5$ est :	☐ $S = \left[-\infty ; \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}\right[$ ☐ $S = \left[\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} ; +\infty\right[$ ☐ $S = \left[\ln\left(\dfrac{0{,}5}{0{,}98}\right) ; +\infty\right[$

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. a) Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
   b) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x+K)e^{\alpha x}$ où K et α sont des constante réelles.
   Calculer $f'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α.
   En déduire que f est définie par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
3. a) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f.
   b) En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.
   On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

AMÉRIQUE DU SUD 2005

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln x$.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations de f. Recopier ce tableau sur la copie.
   a) Justifier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $\left]0;\sqrt{\mathrm{e}}\right[$ et $\left]\sqrt{\mathrm{e}};+\infty\right[$.
   b) Calculer la valeur exacte de $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ -2	↗	$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$	↘	$-\infty$

2. À l'aide de ce tableau de variations, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Si ces solutions existent, donner pour chacune d'elles la valeur décimale approchée arrondie au dixième (aucune justification n'est demandée).
3. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si chacune des affirmations suivantes est **vraie** ou **fausse** :
   a) La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   b) Toute primitive de f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}\right[$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.
À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.
On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On note C l'évènement « Julien connaît la réponse », E l'évènement « la réponse est exacte ».

Rappel de notation : pour un évènement A donné, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. a) Julien répond à une question du Q.C.M.
   Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

   b) Démontrer que : $p(E) = \frac{2}{3}$.

   c) Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.

2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien à ce Q.C.M.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

   b) Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q.C.M. ?

   c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre à ce Q.C.M. ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Au 1er janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires.

1. On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1er janvier de l'année $2000+n$ (n entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire.
   La matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.
   a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.
   b) Calculer l'état probabiliste P_1.
   c) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
2. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.
   c) Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1. c.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe 1, est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente à cette courbe au point de coordonnées $(0;2)$.
On appelle α la valeur de la variable x pour laquelle f admet un maximum noté M : $M = f(\alpha)$ (la valeur de α n'est pas demandée).
On précise que $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$ sont des nombres entiers.

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

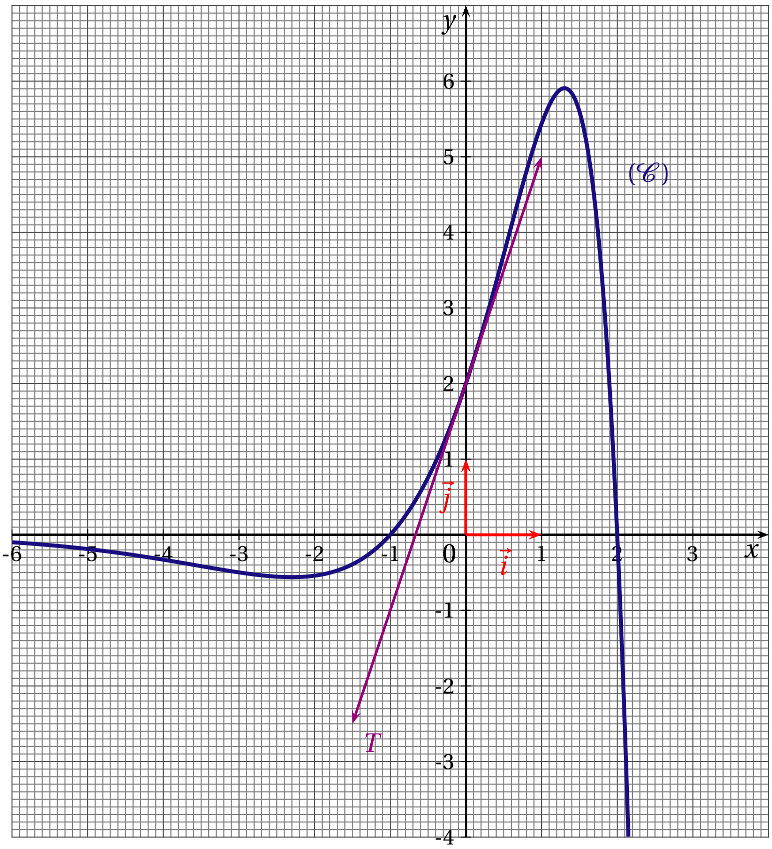
1. f' désigne la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f'(0)$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x sur l'intervalle $[-6;2]$.
2. Soit g la fonction définie pour tout x de l'intervalle $[0;2[$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$ et g' sa fonction dérivée.
   a) En utilisant notamment des résultats obtenus par lecture graphique de la courbe $(\mathscr{C})$, dresser le tableau de variations de g et déterminer la limite de g en 2.
   b) Déterminer $g'(0)$.

PARTIE B

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, F' désigne la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer à l'aide du graphique $F'(-1)$ et $F'(2)$.
2. On admet qu'il est possible de trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $F(x) = \left(ax^2 + bx - 1\right)\text{e}^x$.
   a) Exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de a et b.
   b) En utilisant les résultats trouvés à la question 1 de la **partie B**, démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,
   $$F(x) = \left(-x^2 + 3x - 1\right)\text{e}^x$$
   c) Calculer $F(2) - F(-1)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

ANNEXE 1


y
x
(𝒞)
T
0
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

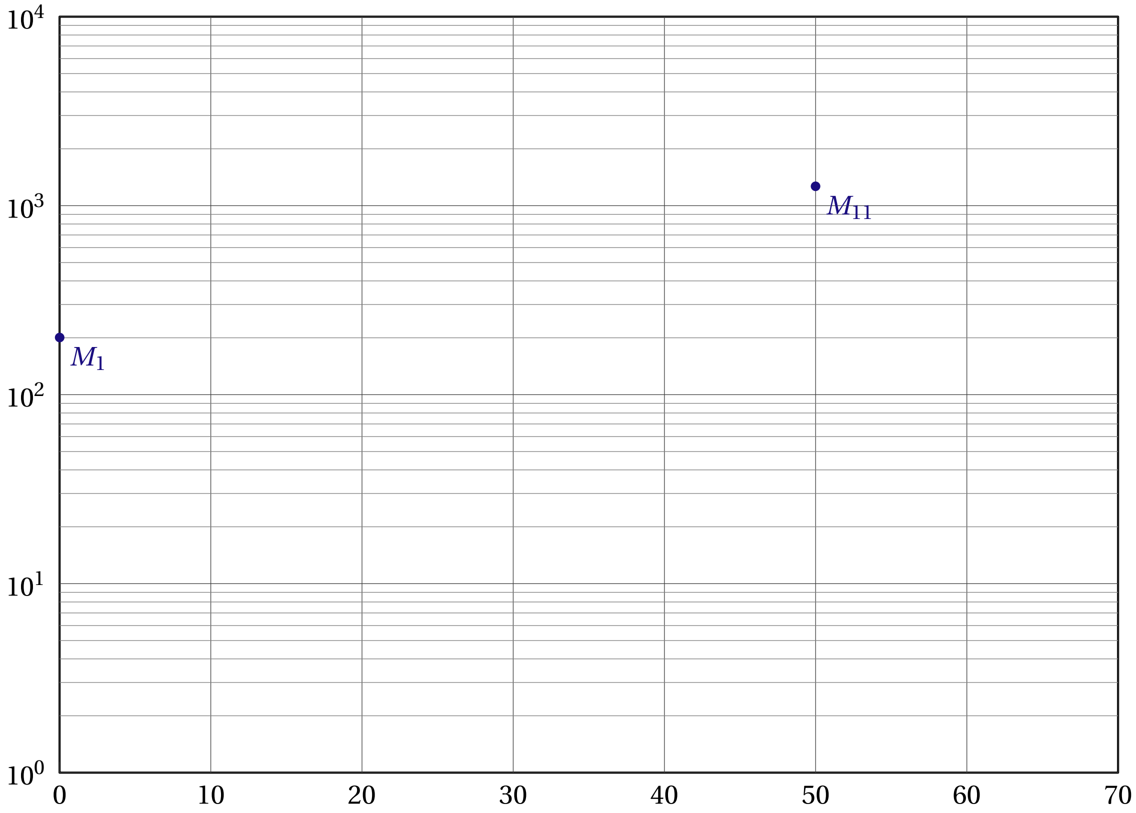
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 à 2000.
On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 à 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.
y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1er janvier de l'année X_i.

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1079	1267

Source : INSEE, bilan démographique. Champ : France métropolitaine.

1. Estimation à l'aide d'un graphique semi-logarithmique
   a) Compléter le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ associé à cette série statistique dans le repère semi-logarithmique fourni en annexe 2.
   b) Construire sur ce graphique la droite passant par les points $M_1(0;201)$ et $M_{11}(50;1\,267)$ et justifier que l'ajustement du nuage à l'aide de cette droite est satisfaisant.
   c) En supposant que cet ajustement affine reste pertinent, déterminer graphiquement à partir de quelle année le nombre de personnes âgées de plus de 85 ans dépassera 2 millions.
2. La forme du nuage obtenu avec la représentation logarithmique invite à chercher un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$.
   a) Compléter la dernière ligne du tableau fourni en annexe. Arrondir les résultats au millième.
   b) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au millième.
   c) En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$. (Le réel A sera arrondi à l'unité et le réel B au millième)
3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $[0;70]$ par : $f(x) = 200\mathrm{e}^{0,037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.
   a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2000$ et interpréter ce résultat.
   b) Calculer la valeur décimale approchée arrondie au millième de $\dfrac{1}{50}\displaystyle\int_0^{50} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Que représente ce résultat pour la population étudiée ?

ANNEXE 2



X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1079	1267
$z_i = \ln y_i$											

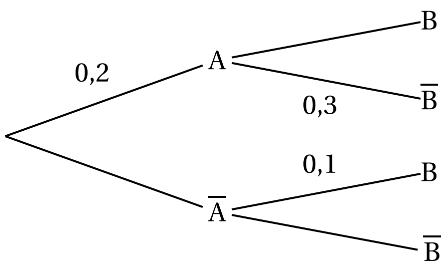
ANTILLES GUYANE 2005

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la bonne affirmation sans justifier votre choix.

Barème : À chaque question et attribué un certain nombre de points. Une réponse inexacte enlève la moitié des points affectés. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

<table>
<tr>
<td>QUESTION 1
Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.
<table>
<tr><td></td><td>Cadres</td><td>Employés</td></tr>
<tr><td>Hommes</td><td></td><td>25</td></tr>
<tr><td>Femmes</td><td>8</td><td>15</td></tr>
</table>
On interroge une personne au hasard;
la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :</td>
<td>$\dfrac{2}{15}$</td>
<td>$\dfrac{2}{5}$</td>
<td>$\dfrac{8}{23}$</td>
</tr>
<tr>
<td>QUESTION 2
Une loi de probabilité d'espérance μ, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessous.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr>
</table>
On a alors :</td>
<td>$V = \dfrac{5}{4}$</td>
<td>$\mu = 2$</td>
<td>$\sigma = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$</td>
</tr>
<tr>
<td>QUESTION 3
Soient C et D deux évènements indépendants.
On donne $P(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{3}$ et $P(\mathrm{D}) = \dfrac{1}{12}$.
On a alors :</td>
<td>$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{C}) = \dfrac{5}{12}$</td>
<td>$P(\mathrm{C} \cup \mathrm{D}) = \dfrac{7}{18}$</td>
<td>$P_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{36}$</td>
</tr>
<tr>
<td>QUESTION 4
On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite.
La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :</td>
<td>$\dfrac{1}{4}$</td>
<td>$\dfrac{15}{16}$</td>
<td>$\dfrac{1}{16}$</td>
</tr>
<tr>
<td>QUESTION 5
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux évènements, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ leurs évènements contraires.


Alors on a :</td>
<td>$P(\mathrm{B}) = 0{,}22$</td>
<td>$P\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right) = 0{,}8$</td>
<td>$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = 0{,}7$</td>
</tr>
</table>

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Soit f une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant; on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

x	$+\infty$		-3			-1			1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$		‖		$-$	0	$+$	
variations de $f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$\cdots$	‖	$+\infty$	↘	2	↗	$\cdots$

On admet que f est définie sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$ par : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a : $a=1$, $b=-1$, $c=4$.
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.
4. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet comme asymptote la droite D d'équation $y=x-1$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote D.
5. Déterminer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 [f(x)-(x-1)]\,\mathrm{d}x$ et interpréter le résultat en terme d'aire.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.
On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.
Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$\text{(R) Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right).$$

On suppose que $P_0 = 40000$ et $P_1 = 60000$.
On définit l'accroissement de la population pendant la n-ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

   a) Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   Exprimer U_n en fonction de n.

   b) En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$. En déduire que, pour tout n, on a : $V_n = P_1 - \frac{1}{2}P_0$.
   Calculer V_n.

   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $P_n = 2\left(V_n - U_n\right)$.
   En déduire une expression de P_n en fonction de n.

   d) Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.
   Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

EXERCICE 3 (10 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production $C(x)$ d'un engrais en fonction de la masse x produite.
Le tableau ci-dessous donne les valeurs x_i de masse d'engrais produite et celles $y_i = C(x_i)$ des coûts totaux de production correspondants pour i entier variant de 1 à 5.

x_i en tonnes	10	12	14	16	18
y_i en centaines d'euros	100	110	145	196	308

PARTIE A

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une tonne sur l'axe des abscisses et 0,05 cm pour une centaine d'euros sur l'axe des ordonnées.)
2. On recherche une fonction définie sur l'intervalle $[10 ; 18]$ dont la courbe représentative « ajuste » de façon acceptable le nuage de points.
   Une fonction f est dite « acceptée » si, pour les cinq valeurs x_i du tableau, on a : $-10 \leqslant f(x_i) - C(x_i) \leqslant 10$.
   a) Soit f la fonction définie sur $[10 ; 18]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{0,3x} + 80$.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs sont arrondies à 10^{-2}).
   La fonction f est-elle « acceptée » ?

x_i	10	12	14	16	18
$f(x_i)$					
$f(x_i) - C(x_i)$					

   b) Étudier les variations de f sur $[10 ; 18]$ et tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.

PARTIE B : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[10 ; 18]$ par $g(x) = (0,3x - 1)\mathrm{e}^{0,3x} - 80$.

