BAC 2006

ANNALES D'EXERCICES REGROUPÉS PAR THÈME

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Ce document, rassemble l'ensemble des exercices, classés par thèmes, des sujets du baccalauréat de la série ES de la session 2006. De par la nature même de l'épreuve, les exercices peuvent recouvrir plusieurs thèmes.

Les exercices sont regroupés sous quatre rubriques :

— Analyse

— Probabilités

— Statistiques

— Spécialité

Les exercices proposés sont établis à partir des sujets mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES EXERCICES DE LA SESSION 2006

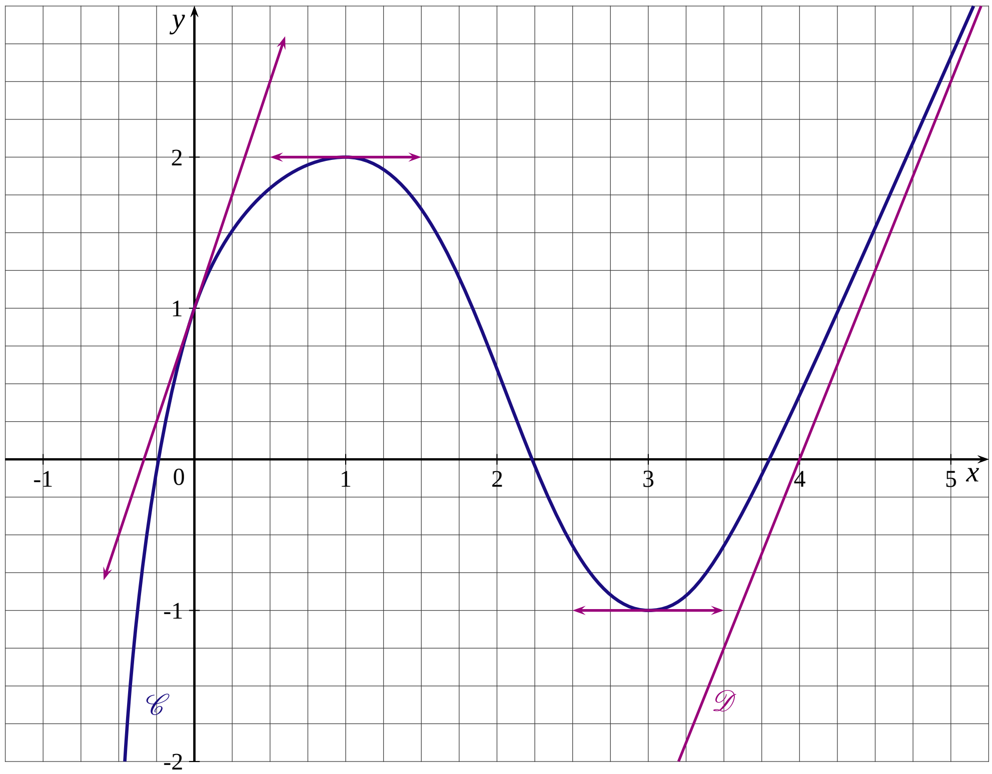
I ANALYSE

I. 1 FONCTION LECTURE GRAPHIQUE

EXERCICE 1

Liban 2006 (1)

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$.
On sait que la fonction f est croissante sur $]-1;1]$ et sur $[3;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.



I. Étude graphique de la fonction f

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point.*

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   - $y=-1$
   - $x=1$
   - $x=-1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   - $y=\frac{5}{2}x-10$
   - $y=\frac{5}{2}x-9$
   - $y=3x-10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   - 1
   - 3
   - -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $]-1;+\infty[$ est :
   - 2
   - 1
   - 3

II. Étude d'une fonction g

On note g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=\exp[f(x)]$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
2. Étudier les variations de g sur $]-1;+\infty[$ et en dresser le tableau de variations.

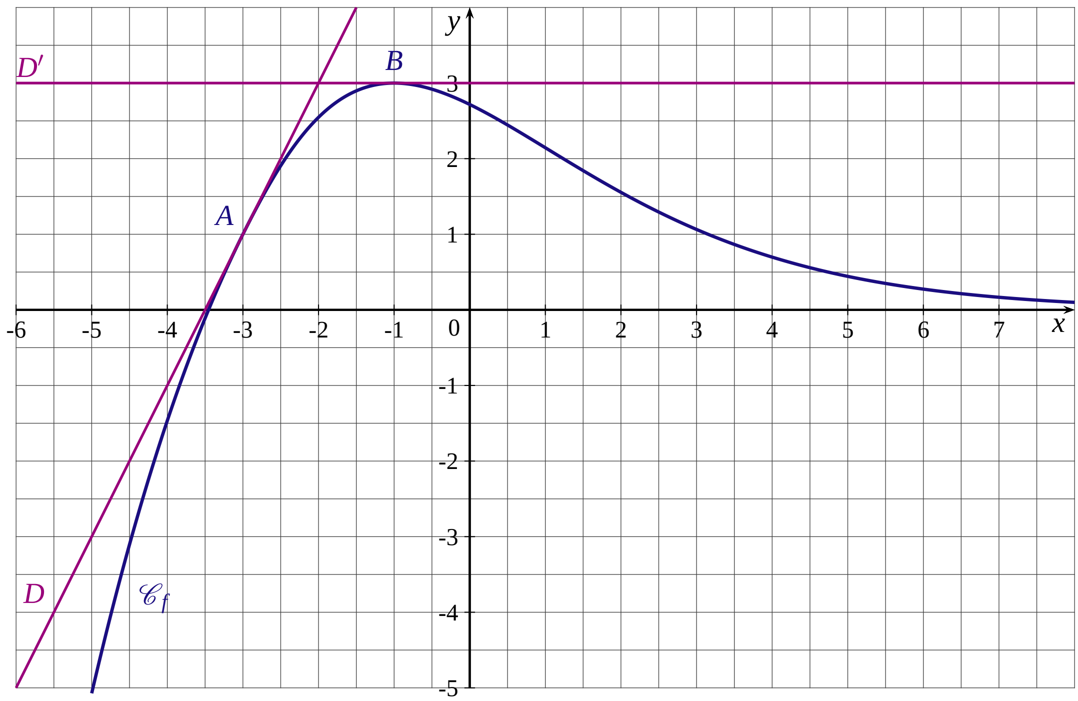
3. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
4. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'inéquation $g(x) \leqslant \mathrm{e}^2$.

EXERCICE 2 *Nouvelle Calédonie Remplacement 2006 (1)*

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan.
Cette courbe passe par les points $A(-3;1)$ et $B(-1;3)$.
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.

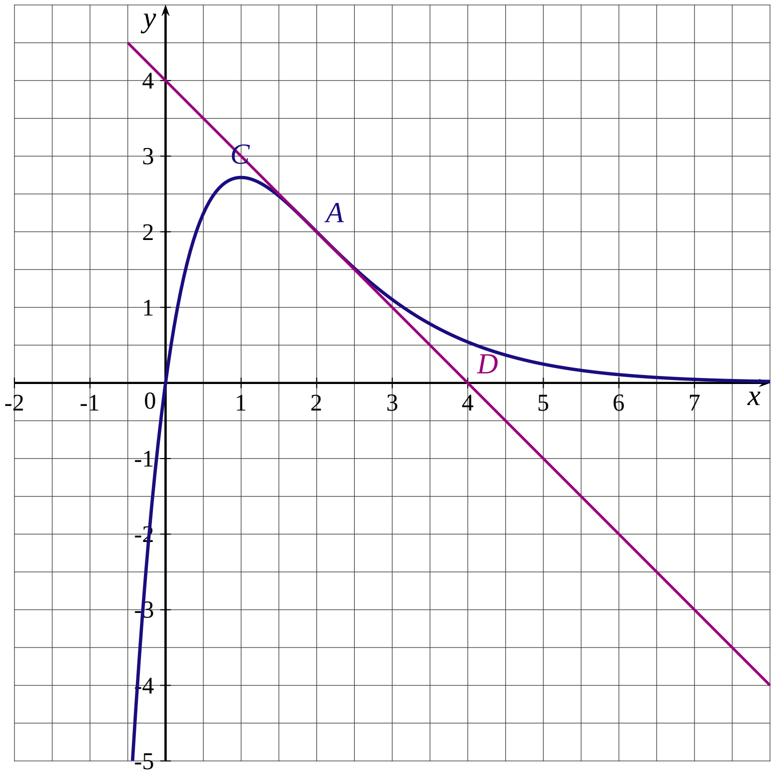


1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-3{,}1;+\infty[$ par $h(x) = \ln[f(x)]$. On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]-3{,}1;+\infty[$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ (on justifiera le résultat).
   b) Calculer $h'(-3)$.

EXERCICE 3

La Réunion 2006 (3)

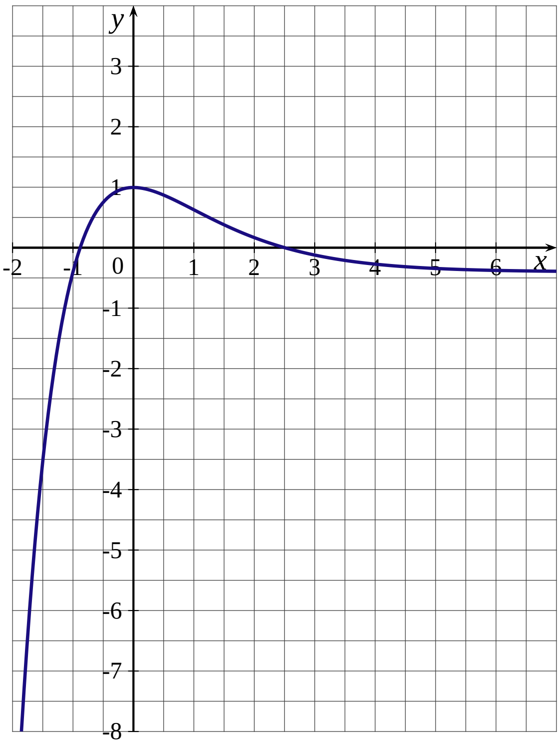
On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



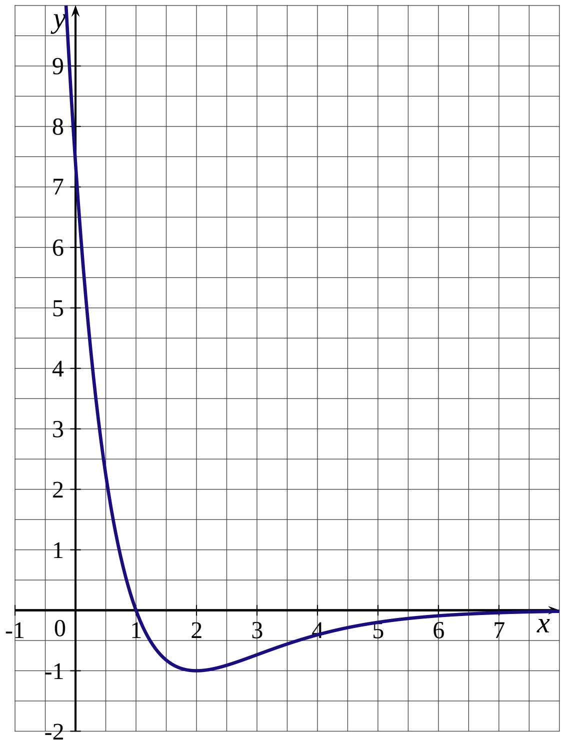
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$, $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques présentées ci-dessous, représente la fonction dérivée g' de g et une autre représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

   Déterminer la courbe associée à la fonction g' et celle associée à G ; vous justifierez votre choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

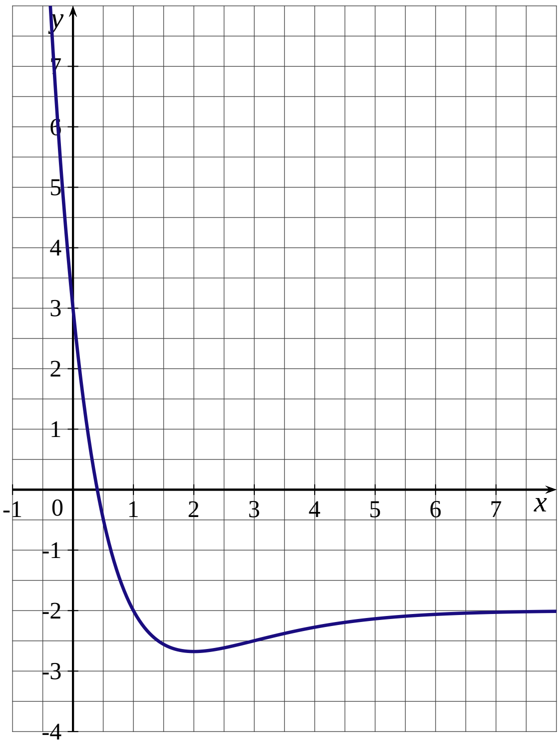
Courbe 1



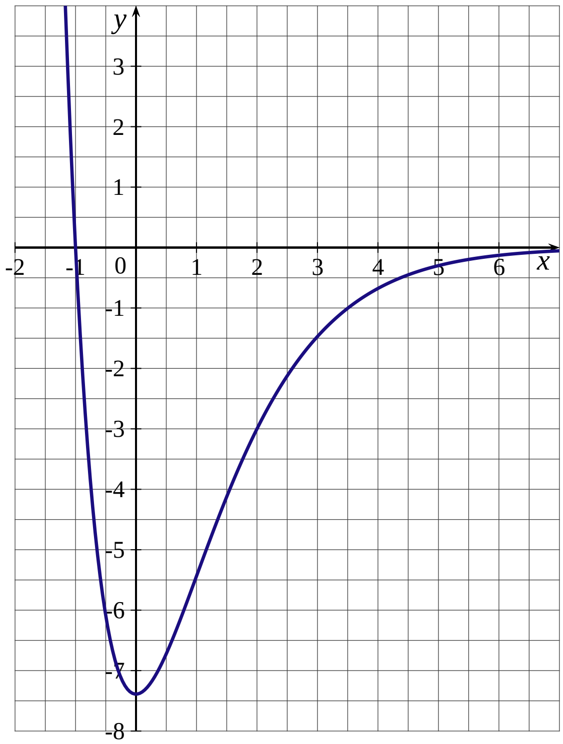
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



3. On suppose que la fonction g est de la forme : $g(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$ où a, b et c sont des nombres réels.
   a) Démontrer que $a = 0$ et que $c = -2b$.
   b) Déterminer $g'(x)$ en fonction de b et de x.
   c) Calculer alors les valeurs de b et de c.
4. Démontrer que la fonction G définie par $G(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{2-x}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer l'aire $\mathcal{K}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

I. 2 FONCTION LOGARITHME

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2006 (4)

Soit une fonction r définie sur $[0;12]$ par $r(x)=(900x)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}$.

A : Étude d'une fonction f

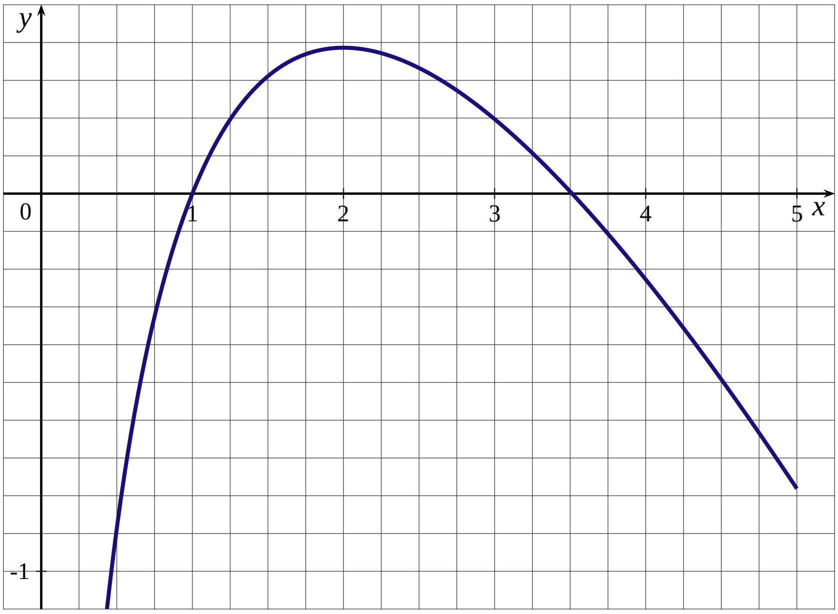
1. On considère la fonction f définie sur $]0;12]$ par $f(x)=\ln[r(x)]$.
   Démontrer que $f(x)=\ln(900)+\ln x-0,1(x-2)$.
2. On note f la fonction dérivée de f ; démontrer que $f'(x)=\dfrac{10-x}{10x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $]0;12]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0;12]$.
4. On désigne par r' la fonction dérivée de r ; exprimer f' en fonction de r' et de r puis justifier que $r'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe pour tout x de $]0;12]$.
5. En déduire les variations de r sur $]0;12]$.
6. Déterminer pour quelle valeur x_0 la fonction r atteint un maximum et calculer x_0 arrondi à l'unité près.