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
   Montrer que, pour tout x de $[10 ; 18]$, on a : $g'(x) = 0,09x\mathrm{e}^{0,3x}$.
   En déduire le sens de variations de g sur $[10 ; 18]$.
2. Établir le tableau de variations de g sur l'intervalle $[10 ; 18]$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[10 ; 18]$ et donner un encadrement de α à 10^{-1}.
   En déduire le signe de $g(x)$ sur $[10 ; 18]$.

PARTIE C

Le coût moyen de production d'une tonne en fonction de la masse x produite est exprimé en centaines d'euros par : $C_m(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A** et $x \in [10 ; 18]$.

1. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m.
   Calculer $C'_m(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[10 ; 18]$.
2. Déduire à l'aide de la **partie B** le sens de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[10 ; 18]$.
3. Pour quelle production, en tonnes, a-t-on un coût moyen minimal ?
   Quel est ce coût à un euro près par défaut ?

ANTILLES SEPTEMBRE 2005

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

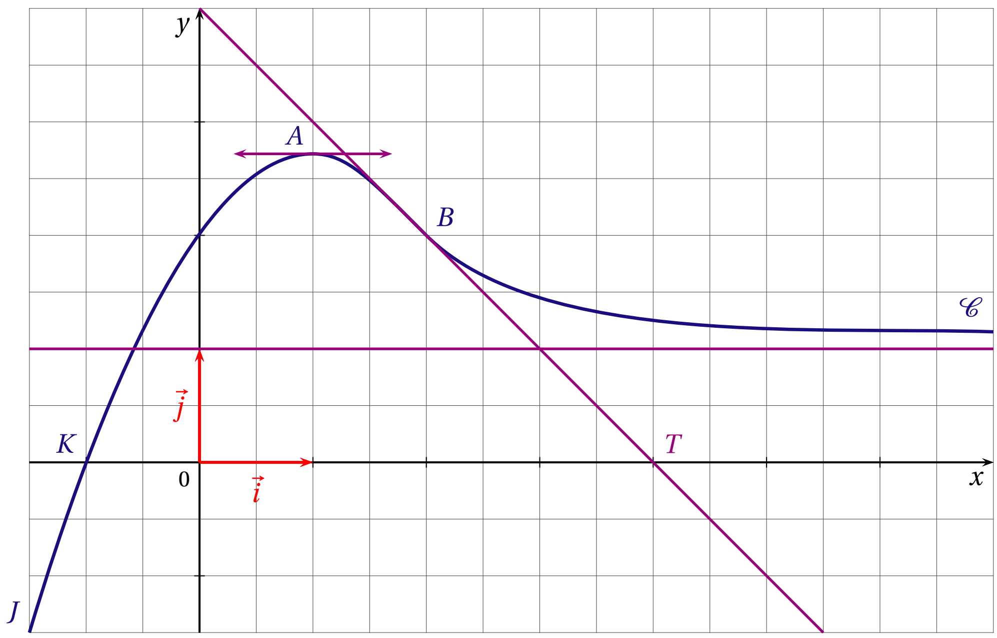
— Les points $J\left(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{3}{2}\right)$, $K(-1;0)$, $A(1;\mathrm{e})$ et $B(2;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;

— La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.

— La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4;0)$.

— La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

— La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.



1. a) Donner les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.

   b) Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ et Γ sa représentation graphique.

   a) Déterminer l'intervalle I de définition de g. Calculer les limites de g en -1 et en $+\infty$.
   En déduire les asymptotes à la courbe Γ en précisant une équation pour chacune d'elles.

   b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.

   c) Déterminer $g(2)$ et $g'(2)$, puis une équation de la tangente à Γ au point B' d'abscisse 2.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans cet exercice, A et B étant des évènements, $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A, $P(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

Une entreprise fabrique des appareils en grand nombre. Une étude statistique a permis de constater que 10 % des appareils fabriqués sont défectueux.
L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de ces appareils avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 80 % des appareils défectueux, mais il élimine également à tort 10 % des appareils non défectueux. Les appareils non éliminés sont alors mis en vente.
On prend au hasard un appareil fabriqué et on note D l'évènement « l'appareil est défectueux » et V l'évènement « l'appareil est mis en vente ».

1. Construire un arbre pondéré rendant compte de cette situation.
2. a) Calculer $P(V \cap D)$ et $P\left(V \cap \overline{D}\right)$.
   En déduire que la probabilité qu'un appareil fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,83.

   b) Calculer la probabilité qu'un appareil mis en vente après contrôle soit défectueux.

   c) Vérifier que $P_V(D) \approx 0,24 \times P(D)$.
   Rédiger une phrase comparant les probabilités pour un acheteur d'acquérir un appareil défectueux suivant que l'entreprise applique ou non le test de contrôle.
3. Une entreprise décide d'appliquer le contrôle, tout en continuant à fabriquer le même nombre d'appareils. Elle fabriquait et vendait une quantité q_0 d'appareils au prix p_0.
   Les pourcentages demandés seront arrondis à l'unité.

   a) Quelle est, en fonction de q_0 la nouvelle quantité q_1 d'appareils mis en vente après contrôle ?

   b) De quel pourcentage la quantité vendue a-t-elle diminué ?

   c) Quel doit être le nouveau prix p_1 (en fonction de p_0 pour que l'entreprise maintienne son chiffre d'affaires ?
   Quel est alors le pourcentage d'augmentation du prix de vente ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Sur un marché où seul un produit A était présent, un nouveau produit B est mis en vente à partir de l'année 2003. Une enquête a montré que :

— la probabilité qu'un client de A, une année donnée, reste fidèle à A l'année suivante est 0,67 ;

— la probabilité qu'un client de B, une année donnée, choisisse A l'année suivante est 0,27.

On suppose que la clientèle totale pour les deux produits ne change pas. On prend un client au hasard l'année $(2002+n)$.
Notations :

— On appelle A l'état « acheter le produit A » ;

— On appelle B l'état « acheter le produit B » ;

— On note a_n la probabilité que ce client achète A pendant l'année $(2002+n)$.

— On note b_n la probabilité que ce client achète B pendant l'année $(2002+n)$.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   La matrice M de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets du graphe dans l'ordre A puis B, est donc : $M = \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}27 & 0{,}73 \end{pmatrix}$.
2. On appelle $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice décrivant l'état probabiliste de la clientèle l'année $(2002+n)$
   a) Donner la relation matricielle liant l'état P_1 à l'état P_0. Calculer P_1 et traduire ce résultat par une phrase.
   b) Calculer et traduire de même l'état P_2.
3. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire que, pour tout entier n, on a :
   $$a_{n+1} = 0{,}67a_n + 0{,}27b_n \quad \text{puis} \quad a_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}27.$$
   b) On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}45$ pour tout entier n. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   c) Exprimer u_n puis a_n et b_n en fonction de n.
4. a) Quelles sont les limites respectives a et b des suites (a_n) et (b_n). Exprimer ces résultats en termes de répartition sur le marché des produits A et B.
   b) On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Vérifier que $P = P \times M$.
   Que représente l'état P ? Dépend-il de l'état initial P_0 ?

EXERCICE 3 (10 points) *commun à tous les candidats*

Un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q_i présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i, en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

t_i (heures)	0	2	4	6	8
q_i (mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

PARTIE A

Modélisation par une fonction affine

Le nuage de points associé à la série $\left(t_i; q_i\right)$ est représenté dans le repère orthogonal ci-dessous.

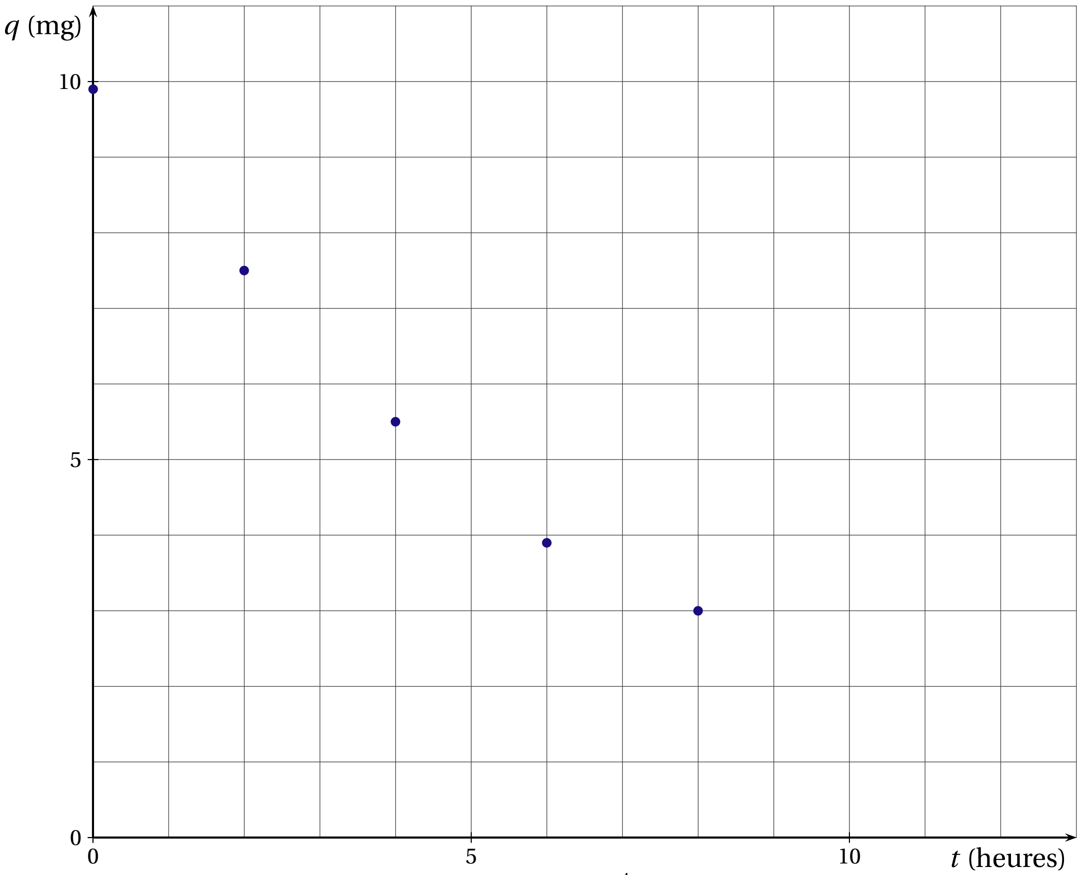


FIGURE 1

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite D d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-2}) ; tracer la droite D sur la figure 1.
2. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures ? Qu'en pensez-vous ?

PARTIE B

Recherche d'un modèle mieux adapté

1. Représenter dans le repère semi-logarithmique ci-dessous le nuage de point associé à la série $\left(t_i\ ;\ q_i\right)$. Quel type d'ajustement l'allure de cette représentation permet-elle d'envisager ?
2. On pose $y_i = \ln q_i$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (valeurs arrondies au centième).

t_i (heures)	0	2	4	6	8
y_i (mg)					

3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis au centième).
4. Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme $q = a\mathrm{e}^{-bt}$ où a est arrondi à l'unité et b au centième.
5. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0;15]$ par : $f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure 1.
6. On suppose que ce nouveau modèle reste valable pendant 12 heures. Calculer à 10^{-1} près la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures. Placer le point correspondant sur le graphique.

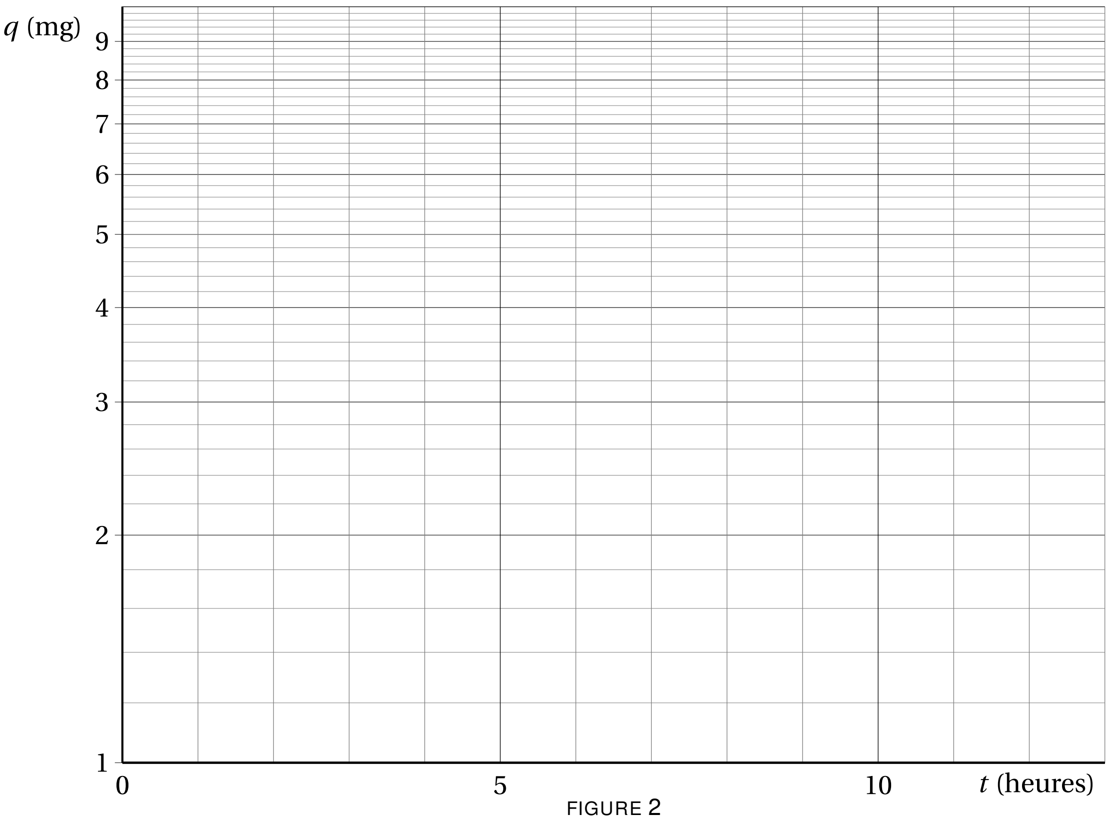


FIGURE 2

PARTIE C

1. Calculer $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$. Interpréter le résultat par une phrase concernant le pourcentage de variation de la quantité de médicament présente dans le sang.
2. Le médicament reste efficace tant que la quantité présente dans le sang reste supérieure à 2 mg.
   Déterminer graphiquement, à 1 heure près par défaut, la durée d'efficacité de l'injection.
3. Calculer, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de médicament présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

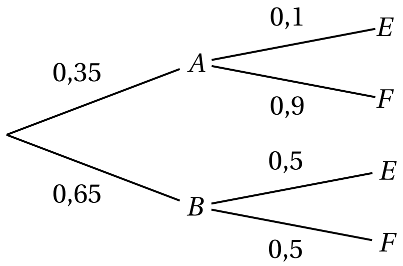
ASIE 2005

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Pour chaque question, une seule réponse **a**, **b**, **c**, *ou* **d**, *est exacte.*
Indiquer sur la copie la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève, aucun point.*
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

Les trois arbres donnés ci-dessous représentent des situations probabilistes. Les nombres indiqués sur les différentes flèches sont des probabilités, et, en deuxième niveau, des probabilités conditionnelles. Ainsi pour l'arbre donné dans la question 1 : $0{,}35 = P(A)$ et $0{,}1 = P_A(E)$.