B : Calcul de la valeur moyenne

1. Démontrer que la fonction R définie par $R(x)=-9\,000(x+10)\mathrm{e}^{-0,1(x-2)}$ est une primitive de la fonction r sur $[0;12]$.
2. Calculer la valeur moyenne r_m de la fonction r sur $[0;12]$ définie par $r_m=\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} r(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera d'abord la valeur exacte et ensuite une valeur arrondie à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 *Centres étrangers 2006 (3)*

On désigne par f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x) = 1 - x + 2\ln x$.
La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).



1. Calculer la limite de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.
   Dresser le tableau des variations de f.
3. a) Calculer $f(1)$.
   b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3;4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.
   c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On appelle g la fonction définie sur $]0;5]$ par $g(x) = x\left(-\frac{1}{2}x + 2\ln x - 1\right)$.
   a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0;5]$.
   b) Sur le graphique ci-dessus, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe.
   Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
   c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2. (*On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3. b*)

EXERCICE 3 *Nouvelle Calédonie 2006 (4)*

PARTIE A : Étude préliminaire

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$

x	-3		-2		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$				2
			0		
		$-\infty$			

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\ln[g(x)]$.
   a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
   b) Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.
2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ qui est telle que : $G(-2)=0$.
   Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

PARTIE B

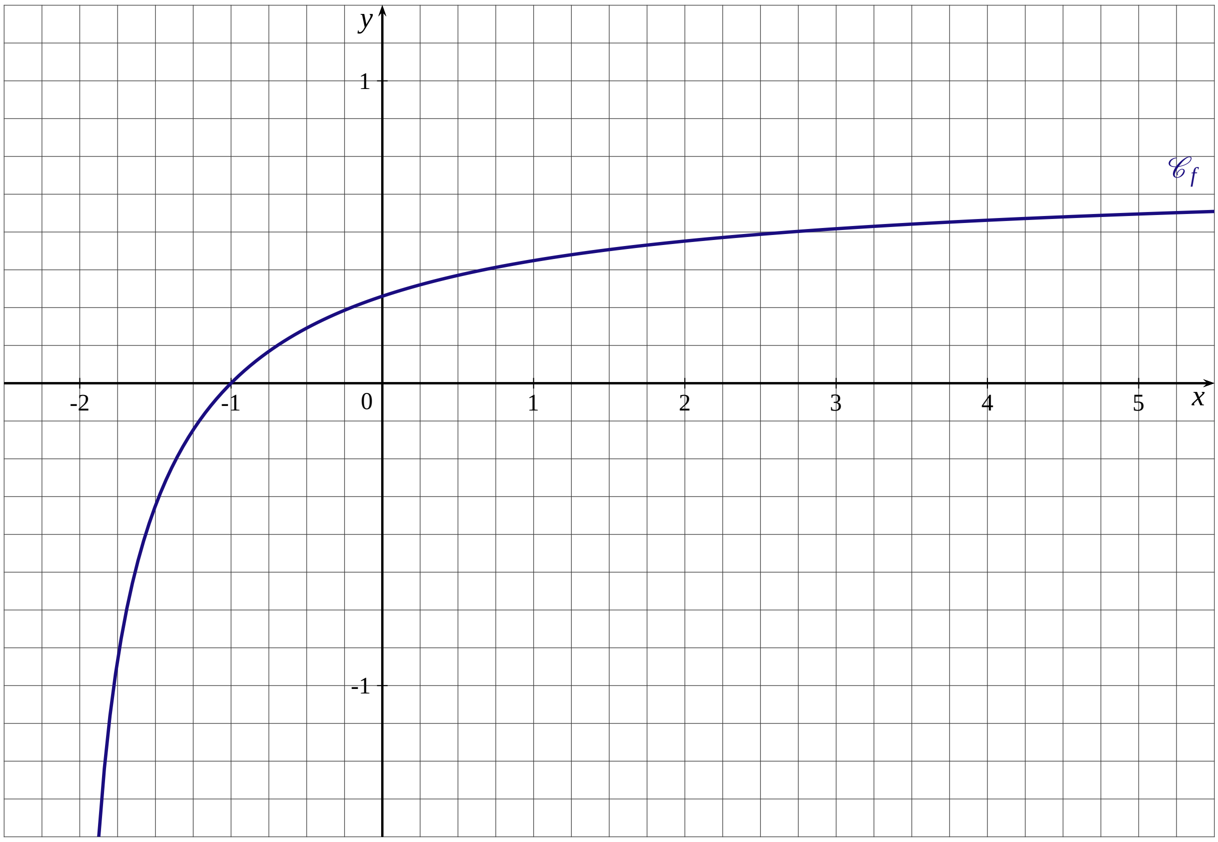
Dans cette partie, la fonction g est la fonction définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par : $g(x)=2-\dfrac{2}{x+3}$.

1. En utilisant cette définition de la fonction g retrouver tous les renseignements donnés dans le tableau de variation de la partie A.
2. Comme dans la première question de la partie A, on définit la fonction f par :

   $$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle }]-2;+\infty[,\ f(x)=\ln\left(2-\frac{2}{x+3}\right)$$

   Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de cette fonction f relativement à un repère orthogonal.
   La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est représentée sur la figure fournie en annexe.
   a) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.
   Si oui, en donner des équations et les tracer sur la figure fournie en annexe.
   b) La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un point A. En utilisant l'expression de $f(x)$, déterminer les coordonnées du point A et placer ce point sur la figure fournie en annexe.
   c) Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point d'abscisse (-1). Tracer la droite (T) sur la figure fournie en annexe.
3. Comme dans la deuxième question de la partie A, on définit la fonction G par :
   G est la primitive sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto 2-\dfrac{2}{x+3}$ et $G(-2)=0$.
   Calculer $G(x)$ pour x réel de l'intervalle $]-3;+\infty[$.

ANNEXE



y
1
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
$\mathscr{C}_f$

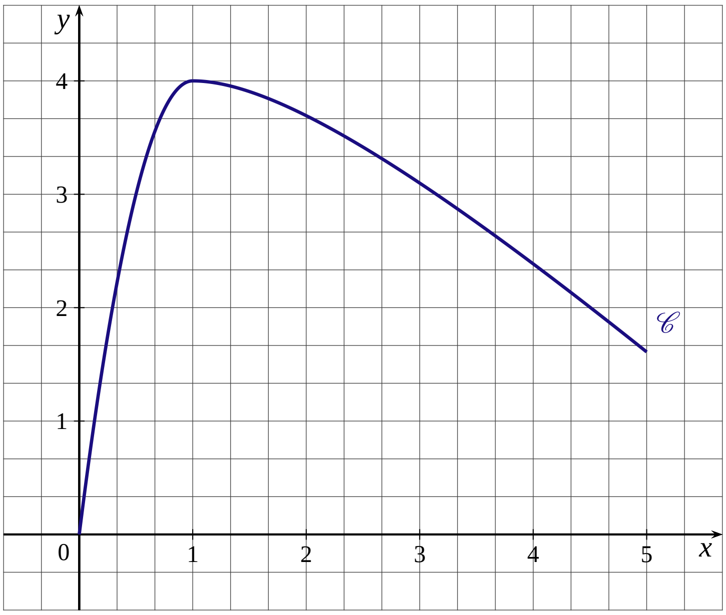
EXERCICE 4 *Nouvelle Calédonie Remplacement 2006 (4)*

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

— $f(x) = -4x^2 + 8x$ pour $x \in [0;1]$.
— $f(x) = \ln x - x + 5$ pour $x \in [1;5]$.

La courbe $(\mathscr{C})$, représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0;1]$, et décroissante sur $[1;5]$.
2. a) Donner une primitive de la fonction f sur $[0;1]$.
   b) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
3. a) Soient g et G les fonctions définie sur $[1;5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[1;5]$.
   b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.



EXERCICE 5 *Polynésie 2006 (2)*

On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2;+\infty[$, passe par les points $\text{O}(0;0)$ et $A(-1;0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y=x+1$.

1. a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x>-2$:

$$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\ln(x+2).$$

   a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.
   b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.
   c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.
   d) En déduire les valeurs de a, b et c.

EXERCICE 6 *Pondichéry 2006 (4)*

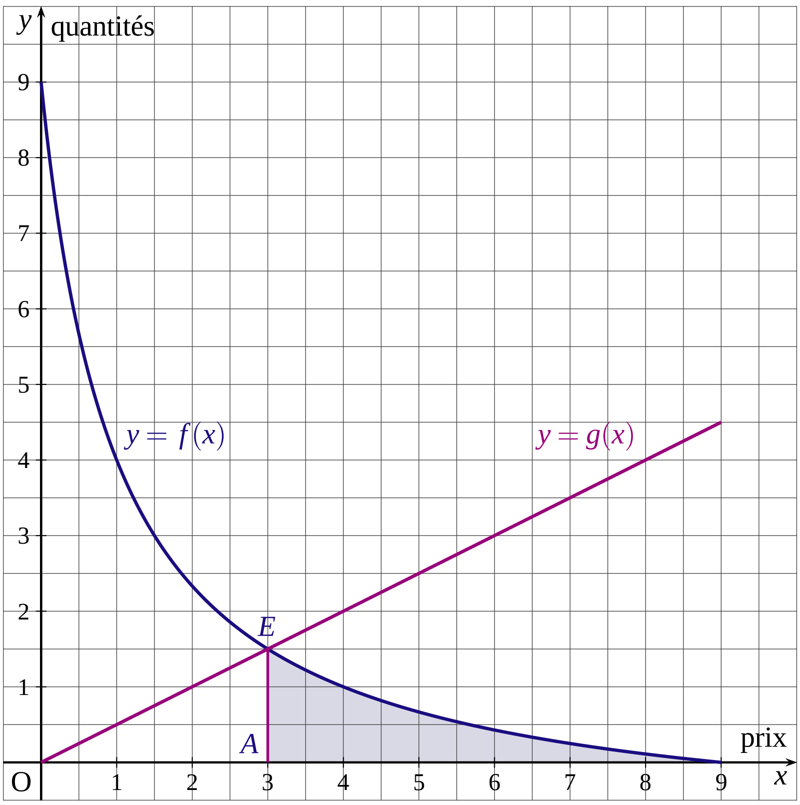
PARTIE 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0;9]$ par $f(x) = \dfrac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{2}$.

1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.
2. Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte de I.

PARTIE 2

Un produit conditionné en boite est mis sur le marché. On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.
On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.
Sur le graphique ci-dessous, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.



1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
   a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boite ?
   b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre.
   Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.
2. a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre.
   On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros).
   Calculer ce surplus en euros.

b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre.

Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique $(3 \leqslant x \leqslant 9)$.

Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

EXERCICE 7 *Pondichéry 2006 (3)*

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée ln.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE :

Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

RAPPELS

On rappelle les résultats de cours suivants, auxquels le candidat fera clairement référence pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro).

THÉORÈME 1 :
Sur un intervalle I, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

THÉORÈME 2 :
Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction composée définie par $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

THÉORÈME 3 :
La somme f de deux fonctions dérivables u et v sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.

DÉFINITION : $\ln 1 = 0$.

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Soit a un réel constant strictement positif.
On considère les fonctions f et g, de la variable x, définies sur $0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln a + \ln x$.

PARTIE 1

Dans le cas où $a = 2$, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$.

PARTIE 2 : Démonstration de la propriété

1. Calculer et comparer les dérivées de f et de g dans le cas général où a est un réel constant strictement positif.
2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = g(x) + k$?
3. En posant $x = 1$, déterminer la valeur de k.
4. Justifier la propriété fondamentale de la fonction ln énoncée en début d'exercice.

I. 3 FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

Amérique du Sud 2006 (3)

PARTIE A

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation : $2X^2 - 15X + 18 = 0$.
2. En déduire :
   a) les solutions de l'équation : $2\mathrm{e}^{2x} - 15\mathrm{e}^{x} + 18 = 0$;
   b) le signe de $2\mathrm{e}^{2x} - 15\mathrm{e}^{x} + 18$ selon les valeurs de x.

PARTIE B

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x - 3}$.
On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f relativement à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de la fonction f en $\ln 3$. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C}_f)$?
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
   Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?
3. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et (D).
4. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$; on note f' sa dérivée.
   Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - 15\mathrm{e}^{x} + 18}{(\mathrm{e}^x - 3)^2}$.
   En déduire, à l'aide de la partie A, le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que ses asymptotes. (Si la fonction présente un minimum ou un maximum, le mettre en évidence.)
6. a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 3}$.
   b) Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$, par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 3}$.
   Déterminer une primitive de la fonction g sur l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$.
   c) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]\ln 3 ; +\infty[$.

EXERCICE 2 *Antilles Guyane 2006 (4)*

Une nouvelle console de jeux est mise sur le marché. Soit x le prix unitaire en centaines d'euros de cette console. La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de console) est la fonction f définie sur $]0;6]$ par :

$$f(x) = 0{,}7\mathrm{e}^{0,5x+2}$$

où $f(x)$ est la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de x.
La fonction de demande des consommateurs (en milliers de console) est la fonction g définie sur $]0;6]$ par

$$g(x) = 10\ln\left(\frac{20}{x}\right)$$

où $g(x)$ est la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de x.

1. Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal fourni en annexe.
   a) Identifier les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la feuille annexe. Expliquez votre choix.
   b) Que représente le point A d'un point de vue économique ? Lire ses coordonnées $(x_0;y_0)$ sur le graphique.
2. Pour déterminer les coordonnées de A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   On pose, pour tout x appartenant à $]0;6]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a) Montrer que $h'(x) = 0{,}35\mathrm{e}^{0,5x+2} + \dfrac{10}{x}$.
   b) Étudier le signe de la dérivée h' et en déduire le sens de variations de h.
   c) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[2;3]$.
   Déterminer alors la valeur arrondie au dixième de x_0 à l'aide de la calculatrice.
   d) En déduire le prix unitaire d'équilibre de cette console en euros et le nombre de consoles disponibles à ce prix (arrondir à la centaine).

   La question 3 *est indépendante de la question* 2.
3. Surplus des fournisseurs.
   On prendra dans cette question $x_0 = 2{,}7$ et $y_0 = 20$.
   a) Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle $]0;6]$.
   b) On appelle surplus des fournisseurs le nombre $S = x_0y_0 - \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ce nombre représente une aire.
   Représenter cette aire sur le graphique de la feuille annexe.
   Calculer S.


y
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
x
A

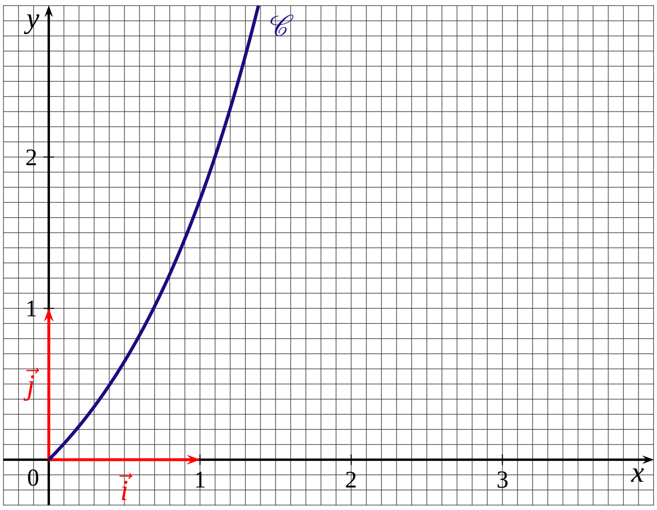
EXERCICE 3 *Asie 2006 (4)*

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^x + 1}$$

Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Le plan est rapporté un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ figurant ci-dessous.



   a) Donner une équation de la tangente T à cette courbe au point O origine du repère.
   b) Tracer la droite T dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ donné.

2. **Étude de la fonction** g
   a) Calculer $g(0)$.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.
   c) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
   d) Tracer la représentation graphique de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ donné.

3. La lecture graphique montre que l'équation $f(x) = g(x)$ admet dans l'intervalle $[0; +\infty[$ une unique solution, notée m.
   a) Faire figurer sur le graphique le point de coordonnées $(m; f(m))$.
   b) Prouver, par le calcul, que $m = \ln(2)$.

4. On considère le nombre suivant : $\mathscr{A} = \int_0^{\ln(2)} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Sur le graphique précédent, hachurer le domaine dont l'aire, en unités d'aires, est égale à $\mathscr{A}$.
   b) Soit la fonction dérivable G définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $G(x) = 3x - 3\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$.
   Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   c) Calculer $\mathscr{A}$.

EXERCICE 4 *France Métropolitaine Juin 2006 (4)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\dfrac{1}{x+4}$.