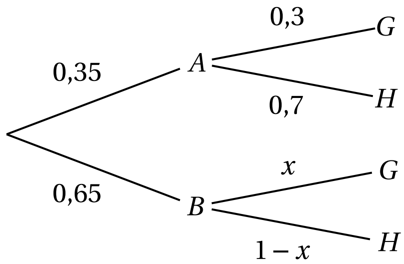
QUESTION 1



La probabilité de l'évènement E est égale à :

a. 0,5 **b.** 0,1 **c.** 0,6 **d.** 0,36

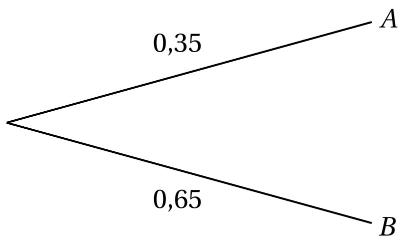
QUESTION 2



Les évènements A et G étant supposés indépendants, x est égal à :

a. 0,35 **b.** 0,1 **c.** 0,3 **d.** 0,36

QUESTION 3



Ici la situation probabiliste est associée à une expérience aléatoire schématisée par l'arbre ci-contre. Cette expérience aléatoire est répétée quatre fois de façon indépendante.
La probabilité d'obtenir au moins une fois l'évènement A est égale à :

a. 0,35 **b.** 0,82149375 **c.** 0,17850625 **d.** 0,01500625

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

PARTIE A

Soit la fonction f définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{20}{1+15\text{e}^{-0,4x}}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

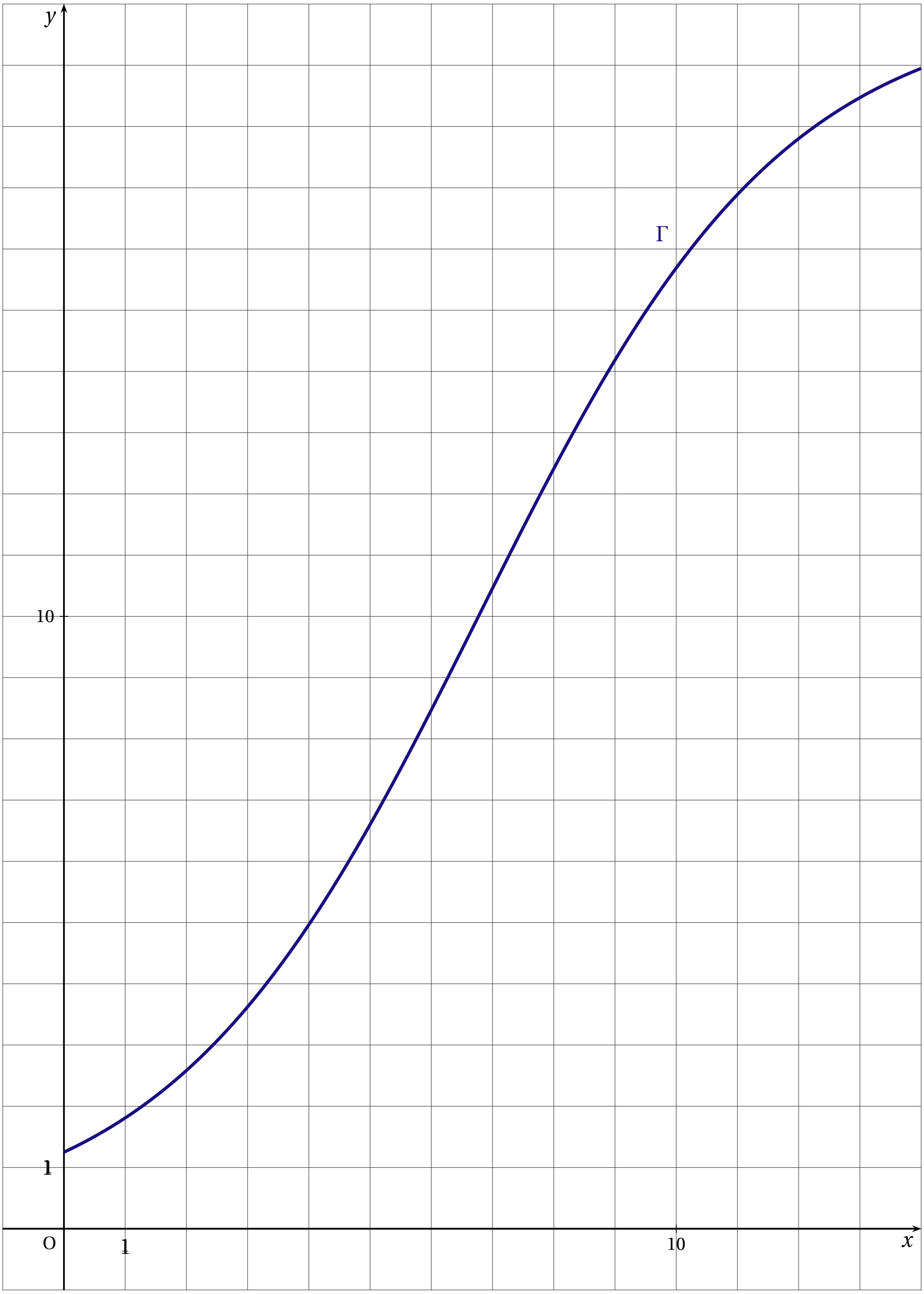
PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $[0;14]$ la fonction coût total de production, en euro, d'un produit. Sa représentation graphique sur cet intervalle, notée Γ, est donnée en **ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)**.
Pour une quantité de produit q, exprimée en tonnes et comprise entre 0 et 14, on pose donc : $f(q) = \dfrac{20}{1+15\text{e}^{-0,4q}}$.
Pour tout q dans l'intervalle $[0;14]$, le quotient $\dfrac{f(q)}{q}$ est appelé coût moyen de production de q tonnes de produit.

1. Pour q dans l'intervalle $[0;14]$, soit Q le point d'abscisse q de la représentation graphique Γ de la fonction f.
   Montrer que le coefficient directeur de la droite (OQ) est égal au coût moyen $\dfrac{f(q)}{q}$.
2. L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production.
   Par lecture graphique indiquer la valeur de q qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie



EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule : $C(x,y) = 2x + 0{,}5y^2 + 4$.
L'annexe 1 (à rendre avec la copie) comporte deux figures.

— La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x;y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $O \leqslant y \leqslant 12$.

— La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

PARTIE 1

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapportera 0,5 *point. Une mauvaise réponse sera pénalisée de* 0,25 *point. Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera* 0.
Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x;y)$?

   a. $M(13;9;60)$ **b.** $N(12;4;40)$ **c.** $R(12;8;60)$ **d.** $S(15;4;40)$

2. La courbe de niveau $z = 20$ est :

   a. une parabole **b.** une droite **c.** une hyperbole **d.** autre réponse

PARTIE 2

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple :
   Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?
2. Cas général :
   Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal achetées.
   Montrer que x et y sont liés par la relation $x + 2y = 22$.
3. a) Tracer sur la figure 2 de l'annexe 1 l'ensemble des points dont l'équation est $x + 2y = 22$.
   b) En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités.correspondantes de métaux A et B achetées.

ANNEXE 1

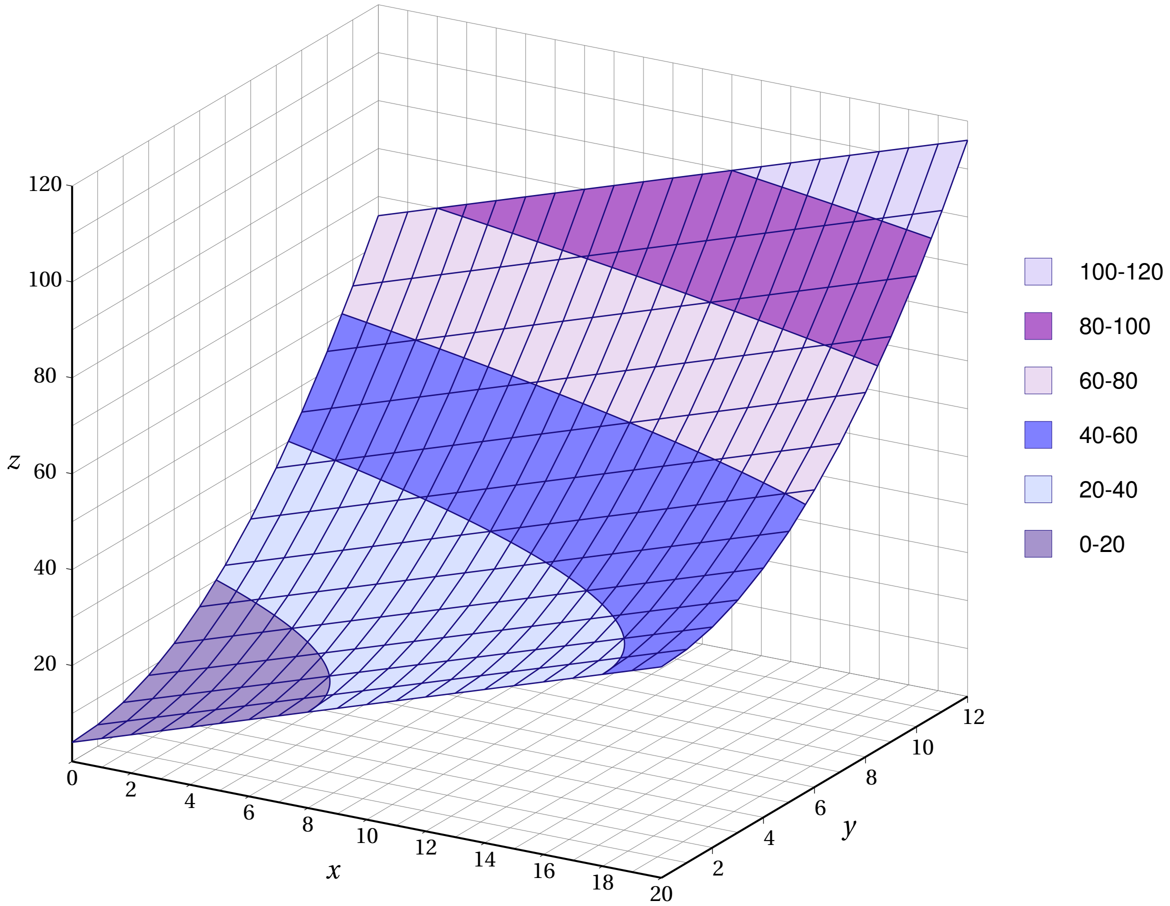


Figure 1 : surface d'équation $z = C(x; y)$

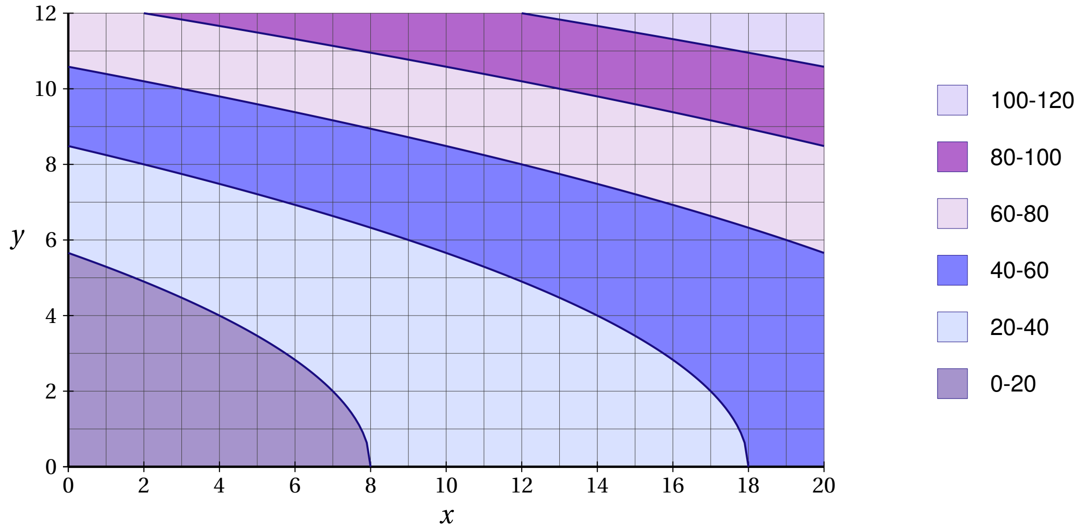


Figure 2 : courbes de niveau

EXERCICE 3 (3 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 ci-dessous, représente la fonction f'. Laquelle ?

   Justifier votre réponse.