PARTIE A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) On admet qu'il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha)=0$.
   Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
5. a) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième)

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

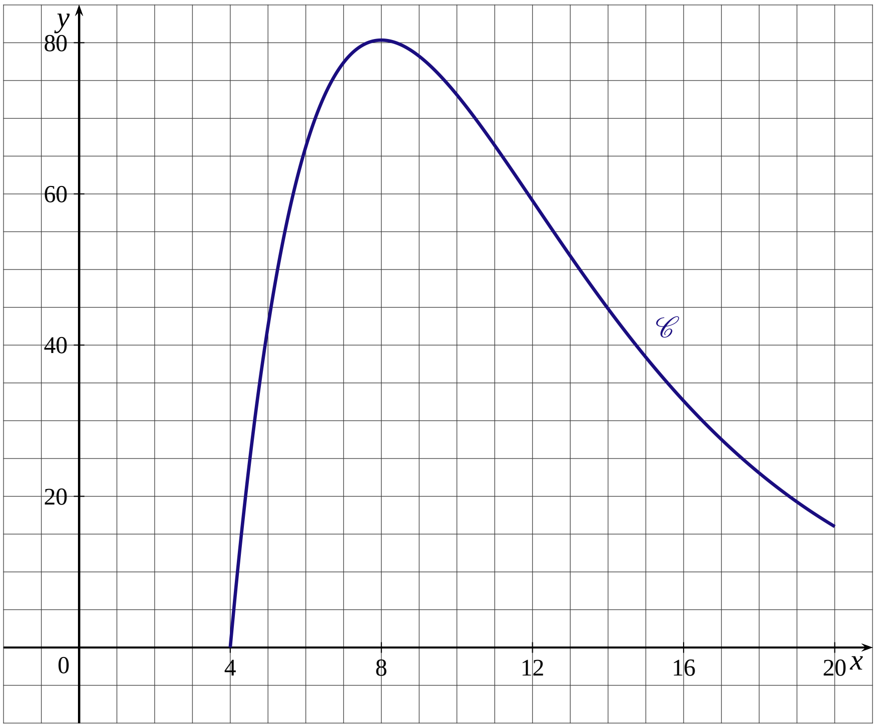
   b) En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre α tel que $f(\alpha)=0$.

PARTIE B

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x-3}-\ln(x+4)$.
   a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$
   b) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en utilisant les résultats de la partie A.
2. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième).

EXERCICE 5 *Liban 2006 (4)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4;20]$ par $f(x)=(x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente cette fonction dans un repère orthogonal.



PARTIE A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[4;20]$, $f'(x)=(-0,25x+2)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[4;20]$.
3. a) Montrer que la fonction F définie par $F(x)=-4x\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[4;20]$.

   b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B

Une entreprise commercialise des centrales d'aspiration.
Le prix de revient d'une centrale est de 400 €.
On suppose que le nombre d'acheteurs d'une centrale est donné par $N=\mathrm{e}^{-0,25x+5}$, où x est le prix de vente d'une centrale exprimé en centaines d'euros.

1. Montrer que la fonction f de la partie A donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euros.
2. À quel prix l'entreprise doit-elle vendre une centrale pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près ? Donner un interprétation graphique de ces résultats.
3. Calculer le bénéfice moyen réalisé pour $x\in[4;20]$. On donnera le résultat à l'euro près.

EXERCICE 6 *Polynésie 2006 (4)*

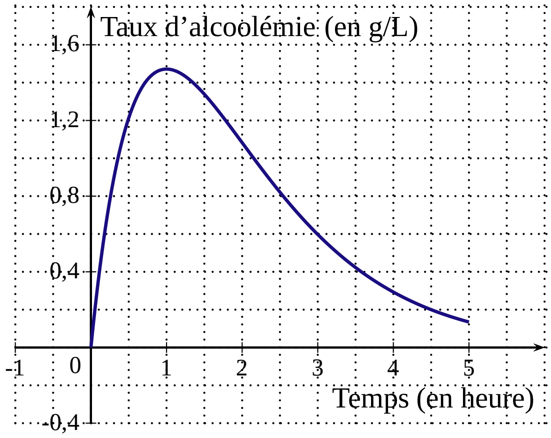
On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) \mathrm{e}^x$.

Dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique et $\mathscr{C}_{\exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.

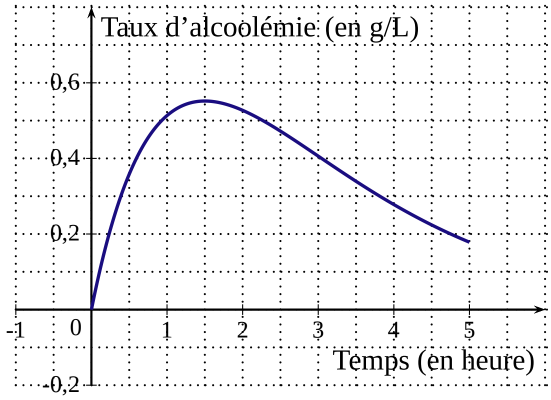
1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Donner les valeurs de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^x$ et de $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$.
   c) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. a) On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = (x+1)(x+2)\mathrm{e}^x$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. a) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_{\exp}$.
   b) Construire ces deux courbes dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = \left(x^2 - x + 2\right) \mathrm{e}^x$.
   Prouver que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. a) Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   b) Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine $\mathscr{D}'$ délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{\exp}$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

EXERCICE 7 *Polynésie Septembre 2006 (4)*

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une certaine personne (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool.
On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_1$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun (graphique nº 1) et la courbe $\mathscr{C}_2$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments (graphique nº 2).



Graphique nº 1 : courbe $\mathscr{C}_1$



Graphique nº 2 : courbe $\mathscr{C}_2$

PARTIE A : Observation graphique

À l'aide des deux graphiques précédents, répondre aux questions suivantes :

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.
2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé au volant est 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

PARTIE A : Modélisation

On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) pendant les cinq heures suivant l'absorption est modélisé en fonction du temps (exprimé en heures) :

— par une fonction f_1 lorsque l'alcool est absorbé à jeun,

— par une fonction f_2 lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments,

On admet que :

— les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la première partie sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2 ;

— la fonction f_1 est définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f_1(t) = 4t\mathrm{e}^{-t}$.

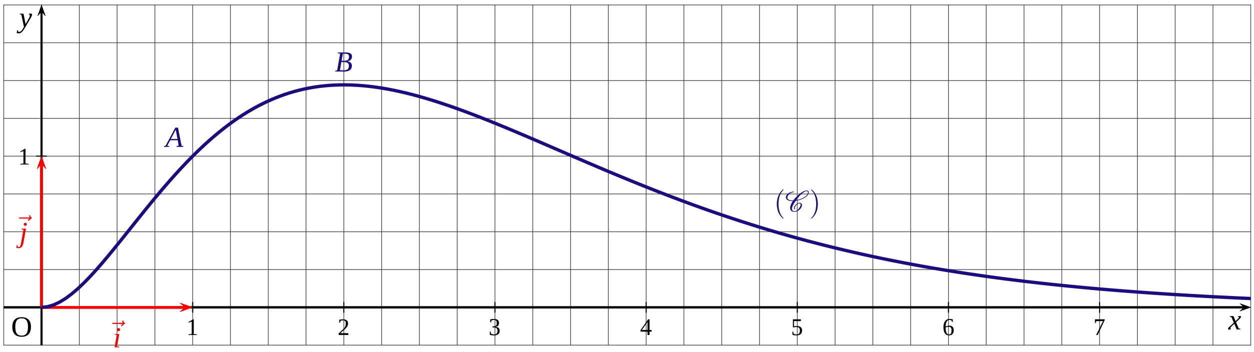
— la fonction f_2 est définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f_2(t) = at\mathrm{e}^{bt}$ où a et b désignent des nombres réels non nuls.

1. On désigne par f_2' la fonction dérivée de f_2 sur l'intervalle $[0;5]$.
   Déterminer $f_2'(t)$.
   On admet que $f_2'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$. En déduire le réel b.
2. En utilisant le taux d'alcoolémie au bout de trois heures, déterminer une valeur approchée de a et en donner la valeur décimale arrondie à 0,1.
3. Résoudre l'équation $f_1(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 8 *La Réunion Septembre 2006 (4)*

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :

— La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
— La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O, A et B.
— Le point A a pour coordonnées $(1;1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
— Le point B a pour coordonnées $\left(2;\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$. Au point B, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
— L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.