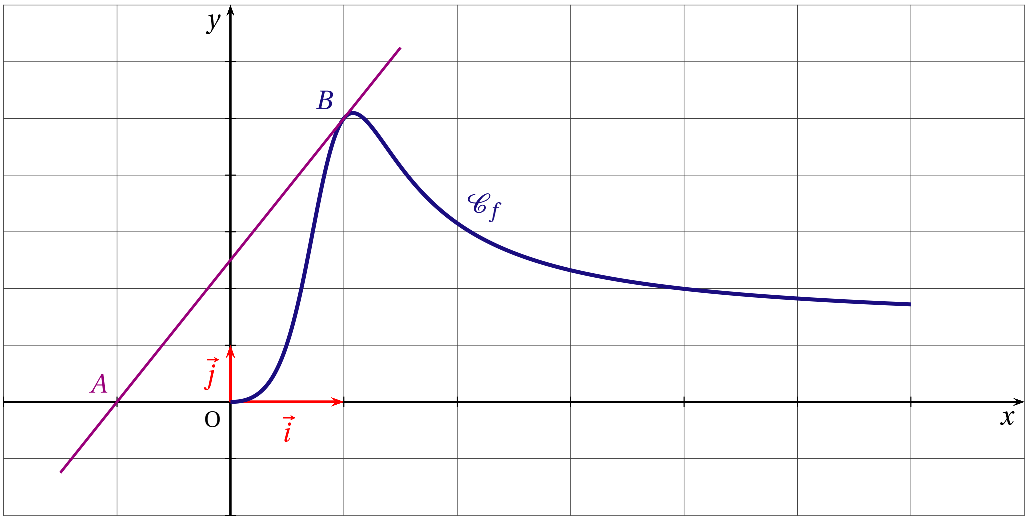


Figure 1

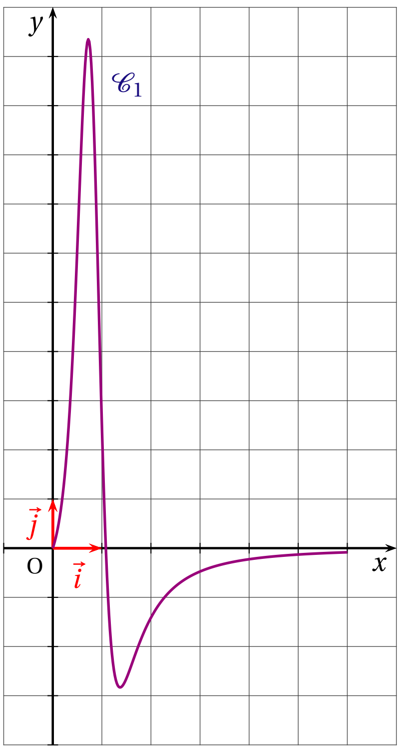


Figure 2

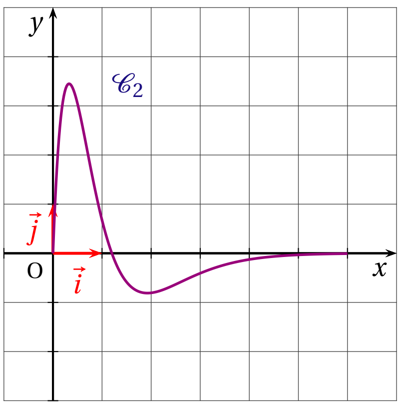
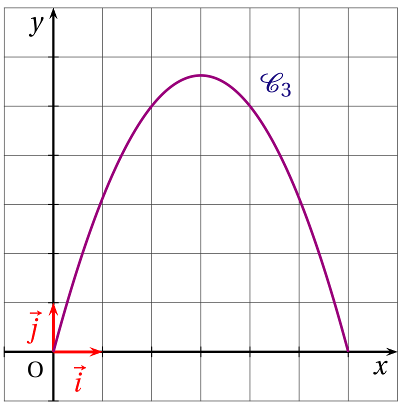


Figure 3



EXERCICE 4 (9 points) *commun à tous les candidats*

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution du prix d'une matière première.
On ne fera qu'un seul graphique qui sera complété tout au long des questions.

PARTIE A

le tableau suivant donne le prix d'une tonne de matière première en milliers d'euros au 1er janvier de chaque année :

Année	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	6,48	5,74	5,19	5,01

1. Sur la copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$, le plan étant rapporté a un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un millier d'euros sur l'axe des ordonnées).
2. Dans cette question, on envisage un ajustement affine pour modéliser l'évolution du prix de cette matière première.
   a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, et la tracer sur le graphique précédent (les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats seront donnés à 10^{-3} près).
   b) En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les années suivantes, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?

PARTIE B

En fait, à partir de l'année 2001, le prix d'une tonne de cette matière première commence à remonter, comme le montre le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	3	4	5	6
Prix d'une tonne en milliers d'euro y_i	5,01	5,10	5,20	5,52

1. Placer sur le graphique de la partie A les points associés à ce 2e tableau.
2. On désire trouver une fonction qui modélise l'évolution de ce prix sur la période 1998–2008.
   Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout x de l'intervalle $[0;11]$ par $f(x) = x+10-5\ln(x+2)$.
   On admet que la fonction f est dérivable sur cet intervalle, et on notera f' sa fonction dérivée.
   a) Donner un tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs de x entières comprises entre 0 et 11. Les valeurs de la fonction seront arrondies à 10^{-2}.
   b) Calculer $f'(x)$, puis étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.
   Dresser son tableau de variations. Les valeurs des extremums seront données à 10^{-2} près.
   c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f sur le graphique de la partie A.
3. On admet que la fonction f modélise l'évolution du prix de cette matière première sur la période 1998–2008.
   a) Selon ce modèle, quel serait le prix d'une tonne de matière première au 1er janvier 2005 ?
   b) Déterminer en quelle année le prix d'une tonne de matière première retrouvera sa valeur de 1998.

CENTRES ÉTRANGERS 2005

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans explication.
Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES
1. La fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}x + \ln 2$ a pour dérivée :	☐ $x \longmapsto \mathrm{e}x$ ☐ $x \longmapsto \mathrm{e}x + \dfrac{1}{2}$ ☐ $x \longmapsto \mathrm{e}$
2. La fonction $x \longmapsto \ln(3x) + \ln 3$ a pour dérivée :	☐ $x \longmapsto \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3}$ ☐ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ ☐ $x \longmapsto \dfrac{1}{3x}$
3. Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x+3}$ est :	☐ $x \longmapsto -2\mathrm{e}^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x+3}$ ☐ $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}$
4. Dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$ possède :	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
5. Dans $]0; +\infty[$, l'équation : $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$ possède :	☐ 2 solutions ☐ 1 solution ☐ 0 solution
6. Dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1{,}1^{x} = 2{,}2$ a pour solution le nombre :	☐ 2 ☐ $\ln 2$ ☐ $\dfrac{\ln 2{,}2}{\ln 1{,}1}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».
Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».
Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

— La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma »est égale à $\frac{1}{2}$.

— La probabilité que Pierre réponde correctement une question du thème « Musique »est égale à $\frac{3}{4}$.

On considère les évènements suivants :

C : la question porte sur le thème « Cinéma »,

M : la question porte sur le thème « Musique. »,

E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   « La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement ».
2. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à $\frac{2}{3}$.
3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée; quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma »?

(*Certaines de ces réponses pourront être justifiées à l'aide d'un arbre de probabilités*)

DEUXIÈME PARTIE

En fait le jeu se déroule de la façon suivante :
On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.
Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.
À chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs »et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

— 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,

— 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :

f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,

$g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \text{A où A désigne la matrice } \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que : pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0{,}5 f_n + 0{,}1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0{,}2$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$.
   d) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

Sur la figure ci-dessous on donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 définies et dérivables sur $[0;3]$.

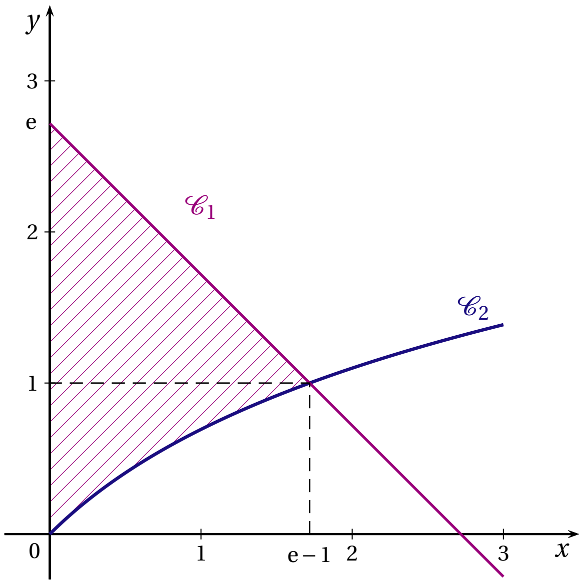


Figure 1

1. L'une des deux courbes représentées ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0;3]$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

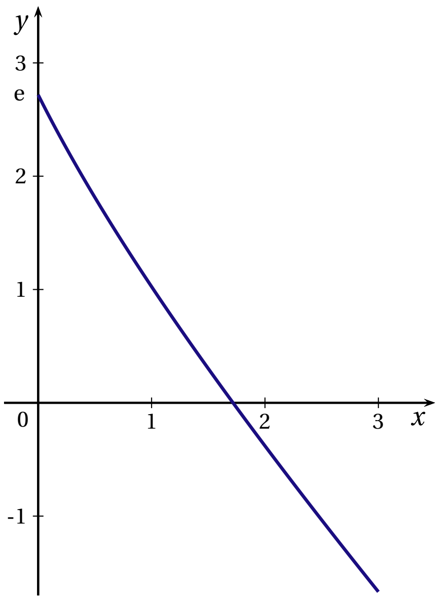


Figure 2

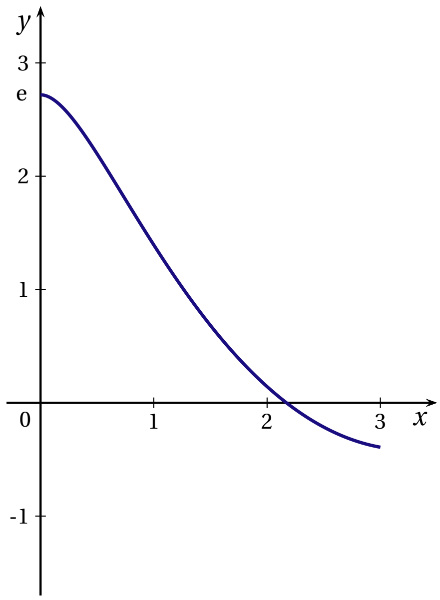


Figure 3

Laquelle de ces deux courbes ne peut pas convenir?

2. a) Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.

   b) Donner le tableau de signes de la fonction f' dérivée de f sur l'intervalle $[0;3]$.

3. On note F une primitive de f sur $[0;3]$. Indiquer les variations de F sur l'intervalle $[0;3]$.

4. L'une des trois fonctions représentées ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction F.

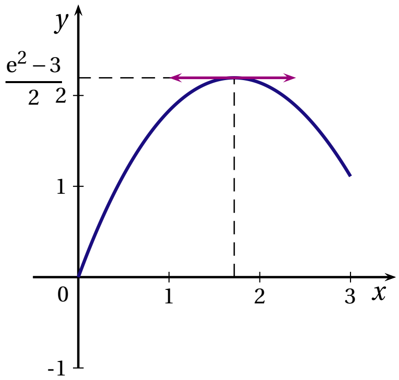


Figure 4

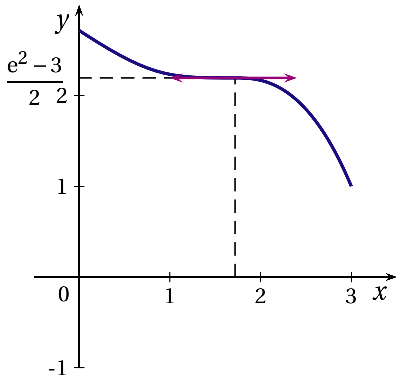


Figure 5

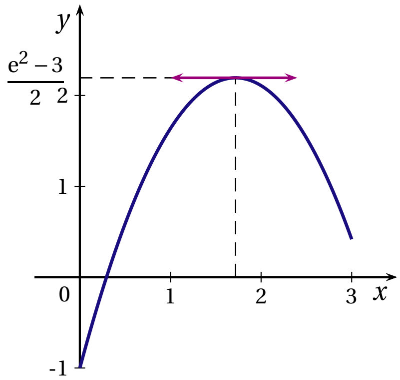


Figure 6

Justifier que les courbes représentées sur les figures 5 et 6 ne peuvent pas convenir.

5. Donner la valeur exacte de $\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.
6. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré sur la figure 1.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Un club sportif a été créé en 1998 ; à l'origine le nombre d'adhérents était égal à 600.

PREMIÈRE PARTIE : Étude du nombre d'adhérents de 1998 à 2004

On donne, dans le tableau ci-dessous, le nombre d'adhérents de 1998 à 2003 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'adhérents y_i	600	690	794	913	1,045	1,207

On pose $Y_i = \ln\left(y_i\right)$ et on réalise un ajustement affine par la méthode des moindres carrés du nuage de points $(x_i ; Y_i)$.
Une équation de la droite d'ajustement de Y par rapport à x est $Y = 0{,}14x + 6{,}397$.
En utilisant cet ajustement :

1. Déterminer une prévision du nombre d'adhérents en 2004.
2. Justifier les affirmations suivantes :
   a) $y_i = 600 \times 1{,}15^{x_i}$; 600 a été arrondi à l'unité, 1,15 a été arrondi au centième.
   b) De 1998 à 2004, on peut considérer que le nombre d'adhérents a augmenté de 15 % par an.

DEUXIÈME PARTIE : Étude du nombre d'adhérents à partir de l'année 2004

En fait le club a compté 2 400 adhérents lors de l'année 2004.
On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3\,600}{1+0{,}5\text{e}^{-x}}$.
On suppose que le nombre d'adhérents en $(2004 + n)$ est égal à $f(n)$, où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.
2. On se propose de calculer le nombre moyen d'adhérents M de 2005 à 2009
   a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

Année	2005	2006	2007	2008	2009
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3 040				

Les valeurs de $f(n)$ seront arrondies à l'unité

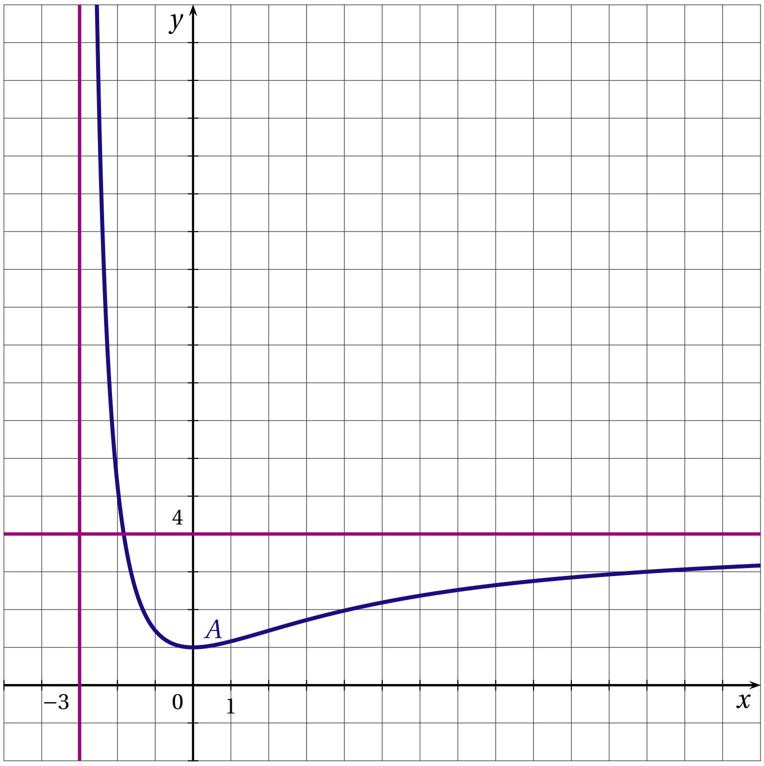
   b) Calculer la valeur de M, moyenne du nombre prévisionnel d'adhérents entre 2005 et 2009 (le résultat sera arrondi à l'unité).
3. On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = 3\,600 \ln\left(\text{e}^x + 0{,}5\right)$.
   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.
   b) Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[0{,}5 ; 5{,}5]$.
   On pourra constater que les valeurs M et μ sont proches.

FRANCE MÉTROPOLITAINE JUIN 2005

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

On sait que le point A de coordonnées $(0;1)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C})$ et que la fonction f admet un minimum pour $x=0$. En outre, les droites d'équations respectives $y=4$ et $x=-3$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.



Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est :	☐ $+\infty$ ☐ -3 ☐ 4
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.	☐ $f'(0) = 1$ ☐ $f'(1) = 0$ ☐ $f'(0) = 0$
3. L'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A est :	☐ $y = 1$ ☐ $y = x$ ☐ $y = 0$
4. Sur l'intervalle $]-3;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$:	☐ n'admet aucune solution ☐ admet comme solution unique : $x = 0$ ☐ admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1;2[$

Dans les deux questions suivantes, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par $g = \ln \circ f$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

5. Si $x = 0$, alors :	☐ on ne peut pas calculer $g(x)$ ☐ $g(x) = 1$ ☐ $g(x) = 0$
6. On peut affirmer que sur l'intervalle $]-3;+\infty[$:	☐ g a les mêmes variations que la fonction ln ☐ g a les mêmes variations que la fonction f ☐ g a les variations inverses de celles de la fonction f

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2 229	2 285	2 340	2 394	2 449

(Source : *CARMF* mai 2004)

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.
2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$ dans un repère orthogonal :
   — sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;
   — sur l'axe des ordonnées, on placera 2 200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 euros.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
   Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite (D) dans le repère précédent.
4. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?
5. En fait le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2 555 euros et le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3 % par an.
   Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.
Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

— le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;

— du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

PARTIE A : Étude théorique

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année $2005+n$.
Ainsi, $u_0 = 100000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4000$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 80000$.
   a) Calculer v_0.
   b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 180000 \times (1{,}05)^n - 80000$.
   d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la partie A.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

FORMULAIRE

SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $a \in \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + a$, $u_n = u_0 + na$.

Suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison $b \in \mathbb{R}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = bu_n$, $u_n = u_0 b^n$.

Somme de termes :

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

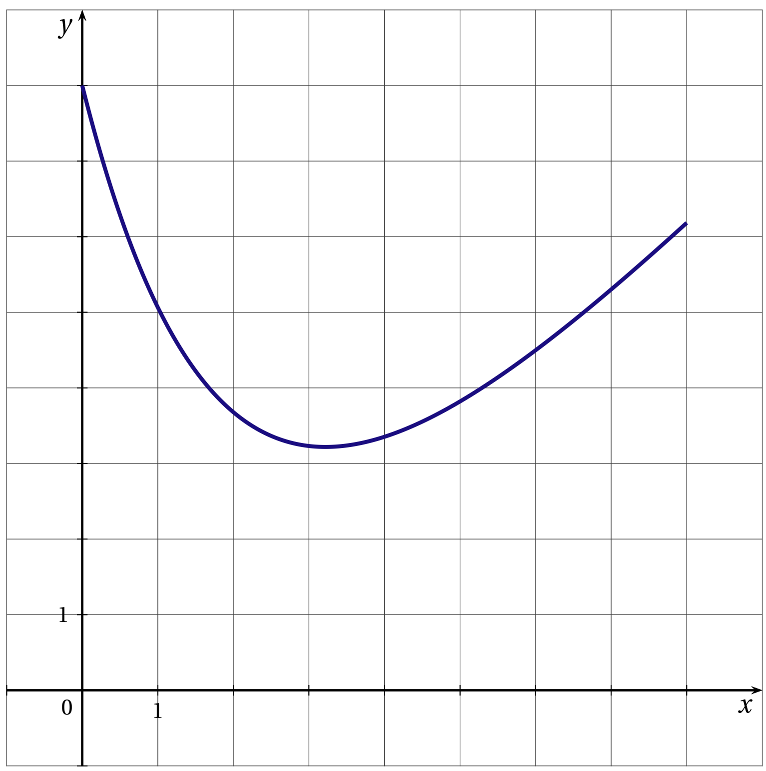
Si $b \neq 1$ alors $1+b+b^2+\cdots+b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

EXERCICE 3 (7 points) *commun à tous les candidats*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + 10\mathrm{e}^{-0,5x}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et (D) la droite d'équation $y = x - 2$. La courbe $(\mathscr{C})$ est partiellement représentée en annexe ci-dessous.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On pose $\alpha = 2\ln 5$.
   a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.
   a) Calculer $f'(x)$,pour tout x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur cet intervalle.
4. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$ et que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x) - (x-2) > 0$.
   Donner l'interprétation graphique de ces résultats.
5. Sur le graphique donné en annexe (*à rendre avec la copie*) :
   a) placer le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse α ;
   b) tracer la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse α ;
   c) tracer la droite (D).
6. On note $\mathscr{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine E délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 6$.
   a) Hachurer sur le graphique, donné en annexe, le domaine E, puis exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.
   b) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur arrondie au centième.

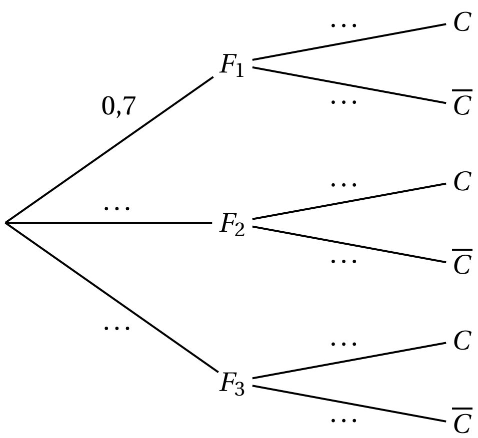
ANNEXE



EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre »ou « hors calibre ».
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.
On appellera F_1 l'évènement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »
F_2 l'évènement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »
F_3 l'évènement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »
C l'évènement : « la pomme prélevée a un bon calibre »
$\overline{C}$ l'évènement : « la pomme prélevée est hors calibre ».
Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des évènements F_2 et F_3.
2. Recopier sur votre copie et compléter l'arbre suivant :



3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,144 0.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,846 5.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :

   « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ».

   Quel calcul permet de justifier cette affirmation ?

   Faire ce calcul et conclure.

FRANCE MÉTROPOLITAINE SEPTEMBRE 2005

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit X selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

— x_i désigne le prix de vente unitaire (en euros) du produit X;

— y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 4 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).
2. On recherche un ajustement affine de la série $\left(x_i\,;\,y_i\right)$.
   a) Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième; on ne demande aucune justification.
   b) Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.
   c) Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 euros.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Parmi les stands de jeux d'une fête de village, les organisateurs ont installé une machine qui lance automatiquement une bille d'acier lorsque le joueur actionne un bouton.
Cette bille roule sur un plan comportant une cible circulaire évidée en son centre. Lorsque la bille atteint la cible, soit elle est avalée, soit elle reste sur la cible.
Lorsque la bille n'atteint pas la cible elle revient à son point de départ.
Dans la suite de l'exercice, on notera :

C l'évènement « la cible est atteinte » ;

B l'évènement « la bille est avalée ».

Une étude préliminaire a démontré que :

— la probabilité d'atteindre la cible lors d'un lancer est égale à 0,3 ;

— lorsque la cible a été atteinte, la probabilité que la bille soit avalée est égale à 0,2.

1. Traduire la situation aléatoire ci-dessus par un arbre de probabilité.
2. On actionne le bouton.
   a) Calculer la probabilité P_1 que la bille soit avalée.
   b) Calculer la probabilité P_2 qu'elle reste sur la cible.

   Une partie se déroule selon la règle ci-dessous.
   Pour jouer, on paie 0,50 euro et on actionne le bouton qui lance la bille :

   — si la bille est avalée, on gagne un lot d'une valeur de g euros ;

   — si la bille reste sur la cible sans être avalée, on est remboursé ;

   — si la bille rate la cible, on perd la mise.

3. Déterminer complètement la loi de probabilité de gain d'un joueur : on recopiera et on complétera le tableau ci-dessous ; aucune justification n'est demandée.

Gain	$-0,50$	0	$g-0,50$
Probabilité			

4. a) Montrer que l'espérance de gain d'un joueur en fonction de g est :

$$\text{E} = 0,06g - 0,38.$$

   b) On prévoit qu'un grand nombre de parties seront jouées.
   Pour quelles valeurs de g les organisateurs peuvent-ils espérer un bénéfice ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :

— si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux;

— si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1. a) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

   b) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2. Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

   Donner la matrice ligne P_1 exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

3. On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix}0{,}287\,45 & 0{,}712\,55\\ 0{,}285\,02 & 0{,}714\,98\end{pmatrix}$

   a) Calculer le produit P_0M^5. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

   b) Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

4. Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

EXERCICE 3 (8 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

L'objet de cet exercice est l'étude de deux fonctions intervenant dans un modèle économique.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ donnée en annexe (*à rendre avec la copie*) est la représentation graphique, dans un repère orthogonal du plan, de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-0,7x+2,1}$.
De même, la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle $[0;5]$ par : $g(x) = 0,5x + 0,7$.
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0;5]$.

1. On appelle h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0;5]$.
   b) Étudier le signe de $h'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;5]$. En déduire que la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.
   c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près (on ne demande pas de justification sur la méthode d'obtention de cette valeur).
   d) Déduire de l'étude précédente les valeurs arrondies à 10^{-2} des coordonnées du point d'intersection F de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et $\left(\mathscr{C}_g\right)$.
2. Dans la suite du problème, on prendra $\alpha = 2,17$ et $f(\alpha) = g(\alpha) = 1,79$.
   a) Soient les points $C\left(0; f(\alpha)\right)$ et $E(\alpha;0)$. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire du rectangle $OCFE$ exprimée en unités d'aire.
   b) Interpréter graphiquement le nombre $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de α et en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

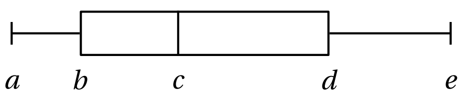
La fonction f définie dans la partie A représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix.
La fonction g définie dans la partie A est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$ exprimé en milliers d'euros et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.
On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note p_0 le prix d'équilibre et q_0 la quantité échangée sur le marché à ce prix.
Dans la situation étudiée on a donc : $f\left(q_0\right) = g\left(q_0\right)$.

1. Déduire des résultats donnés dans la partie A les valeurs de q_0 et de p_0.
2. Tous les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher (au-dessus du prix p_0) réalisent une économie. Le montant économisé par les consommateurs, appelé surplus des consommateurs, vaut par définition $\displaystyle\int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0 \times q_0$. Il s'exprime ici en milliers d'euros.
   a) Sur le graphique de l'annexe :
      — indiquer les valeurs q_0 et p_0 sur les axes de coordonnées ;
      — hachurer le domaine dont l'aire s'écrit : $\displaystyle\int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0 \times q_0$.
   b) Calculer, en milliers d'euros, le surplus des consommateurs.