PARTIE A

1. a) Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(2)$ (justifier les résultats).
   b) Montrer que, dans l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions dont l'une est le nombre 1 ; l'autre solution est notée α.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln[f(x)]$.
   Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2\times \mathrm{e}^{-x+1}$$

1. On rappelle que la fonction g est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln[f(x)]$.
   a) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $g(x)=-x+1+2\ln x$.
   b) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Retrouver, par le calcul, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Soit la fonction dérivable h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $h(x)=\left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   a) On note h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=-h'(x)$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   c) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=2$. Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au dixième.

EXERCICE 9 *La Réunion Septembre 2006 (2 obligatoire)*

On étudie l'évolution de la population d'une ville au cours du temps. Le tableau suivant donne le nombre d'habitants au 1er janvier de chaque année (exprimé en milliers).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Nombre d'habitants	10,5	11,5	12,9	14,5	15,4	16,9

PARTIE A

1. Calculer l'accroissement relatif de la population du 1er janvier 2000 au 1er janvier 2005 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
2. Si le taux d'augmentation de cette population d'une année à l'autre du 1er janvier 2000 au 1er janvier 2005 avait été fixe et égal à 10 %, quel résultat aurait-on obtenu pour la population le 1er janvier 2005 à partir du nombre d'habitants au 1er janvier 2000 ? (donner la valeur décimale arrondie au dixième)

PARTIE B

On modélise de façon continue l'évolution de cette population (exprimée en milliers d'habitants) pour une période de 8 années en utilisant la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x) = 10{,}5 \times (1{,}1)^x$.
Le nombre réel x, exprimé en années, représente le temps écoulé depuis le 1er janvier 2000 ; ainsi le nombre $f(0) = 10{,}5$ représente le nombre d'habitants (en milliers) au 1er janvier 2000 (c'est-à-dire la population initiale).

1. a) Calculer le nombre $f(6{,}5)$, c'est-à-dire le nombre d'habitants (en milliers), que l'on peut prévoir en utilisant ce modèle pour le 1er juillet 2006 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

   b) En utilisant ce modèle quel nombre d'habitants (en milliers) peut-on prévoir au 1er janvier 2007 (donner la valeur décimale arrondie au dixième) ?
2. Sur l'annexe ci dessous, à rendre avec la copie, on a tracé la représentation graphique (Γ) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

   Utiliser le graphique (laisser apparents les traits de construction) pour donner le nombre d'habitants (en milliers) au 1er octobre 2003.
3. On cherche à évaluer le temps minimum t écoulé depuis le 1er janvier 2000, nécessaire pour que la population initiale double.

   a) À l'aide du graphique et en laissant apparents les traits de construction, donner une valeur approchée de t exprimée en années et en trimestres.

   b) Déterminer t par le calcul (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel de définitions

On désigne par y_1 et y_2 des nombres réels strictement positifs $y_2 > y_1$.

L'accroissement absolu de y_1 à y_2 est égal à $y_2 - y_1$.

L'accroissement relatif de y_1 à y_2 est égal à $\dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$.

ANNEXE


y
20
15
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x
Γ

I. 4 PROBLÈME OUVERT

EXERCICE 1 *Amérique du Sud 2006 (4)*

Pour cet exercice, il est conseillé aux candidats d'expliquer leurs recherches sur leur copie car toute démarche correcte, y compris avec la calculatrice, sera valorisée même si elle ne permet pas d'aboutir au résultat demandé.

Bruno a occupé un emploi saisonnier du 1er juin 2005 au 30 septembre 2005 en tant que commercial pour une entreprise de produits surgelés. Pour ses besoins professionnels, il a utilisé un téléphone portable et l'opérateur téléphonique lui a proposé la formule suivante :

— au 1er juin, il disposait d'un forfait de 420 minutes de communication ;

— au 1er juillet, il lui restait 300 minutes sur son forfait et l'opérateur lui a offert une durée supplémentaire de communication égale à t % de la durée restante sur son forfait avec $5 < t < 20$;

— en juillet, il a consommé 120 minutes, et au 1er août, l'opérateur lui a à nouveau offert une durée supplémentaire de communication égale à t % de la durée restante sur son forfait ;

— en août, il a consommé 120 minutes, et au 1er septembre, l'opérateur lui a encore offert une durée supplémentaire de communication égale à t % de la durée restante sur son forfait ;

— en septembre, il a consommé 120 minutes, et au 1er octobre il a rendu son téléphone en ayant tout consommé.

Déterminer une approximation à 10^{-2} près de la valeur de t.

I. 5 Vrai-Faux

EXERCICE 1 *Amérique du Sud 2006 (2 obligatoire)*

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse fournie.

1. La fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = 2^x$ a pour dérivée la fonction f' telle que pour tout réel x, $f'(x) = x2^{x-1}$.
2. L'équation $\ln(x+1)+\ln(x+3) = \ln(3x+5)$ a une autre solution réelle que le nombre 1.
3. En 20 ans, la population d'une commune rurale a augmenté de 40 %. Le taux d'accroissement moyen annuel, arrondi à 10^{-2}, est de $1,70$ %.
4. La valeur moyenne sur l'intervalle $[0;4]$ de la fonction qui à x associe e^{-x} est $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-4}}{4}$.
5. Une étude statistique sur des séances de « tir au but » a montré que 75 % des tirs au but étaient réussis. Au cours d'un match de football, 4 tirs au but, que l'on suppose être des épreuves aléatoires indépendantes, ont été effectués.

   Affirmation : « La probabilité qu'au moins un des quatre tirs au but échoue est $0,25^4$. »

EXERCICE 2 *Nouvelle Calédonie 2006 (1)*

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la figure 1 est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;+\infty[$.

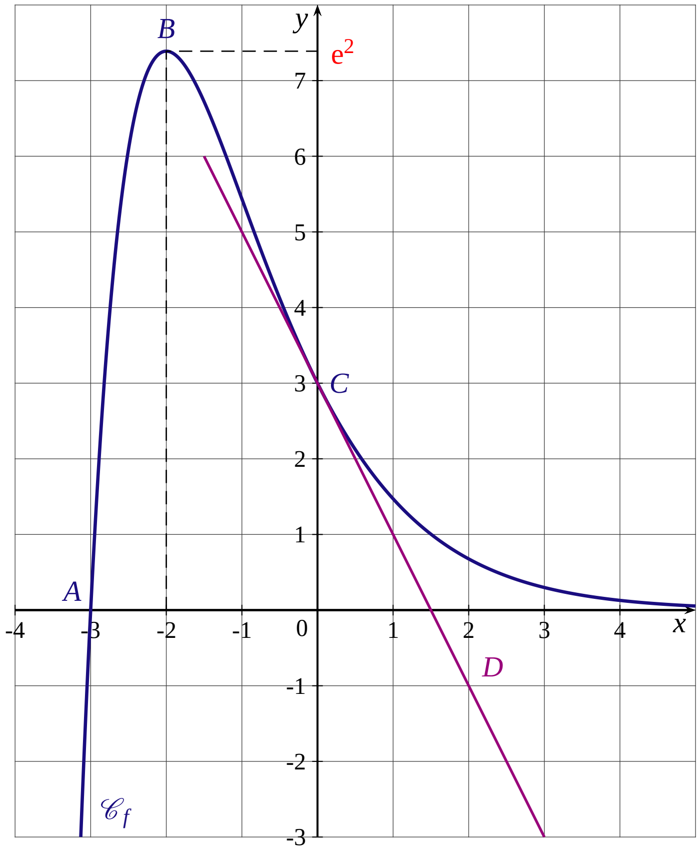


Figure 1

On donne les renseignements suivants :

— les points $A(-3;0)$, $B\left(-2;e^2\right)$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$;

— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

— la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;

— la droite tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point C passe par le point $D(2;-1)$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est 1.
2. $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2;+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
4. Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4;+\infty[$, alors la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.
5. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx < 15$.