ANNEXE

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule réponse est exacte. On demande de cocher cette réponse.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES
1. La courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet pour tangente au point d'abscisse 1, la droite d'équation :	☐ $y = x+1$ ☐ $y = x-1$ ☐ $y = x+\mathrm{e}$
2. La représentation graphique de la fonction exponentielle admet pour asymptote :	☐ la droite d'équation $y = x$ ☐ l'axe des abscisses ☐ l'axe des ordonnées
3. La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \ln(2x+4)$ est une primitive sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ de la fonction g définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par :	☐ $g(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{2}{x+2}$ ☐ $g(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{x+2}$ ☐ $g(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2x+4}$
4. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$ est égale à :	☐ $-0,5$ ☐ 0 ☐ 0,5
5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+3x-1}{(2x-1)^3}$ est égale à :	☐ 1 ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{4}$
6. Le diagramme en boîte ci-dessous résume une série statistique dont la médiane est :  	☐ $\dfrac{1}{2}(a+e)$ ☐ $\dfrac{1}{2}(b+d)$ ☐ c
7. La droite des moindres carrés associée à une série statistique à deux variables passe par le point moyen du nuage :	☐ jamais ☐ dans certains cas seulement ☐ toujours
8. Selon l'INSEE les prix à la consommation ont augmenté de 8,9 % du 1er janvier 1998 au 31 décembre 2003. Si le taux d'évolution des prix d'une année à la suivante était fixe de 1998 à 2003, et égal à t %, la valeur de t arrondie à 10^{-2} qui donnerait la même augmentation des prix à la fin de l'année 2003, serait égale à :	☐ 1,48 % ☐ 1,72 % ☐ 1,43 %

LIBAN 2005

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

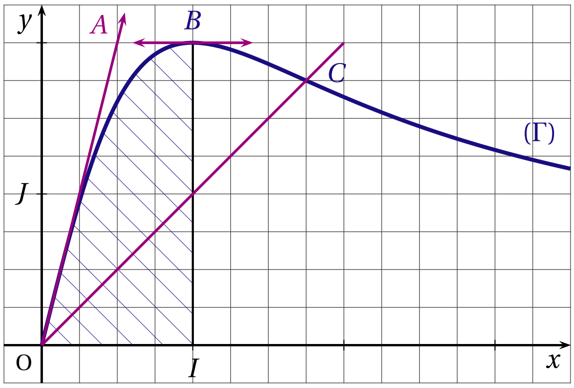
Dans un repère orthonormal du plan $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0;3,5]$.

— I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$;

— C est le point de (Γ) situé sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$;

— (OA) est la tangente en O à (Γ) ;

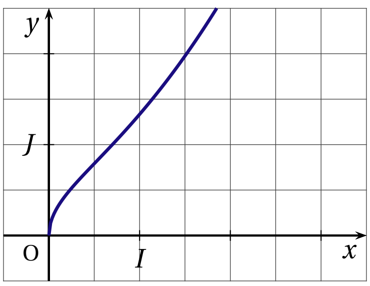
— $\mathscr{S}$ est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



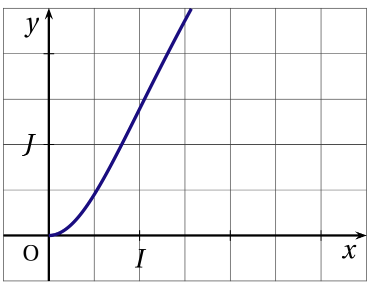
1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a) Quel est le tableau de variations de g sur $[0;3,5]$?
   b) Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g'(1)$?
   c) Quelles sont les coordonnées du point C ?
   d) Résoudre l'inéquation $g(x)\geqslant x$ sur $[0;3,5]$.
2. Définir la surface $\mathscr{S}$ par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de $\mathscr{S}$ d'amplitude 2cm^2.

   Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule : $\mathscr{A}=\dfrac{(B+b)\times h}{2}$ *où B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.*
3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.

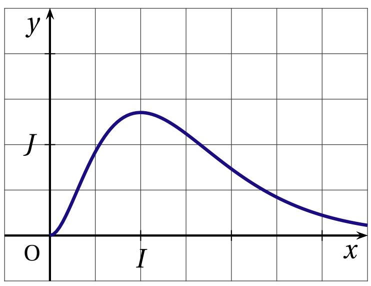
Courbe n° 1



Courbe n° 2



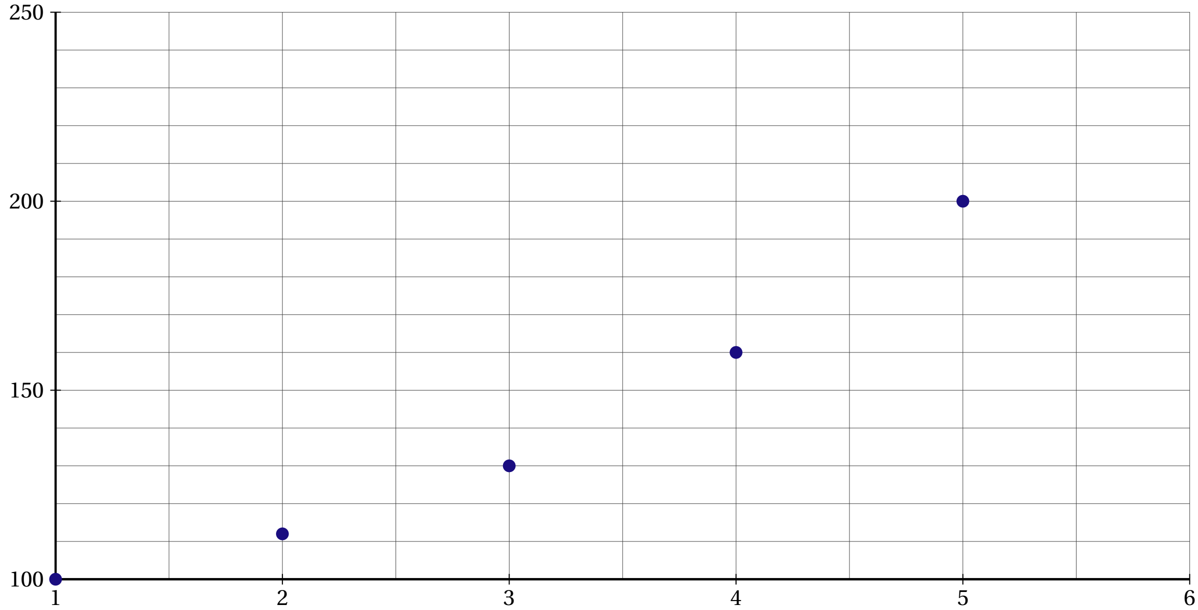
Courbe n° 3



EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un fournisseur d'accès à internet, souhaite faire une prévision du nombre de ses abonnés pour l'année 2005, il établit un relevé du nombre des abonnés des années 2000 à 2004.
Il affecte l'indice 100 à l'année 2000 pour établir la statistique des abonnés et consigne les données sur le tableau et le graphique ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	20003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200



PARTIE A

1. Le nombre d'abonnés était de 2040 pour l'année 2000, de combien est-il pour l'année 2004 ?
2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004 ?
3. Quelle est l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ?
4. Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour les années 2005 et 2010 ?
   On arrondira à l'entier le plus proche.

PARTIE B

Le fournisseur décide d'utiliser un changement de variable pour obtenir un autre ajustement, il crée un nouveau tableau en posant $Y = \ln(y)$.

1. Recopier et compléter le tableau. *On donnera des valeurs approchées à* 10^{-2}.

x_i	1	2	3	4	5
$Y_i = \ln y_i$					

2. Dans le plan muni d'un repère, construire le nuage de points de coordonnées $(x_i ; Y_i)$ et la droite de régression de Y en x donnée par l'équation : $Y = 0{,}17x + 4{,}39$.
3. Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i de l'année.
4. En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour les années 2005 et 2010.

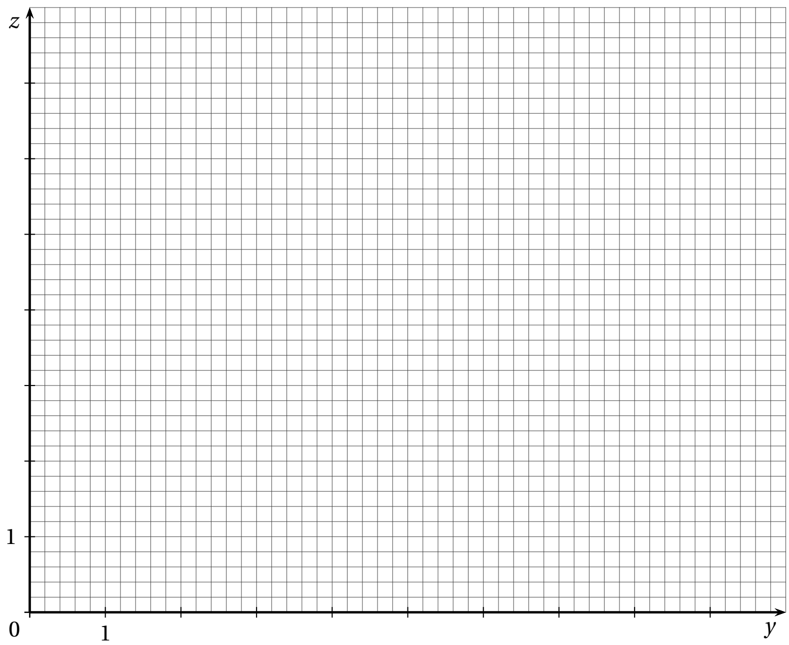
EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy) avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'abscisse 2.

   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz) sur la figure 1.

Figure 1

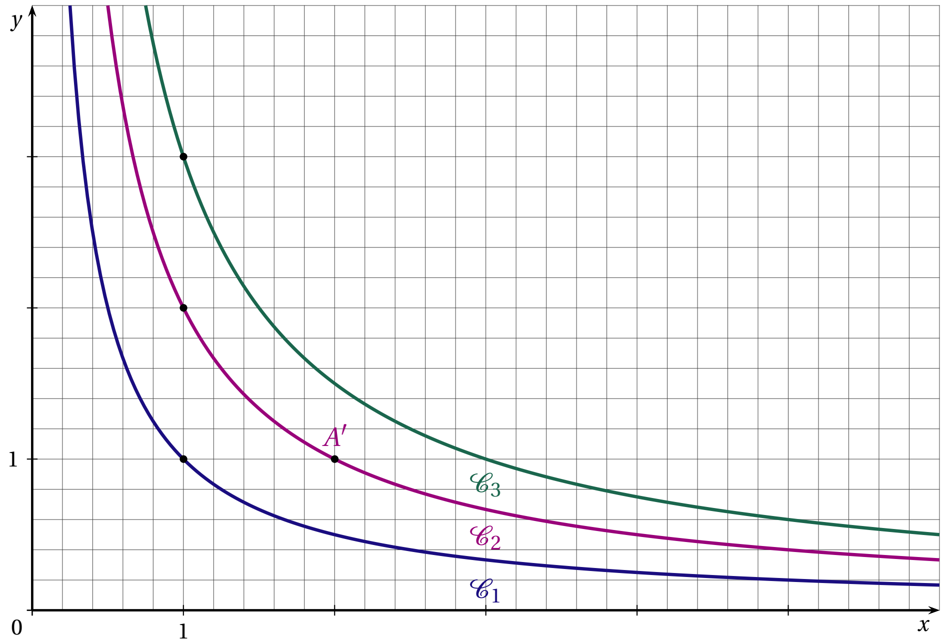


2. a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?

   b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
3. Sur la figure 2 sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k.

   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

Figure 2



4. Le point A' représenté sur la courbe $\mathscr{C}_2$ de la figure 2 est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $A(x;y;z)$, de la surface $\mathscr{S}$.

   a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

   b) Préciser les coordonnées du point A'', projeté orthogonal de A dans le plan (xOy), puis placer ce point A'' sur la figure 1.

5. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+6y-z-6=0$.

   a) Montrer que le point A appartient au plan $\mathscr{P}$.

   b) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.

   c) Démontrer que l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes. On pourra utiliser la factorisation $x+2y-xy-2=(x-2)(1-y)$.

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

TABLEAU D'INFORMATIONS N° 1

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $u'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Le tableau d'informations n° 1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.
2. On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln[u(x)]$ et $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ où u désigne la fonction de la question précédente.
   a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :

      Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;

      Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».

   b) Donner les variations des fonctions f et g. Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).

   c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)$

   d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 1$.
3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

TABLEAU D'INFORMATIONS N° 2

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

a) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :

• à l'axe des abscisses	• à la droite d'équation $y = x$	• à la droite d'équation $y = 3x$

b) Le nombre $f'(-2)$:

• n'existe pas	• vaut -20	• vaut $-\frac{4}{5}$	• vaut $-\frac{5}{4}$	• vaut $\frac{5}{4}$

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On propose aux élèves, Quentin, Nicolas et Lucien de répondre à un Q.C.M. comportant quatre questions dont voici le barème et les instructions :
Pour chaque question, une seule des quatre propositions A, B, C ou D est exacte.
L'élève recopie sur sa feuille une grille de réponses présentée comme ci-dessous :

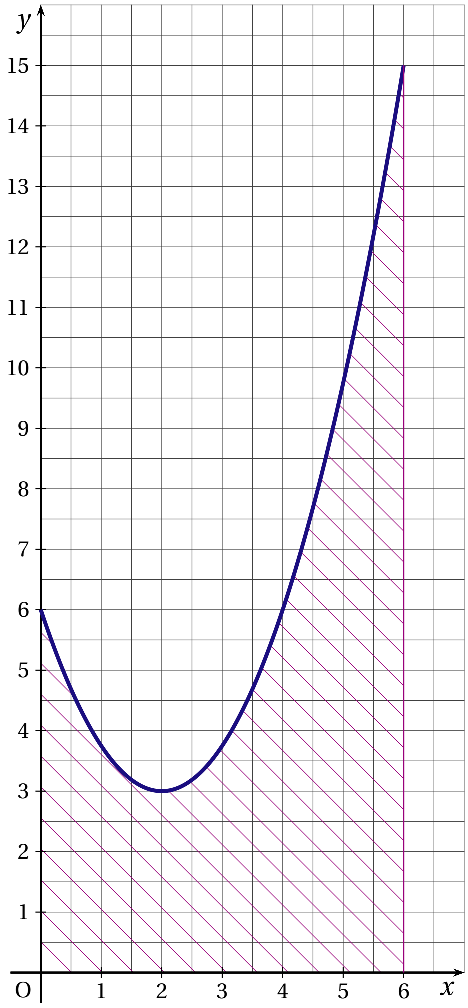
Question	Réponse : A, B, C, D
1	
2	
3	
4	

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
Les trois candidats répondent correctement à la première question.

1. Quentin choisit de ne pas répondre à la question n° 2 et de donner une réponse à chacune des deux dernières questions, en choisissant au hasard et de façon équiprobable, l'une des quatre réponses proposées.
   a) Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
   b) Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
   c) Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
   d) Quelle probabilité a-t-il de faire deux fautes ?
   e) Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité. En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
2. Nicolas adopte la stratégie de donner une réponse à chacune des trois dernières questions en choisissant au hasard et de façon équiprobable l'une des quatre réponses proposées.
   a) Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
   b) Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
   c) Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
   d) Quelle probabilité a-t-il de faire trois fautes ?
   e) Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité. En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
3. Lucien choisit de ne répondre à aucune des trois dernières questions.
   Classer les stratégies de Quentin, Nicolas et Lucien.

NOUVELLE CALÉDONIE 2005

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 6$$

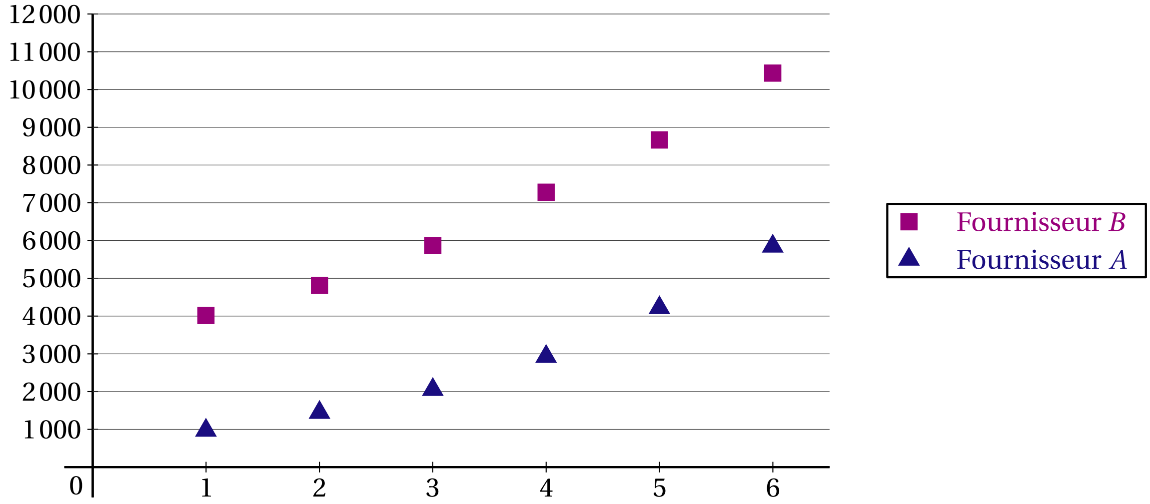
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan d'origine O.
La partie hachurée ci-contre est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0;6]$.
   La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$, $R(x) = 0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0;6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   a) Montrer que le problème précédent revient à résoudre l'équation $g(x) = 0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $g(x) = 0{,}75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$.
   b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;6]$ et dresser le tableau de variation de g.
   En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[0;6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans une ville, deux fournisseurs d'accès au réseau internet sont en concurrence.
Pour étudier l'évolution du nombre d'abonnés à ces deux fournisseurs A et B, on a reporté dans le tableau suivant, à la fin de chaque année, le nombre total d'abonnés déclaré par chacun des deux fournisseurs.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre total y_i d'abonnés par le fournisseur A	975	1 443	2 049	2 930	4 220	5 850
Nombre total t_i d'abonnés par le fournisseur B	4 012	4 813	5 872	7 281	8 664	10 432



1. Recopier les deux dernières lignes du tableau suivant en les complétant.
   On détaillera chacun des quatre calculs et on arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

	Augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004	Pourcentage **annuel moyen** d'augmentation du nombre d'abonnés entre 1999 et 2004
Fournisseur A	...	500 %	...%
Fournisseur B	6 420	...%	...%

2. a) L'allure du nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $Y_i = \ln(y_i)$.
   Écrire une équation de la droite (d) d'ajustement de Y en x par la méthode des moindres carrés.
   Les calculs seront faits avec la calculatrice (sans justification) et les résultats finaux seront arrondis au millième.

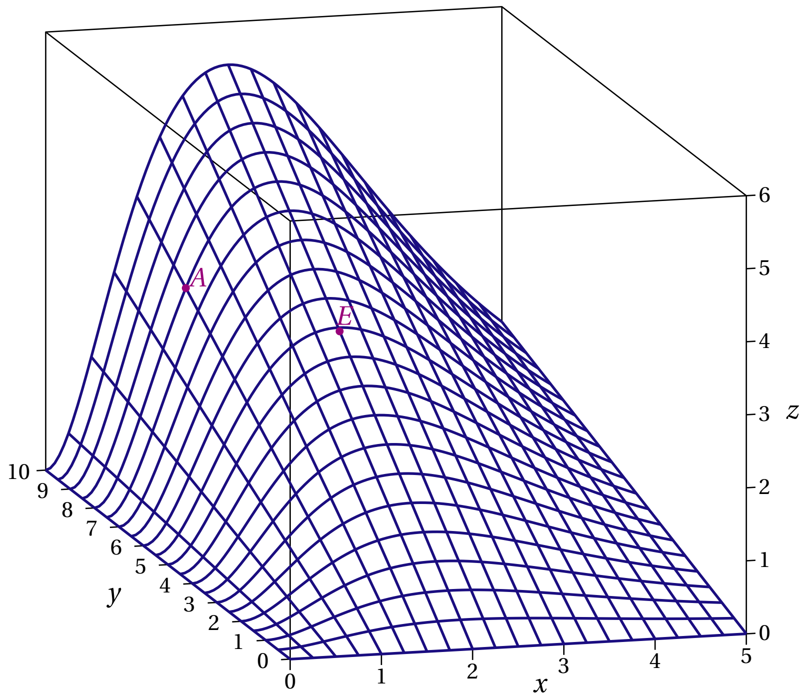
   b) En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur A en 2006.

3. L'allure du nuage de points associé à la série statistique $(x_i; t_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   En posant $T_i = \ln(t_i)$, on obtient, par la méthode des moindre carrés, une équation de la droite (Δ) d'ajustement de T en x sous la forme : $T = 0{,}193x + 8{,}102$ (ce résultat est admis).
   En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre d'abonnés au fournisseur B en 2006.

4. En supposant que les ajustements précédents restent pertinents, préciser l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés au fournisseur A dépassera le nombre d'abonnés au fournisseur B.
   Justifier.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.
On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités.
On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par $B(x;y) = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$.
Voici une vue de la surface (S) d'équation $z = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0;5]$ et y élément de l'intervalle $[0;10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.



1. Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0;5]$ et y appartient à l'intervalle $[0;10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
2. a) Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A.

   b) Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E.
3. Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier.

   Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0;10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.
4. Déterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

EXERCICE 3 (9 points) *commun à tous les candidats*

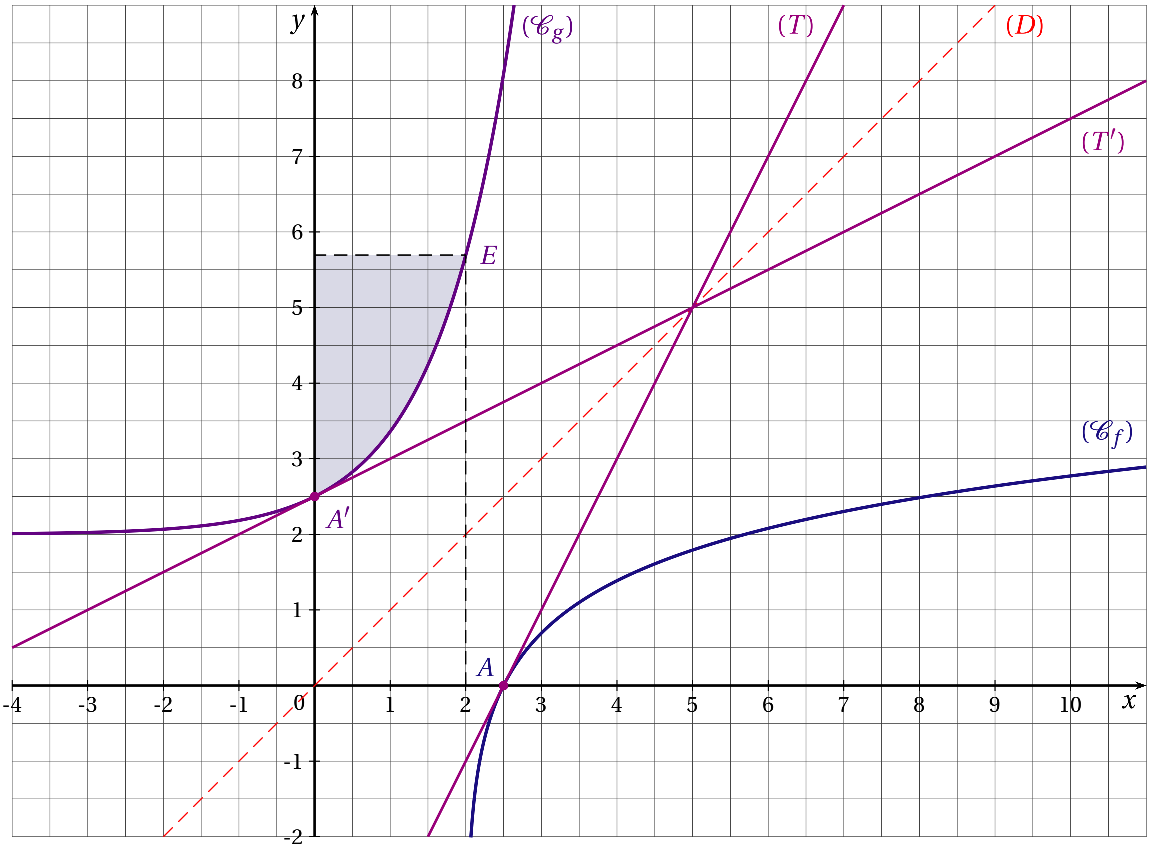
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(2x-4)$.
On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe tracée ci-dessous, représentative de f dans un repère orthonormal.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$?

   b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

   c) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point A. Quelles sont les coordonnées exactes de A ?

   d) Déterminer une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.



2. Sur la figure ci-dessus, on a tracé la courbe $(\mathscr{C}_f)$, le point A, la droite (T) et la droite (D) d'équation $y=x$.
   Par la symétrie axiale d'axe (D), la courbe $(\mathscr{C}_f)$ se transforme en une courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative d'une fonction g définie dans $\mathbb{R}$.
   On admet que, pour tout x réel, $g(x)$ s'écrit sous la forme $g(x)=a+b\mathrm{e}^x$ où a et b sont deux nombres réels.
   La courbe $(\mathscr{C}_g)$ ainsi construite passe par le point A' image de A par la symétrie d'axe (D).
   De plus, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ admet au point A' une tangente (T') qui est l'image de la droite (T) par la symétrie d'axe (D).

   a) Donner, sans justification, le coefficient directeur de la droite (T').

   b) Calculer a et b en justifiant soigneusement les calculs.

   c) Calculer l'ordonnée exacte du point E appartenant à $(\mathscr{C}_g)$ et ayant pour abscisse 2.

   d) Quelles sont les coordonnées du point E' image de E par la symétrie d'axe (D) ?

3. a) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2\left(2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

   b) En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine hachuré défini par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par E. On demande la valeur exacte du résultat.

   c) Expliquer comment on peut en déduire, sans faire de calculs, la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{5}{2}}^{2+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

POLYNÉSIE 2005

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 1999. Chaque année est identifiée par son rang.
À l'année 1999 est attribué le rang 0 et à l'année 1999 + n le rang n ainsi 2001 a le rang 2.
Le tableau ci-dessous indique pour chaque rang x_i d'année le bénéfice ou perte réalisé, exprimé en milliers d'euros et noté y_i.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	-25,000	-3,111	9,892	17,788	22,598	25,566

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction.
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{\left(-\frac{x}{2}+4\right)} + 30$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour 4 unités en ordonnées.

1. On considère que l'approximation des bénéfices par f est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées $f(x_i)$ est inférieure à 0,5.

   L'approximation par f est-elle satisfaisante ? (Le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question.)
2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote D dont on précisera l'équation.

   c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D.
3. a) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

   b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. a) En utilisant le modèle que constitue la fonction f, en quelle année le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera-t-il 29 800 euros ?

   b) Ce bénéfice atteindra-t-il 30 000 euros ? Justifier.
5. Construire $\mathscr{C}_f$, en faisant apparaître tous les éléments graphiques mis en évidence dans les questions précédentes.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.
10 % des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.
Un joueur tire un jeton au hasard.

— S'il est rouge, il remporte le gain de base.

— S'il est blanc, il remporte le carré du gain de base.

— S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

1. On suppose que le gain de base est 2 euros.

   a) Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.

   b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.

2. On cherche à déterminer la valeur g_0 du gain de base, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'euro.
   Soit x le gain de base en euros.

   a) Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$$

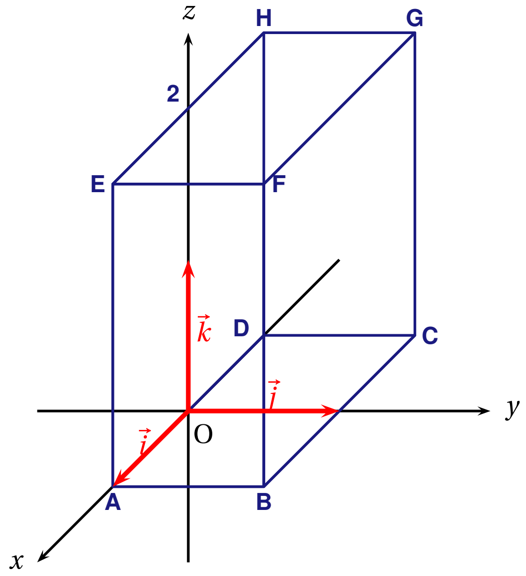
   b) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer $f'(x)$.

   c) En déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   d) Conclure sur le problème posé.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
La figure ci-dessous, représente un pavé droit; le point O est le milieu de $[AD]$.
Soit P le milieu du segment $[EF]$.



1. a) Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z = 2$?
   b) Déterminer une équation du plan (ABF).
   c) En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF).
2. a) Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?
   b) Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0;0,5;0)$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).
3. a) Construire sur la figure les segments $[PQ]$ et $[AG]$.
   b) Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.
4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples; pour chacune des quatre questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte; aucune justification n'est demandée sauf pour la question 4.

Barème des trois premières questions :

À chaque question est attribué 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

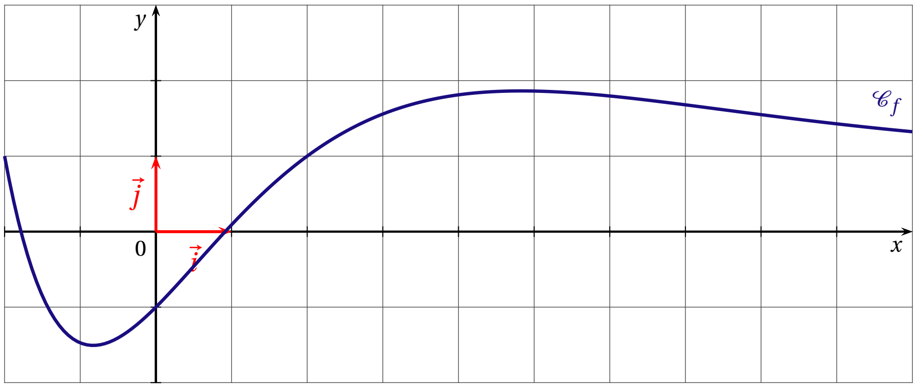
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

1. Soient A et B deux évènements. Il est possible que :
   - $p(A) = 0{,}8$ et $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}1$.
   - $p(A) = 0{,}7$ et $p(B) = 0{,}5$ et $p(A \cap B) = 0{,}2$.
   - $p(A) = 0{,}8$ et $p(B) = 0{,}9$ et $p(A \cap B) = -0{,}1$.
2. Soient A et B deux évènements indépendants tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}2$. Alors :
   - $p(A \cap B) = 0{,}5$.
   - Les informations précédentes ne suffisent pas à calculer $p(A \cap B)$.
   - $p(A \cap B) = 0{,}06$.
3. Si A et Bsont deux évènements incompatibles mais non impossibles, alors A et B sont indépendants.
   - Cette affirmation est vraie.
   - Cette affirmation est fausse.
   - On ne peut pas savoir.
4. On justifiera soigneusement la réponse à cette question.

   On répète quatre fois de manière indépendante une expérience aléatoire dont la probabilité de succès est 0,35. Alors la probabilité d'obtenir au moins un succès est :
   - environ 0,015.
   - environ 0,821.
   - environ 0,985.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5;5{,}43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.



1. a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.
   c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2;10]$.
2. a) Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
   c) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;5]$.

PONDICHÉRY 2005

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 1999. Chaque année est identifiée par son rang.
À l'année 1999 est attribué le rang 0 et à l'année 1999 + n le rang n ainsi 2001 a le rang 2.
Le tableau ci-dessous indique pour chaque rang x_i d'année le bénéfice ou perte réalisé, exprimé en milliers d'euros et noté y_i.
Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine.
L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.
Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).
Le gestionnaire a constaté que :

— 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien ;

— La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de Studio et par 55 % des locataires de deux-pièces ;

— 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.
Soit S l'évènement « Le résident a loué un studio »
A l'évènement « Le résident a souscrit la formule Simple »
B l'évènement « Le résident a souscrit la formule Confort »
R l'évènement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?
   b) Calculer $P_{\text{S}}(\text{B})$.
3. a) Calculer $P(\text{R} \cap \text{S})$; en déduire $P\left(\text{R} \cap \overline{\text{S}}\right)$.
   b) Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros. La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros.
   Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs L_i. On désigne par p_i, la probabilité que le coût de la semaine soit égal à L_i.
   a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12		0,21			0,12

   b) Calculer l'espérance de L. En donner une interprétation.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte sans justifier votre choix.
Barème : À chaque question est attribué 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit f la fonction définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x)=-2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est
   - $f(x)=-2x+1-\dfrac{2}{x-1}$
   - $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$
   - $f(x)=\dfrac{2x^2+9x-2}{x-4}$
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4;+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est
   - $f'(x)=-2-\dfrac{8}{(x-4)^2}$
   - $f'(x)=\dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$
   - $f'(x)=\dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$
3. La courbe Γ admet pour asymptote
   - la droite d'équation $y=4$
   - la droite d'équation $x=4$
   - la droite d'équation $y=4x$
4. La droite d'équation $y=-2x+1$ est
   - asymptote à la courbe Γ
   - située en dessous de la courbe Γ
   - tangente à la courbe Γ.
5. La fonction $x\longmapsto F(x)$ donnée par
   - $F(x)=-x^2+x+8(x-4)^2$
   - $F(x)=-x^2+x+8\ln(x-4)$
   - $F(x)=-x^2+x-8\ln(x-4)$

   est une primitive de f sur $]4;+\infty[$.

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.
2. En déduire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

PARTIE B : Utilisation des théorèmes de comparaisons

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

   On rappelle que la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est* $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre less années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement sur l'annexe jointe le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.
Cette annexe sera complétée au fur et à mesure des questions et rendue avec la copie.

PARTIE A : Un ajustement affine

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
   Tracer cette droite sur le graphique donné en annexe.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

PARTIE B : Un ajustement exponentiel

1. L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a\mathrm{e}^{bx}$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b tels que $f(0) = 18$ et $f(30) = 50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.
3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné en annexe.
4. La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

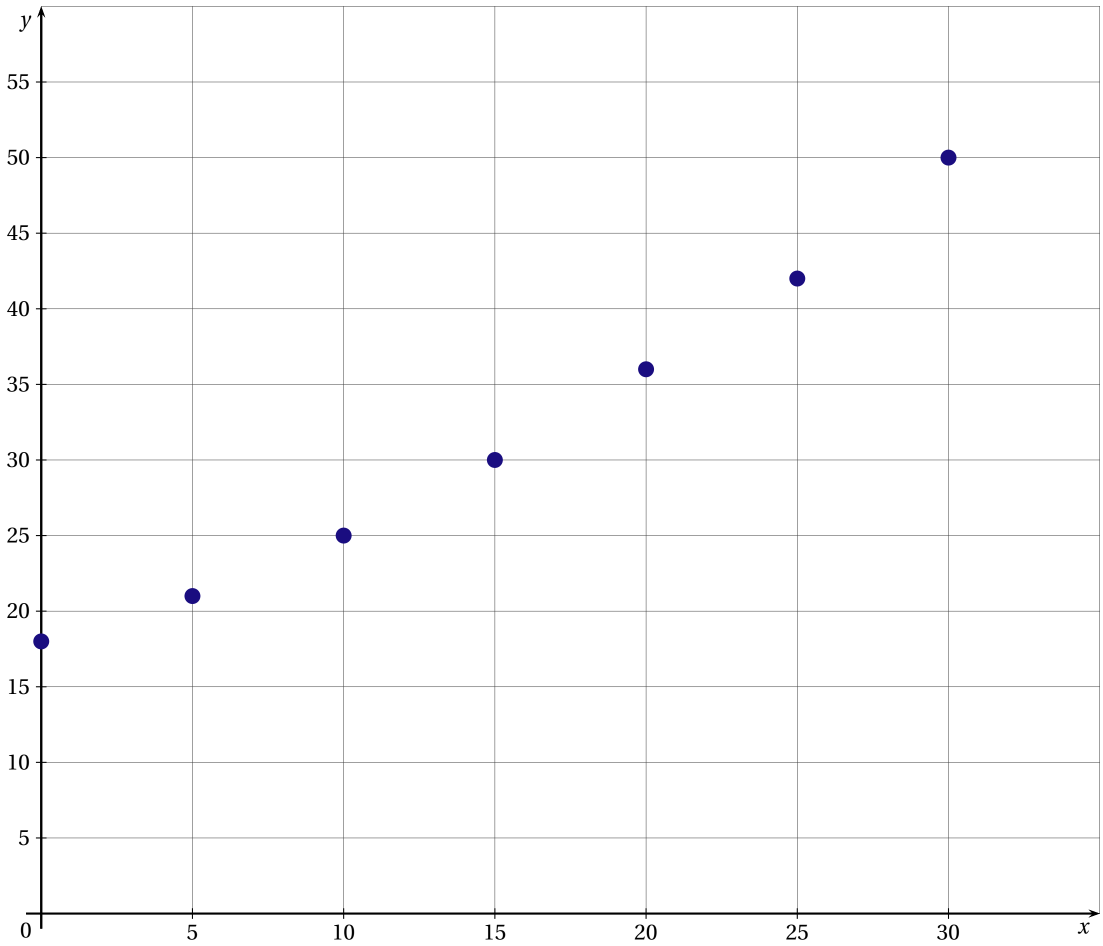
PARTIE C : Calcul d'une valeur moyenne

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par

$$f(x) = 18\mathrm{e}^{0,034x}$$

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0; 30]$; on donnera le résultat arrondi au dixième.
2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne ?

ANNEXE : à rendre avec la copie



LA RÉUNION 2005

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

— la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\dfrac{3}{5}$;

— la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\dfrac{7}{10}$;

— la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\dfrac{1}{10}$.

On désigne par T l'évènement : « la personne achète le téléviseur » et par L l'évènement : « la personne achète le lecteur de DVD ».
On notera $\overline{T}$ et $\overline{L}$ les évènements contraires respectifs de T et de L.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions) :
   a) « la personne achète les deux appareils »
   b) « la personne achète le lecteur de DVD »
   c) « la personne n'achète aucun des deux appareils ».
3. Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\dfrac{21}{23}$.
4. Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 €.
   Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15 % pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25 % pour l'achat des deux appareils.
   On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.
   a) Déterminer les valeurs possibles de D.
   b) Déterminer la loi de probabilité de D.
   c) Calculer l'espérance mathématique de D.
   d) Le responsable du rayon « image et son » prévoit qu'il se présentera dans la semaine 80 personnes intéressées par ces deux appareils.
   Quel chiffre d'affaires peut-il espérer effectuer sur la vente de ces deux appareils ?

EXERCICE 2 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note totale attribuée à l'exercice est* 0.

1. La population d'une commune rurale diminue de 2 % par an. Sa population aura diminué de moitié dans :

   A : 15 ans   **B** : 20 ans   **C** : 35 ans   **D** : 50 ans

2. Le prix d'un article augmente d'un certain pourcentage puis baisse immédiatement du même pourcentage. Finalement le prix de cet article :

   A : a augmenté   **B** : a baissé   **C** : n'a pas varié   **D** : on ne peut pas savoir

3. La population mondiale a doublé entre 1960 et 2000. Le taux d'accroissement moyen annuel a été de :

   A : 3 %   **B** : 2,75 %   **C** : 2,5 %   **D** : 1,75 %

4. Pour tout réel x, $(\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^{3x-1}$ est égal à :

   A : e^{x^2+3x-1} **B** : $\mathrm{e}^{2x(3x-1)}$ **C** : $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}}$ **D** : $\dfrac{\mathrm{e}^{(x^2)}}{\mathrm{e}^{1-3x}}$

5. Le nombre -2 est solution de l'équation :

   A : $\mathrm{e}^x = -2$ **B** : $\mathrm{e}^{\ln x} = -2$ **C** : $\ln x = -\ln 2$ **D** : $\ln \mathrm{e}^x = -2$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x+3) < \ln 6$ est :

   A : $S =]-\infty ; 3[$ **B** : $S =]-3 ; 3[$ **C** : $S =]0 ; 3[$ **D** : $S =]3 ; +\infty[$

7. La valeur moyenne sur l'intervalle $[1 ; 3]$ de la fonction qui à x associe $\dfrac{1}{x}$ est :

   A : 6   **B** : 15   **C** : 21   **D** : 63

8. $\displaystyle\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x =$

   A : $\dfrac{1}{2}$ **B** : $\dfrac{2}{3}$ **C** : $\ln\sqrt{3}$ **D** : $\ln 2$

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Sur un parcours donné, la consommation y d'une voiture est donnée en fonction de sa vitesse moyenne x par le tableau suivant :

x (en km/heure)	80	90	100	110	120
y (en litres/100 km)	4	4,8	6,3	8	10

1. La consommation est-elle proportionnelle à la vitesse moyenne ? Justifier la réponse.
2. a) Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour 10 km/h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).
   b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
   c) À l'aide de la calculatrice, donner une équation, sous la forme $y = ax + b$, de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite (on arrondira a au millième et b au centième).
   d) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture pour une vitesse de 130 km/h.
3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   On pose : $z = \ln y$ et on admet que la droite d'ajustement obtenue pour les cinq points $(x\,;\,z)$ du nuage par la méthode des moindres carrés, a pour équation $z = 0{,}0234x - 0{,}5080$.
   a) Écrire y sous la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ (donner A et B arrondis à 10^{-4}).
   b) Tracer, sur le même graphique, la courbe d'équation $y = A\mathrm{e}^{Bx}$ pour x élément de l'intervalle $[80\,;\,120]$.
   c) En utilisant cet ajustement, estimer la consommation aux 100 km (arrondie au dixième) de la voiture, pour une vitesse de 130 km/h.
4. Des deux valeurs obtenues dans les questions 2. d) et 3. c), pour la consommation à une vitesse de 130 km/h, laquelle vous semble la plus proche de la consommation réelle ? Expliquer votre choix.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $2005+n$.

1. a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   La suite u de terme général u_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.
   b) Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1000$.
   a) Démontrer que la suite v de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0{,}9^n + 1000$.
   c) Déterminer la limite de la suite u.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0{,}9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite u.
4. Au 1er janvier 2005, l'entreprise compte un sur-effectif de 300 employés.
   À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sur-effectif ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0;1[\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\mathrm{e}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

1. Justifier les éléments suivants donnés par ce tableau de variations :
   signe de $f'(x)$; limites aux bornes de l'ensemble de définition ; image de $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ par f.
   On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.
2. Combien la courbe $\mathscr{C}$ possède-t-elle d'asymptotes ? Donner une équation de chacune d'elles.
3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point B d'abscisse e.
4. Indiquer pour quelles valeurs du réel k l'équation $f(x)=k$.
   a) ne possède aucune solution ;
   b) possède une solution unique ;
   c) possède deux solutions distinctes.

(Aucune justification n'est attendue dans cette question, on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice)

BACCALAURÉAT 2005

SÉRIE ES (OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ) : INDEX THÉMATIQUE