I. 6 Q.C.M Analyse

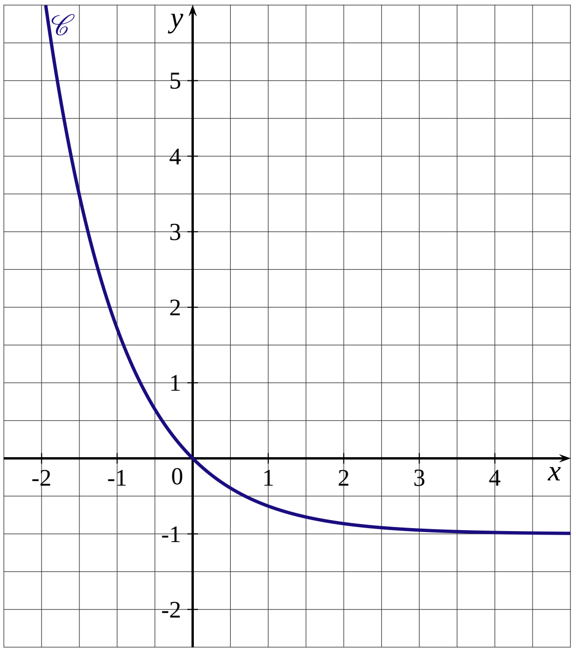
EXERCICE 1 *Antilles Guyane 2006 (3)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, trois réponses sont proposées, une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.
Barème : Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est ramenée à 0.*

QUESTIONS	RÉPONSES
1. Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui permet d'affirmer que la fonction exponentielle admet pour asymptote la droite d'équation $y=0$?	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
2. Parmi les propositions suivantes, quelle est celle qui permet d'affirmer que l'inéquation $\ln(2x+1) \geqslant \ln(x+3)$ admet l'intervalle $[2;+\infty[$ comme ensemble de solution ?	• la fonction ln est positive sur $[1;+\infty[$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ • la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$
3. Parmi les propositions suivantes quelle est celle qui permet d'affirmer qu'une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$ est la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x$?	• pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$ • pour tout réel x, $g'(x) = f(x)$ • pour tout réel x, $g(x) = f'(x) + k$, k réel quelconque.
4. L'équation $2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 1 = 0$ admet pour ensemble solution :	• $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ • $\left\{0;\ln\frac{1}{2}\right\}$ • $\{0;\ln 2\}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = 1$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = 0$
6. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3x + 4$. Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :	• $y = -x+2$ • $y = x+2$ • $y = -x-2$
7. La valeur moyenne sur $[1;3]$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x$ est :	• $\frac{50}{3}$ • $\frac{25}{3}$ • 3
8. $\exp(\ln x) = x$ pour tout x appartenant à :	• $\mathbb{R}$ • $]0;+\infty[$ • $[0;+\infty[$

EXERCICE 2 *Asie 2006 (1)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On note F la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total des points est négatif la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. $f(\ln(2)) = -3$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
3. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
4. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x > 1$.
5. La fonction F est croissante sur l'intervalle $[-1;0]$.
6. Pour tout nombre réel x, on a $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$.

EXERCICE 3 *Centres étrangers 2006 (1)*

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demanda d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe à rendre avec la copie. Une bonne réponse rapporté 0,5 *point ; une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est* 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

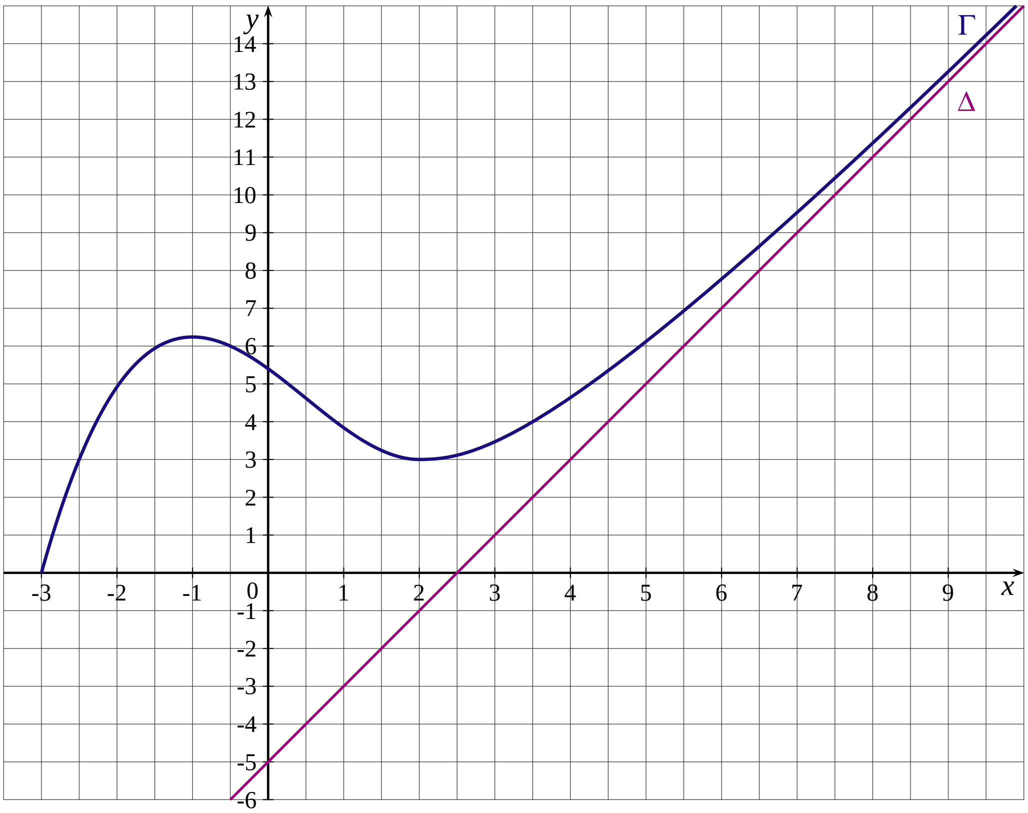
x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-4{,}5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle $]-5;+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}$:
   - admet une seule asymptote la droite d'équation $x=-5$
   - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $x=-4{,}5$ et $y=-5$
   - admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $y=-4{,}5$ et $x=-5$.
3. On sait que $f'(2)=0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y=4$
   - $y=4(x-2)$
   - $x=4$.
4. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1;2)$ est $y=3x-1$. On a :
   - $f(2)=1$
   - $f'(1)=-1$
   - $f'(1)=3$.
5. Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, la fonction g définie par $g(x)=\mathrm{e}^{-f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.
6. On pose $h(x)=\ln[f(x)+5]$. Alors la fonction h :
   - est décroissante sur $]2;+\infty[$;
   - est positive sur $]2;+\infty[$
   - n'est pas définie sur $]2;+\infty[$.

EXERCICE 4 *France Métropolitaine Juin 2006 (1)*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3;-1]$ et $[2;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1;2]$.
On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-3;+\infty[$.
La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Elle passe par le point $A(-3;0)$ et admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y=2x-5$.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) Les réponses ne seront pas justifiées.

NOTATION : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

AFFIRMATIONS	V	F
a. L'équation $f(x)=4$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-3;+\infty[$.	☐	☐
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	☐	☐
c. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(2x-5)]=+\infty$.	☐	☐
d. $f'(0)=-1$.	☐	☐
e. $f'(x)>0$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2;1]$.	☐	☐
f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 7$.	☐	☐

EXERCICE 5 *Polynésie 2006 (1)*

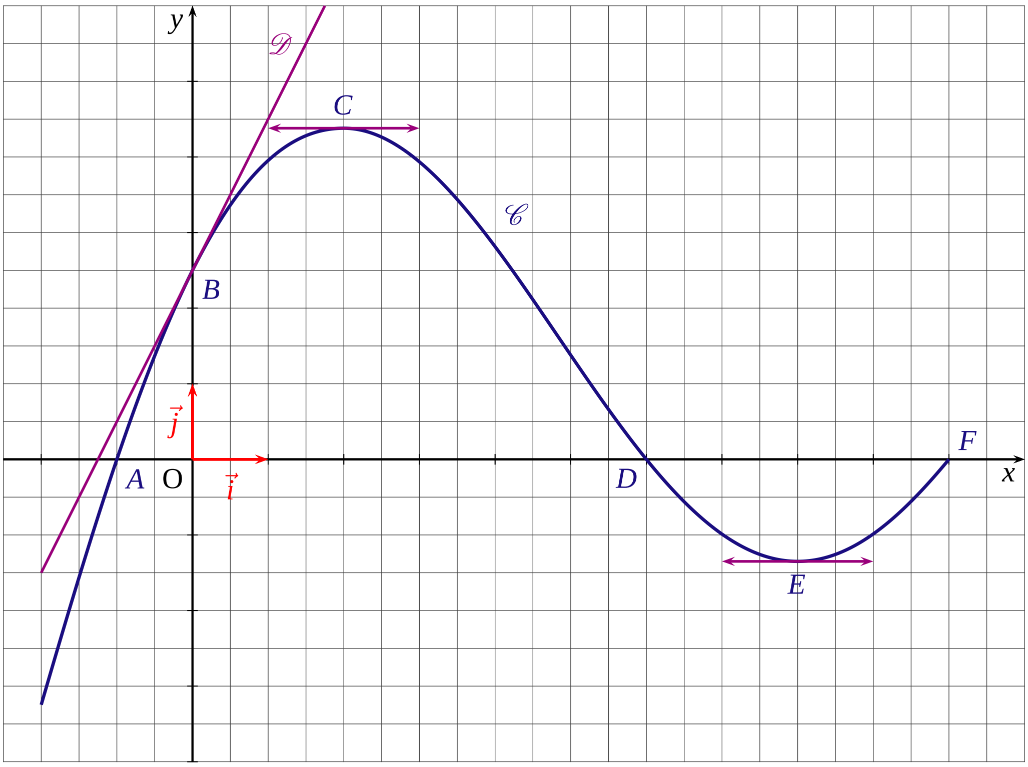
Pour chacune des quatre questions de ce Q.C.M., une seule des trois propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la bonne affirmation. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.

1. Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - Au moins une solution.
   - Au plus une solution.
   - Exactement une solution.
2. Si la fonction f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - Au moins une solution.
   - Au plus une solution.
   - Exactement une solution.
3. Si la fonction f est continue et positive sur $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. En unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par la formule :
   - $\mathscr{A} = \displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - $\mathscr{A} = f(b) - f(a)$.
4. Un produit coûte initialement 500 euros. Son prix augmente de 20 %. Si l'on veut revenir au prix initial, il faut :
   - Diminuer le prix de 20 %.
   - Diminuer le prix de $\dfrac{1}{20}$ %.
   - Diminuer le prix de 100 euros.

EXERCICE 6 *Polynésie Septembre 2006 (1)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez la réponse exacte sans justifier votre choix.
Barème : À chaque question est attribué un certain nombre de points. Une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points attribué. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;10]$ et la fonction composée $g = \ln \circ f$.
Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f.
Les points $A(-1;0)$, $B(0;2,5)$, $C(2;4,38)$, $D(6;0)$, $E(8;-1,35)$ et $F(10;0)$ sont des points de $\mathscr{C}$.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point B.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points C et E sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Quelle est la valeur de $f'(0)$ nombre dérivé de f en 0 ?

   a. $f'(0) = 2,5$; **b.** $f'(0) = 2$; **c.** $f'(0) = 0,5$.

2. Quel est l'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 0$?

   a. $S = \emptyset$; **b.** $S = \{-1;6;10\}$; **c.** $S = \{2;8\}$.

3. À quel intervalle appartient le réel $I = \displaystyle\int_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$?

   a. $I \in [-1;5]$; **b.** $I \in [0;4,38]$; **c.** $I \in [15;30]$.

4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g, noté D_g ?

   a. $\mathrm{D}_g =]-1;6[$; **b.** $\mathrm{D}_g =]0;10[$; **c.** $\mathrm{D}_g =]-2;10[$.

5. Quelle est la valeur de $g(0)$?

   a. $g(0) = 2,5$; **b.** $g(0) = 0$; **c.** $g(0) = \ln(2,5)$.

6. Quelle est la valeur du coefficient directeur m de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 ?

   a. $m = 2$; **b.** $m = \frac{1}{2}$; **c.** $m = 0{,}8$.

7. Quel est l'ensemble S' des solutions de l'équation $g'(x) = 0$?

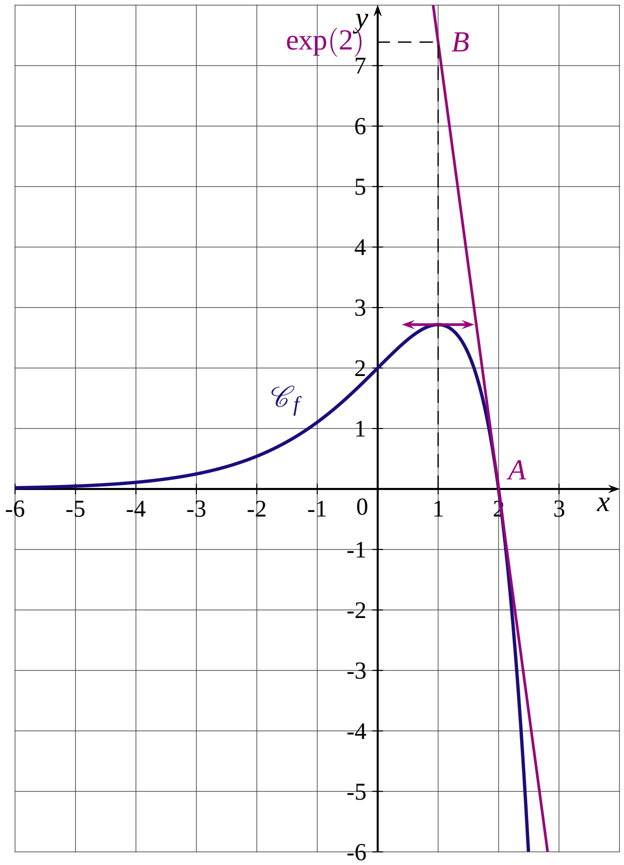
   a. $S' = \emptyset$; **b.** $S' = \{-1; 6; 10\}$; **c.** $S' = \{2\}$.

8. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers -1 ?

   a. $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 0$; **b.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$; **c.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$.

EXERCICE 7

Pondichéry 2006 (1)



La courbe ci-contre $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$.
On note f' sa fonction dérivée et F la primitive de f qui vérifie : $F(1) = 2\text{e}$.
On précise :

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$.

— La tangente à la courbe au point $A(2;0)$ passe par le point $B\left(1;\text{e}^2\right)$.

— $F(-3) = \dfrac{6}{\text{e}^3}$.

Pour chacune des huit affirmations, précisez sur votre copie si elle est vraie ou fausse (aucune justification n'est demandée et il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé).
Barème : À chaque question est attribué 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif il est ramené à zéro.*

AFFIRMATION 1 Pour tout $x \in]-\infty;2]$, $f'(x) \geqslant 0$.	**AFFIRMATION 5** $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\text{d}x = -2$
AFFIRMATION 2 Le nombre dérivé en 2 de la fonction f est égal à e^2.	**AFFIRMATION 6** La fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie sur $]-\infty;2]$.
AFFIRMATION 3 La fonction F présente un maximum en 2.	**AFFIRMATION 7** La limite de la fonction $\dfrac{1}{f}$ en $-\infty$ est $+\infty$.
AFFIRMATION 4 L'aire de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=-3$ et $x=1$ est égale (en unité d'aire) à $\dfrac{2\text{e}^4-6}{\text{e}^3}$.	**AFFIRMATION 8** La courbe représentative de la fonction $\dfrac{1}{f}$ présente une asymptote d'équation $x=2$.

EXERCICE 8

La Réunion 2006 (4)

Cet exercice est un Q.C.M. (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte. On portera la réponse dans le tableau prévu en annexe.
Barème : une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève de point. Si le total de point est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

1. L'expression $f(x) = x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)+1$ peut aussi s'exprimer ainsi :
   a) $f(x) = \ln \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-x}\left(x + x\mathrm{e}^{x}\right)$
   b) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
   c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1 + \mathrm{e}^{x}$
2. Deux fonctions u et g sont connues par leurs tableaux de variations.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$u(x)$	4	↘	2	↘	-2	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

   On a alors :
   a) $g[u(-1)] = -1$
   b) $g[u(-2)] = -2$
   c) $g[u(-1)] = -2$
3. En considérant les fonctions u et g précédentes , on a :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g[u(x)] = 4$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g[u(x)] = -\infty$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} g[u(x)] = +\infty$
4. En considérant la fonction g de la question 2, l'équation $g(x) = 3$ admet :
   a) exactement une solution sur $[-4;2]$
   b) exactement une solution sur $[-3;+[$
   c) exactement une solution sur $]-\infty;-2]$
5. Dire que la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan, revient à dire que :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$
   b) $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-(x-1)] = +\infty$
   c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$
6. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}$ est :

a) une primitive de la fonction qui à x associe : $-xe^{-x^2+1}$

b) une primitive de la fonction qui à x associe : $-2xe^{1-x^2}$

c) la dérivée de la fonction qui à x associe : $-2xe^{1-x^2}$

7. Une fonction f est connue par son tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On peut affirmer que :

a) F est croissante sur $]-\infty;3]$

b) F' est positive sur $\mathbb{R}$

c) F est croissante sur $[3;5]$

8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{4\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}$ a pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}$, dans un repère donné. On peut dire alors que :

a) la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) la droite d'équation $x=-4$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

c) la droite d'équation $x=4$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

9. Pour toute fonction f continue et positive sur $[-1;1]$ si $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère donné du plan, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

a) la valeur moyenne de f sur $[-1;1]$.

b) l'aire, en unités d'aire, du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$, entre les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

c) égale à $f(1)-f(-1)$.

10. a et b étant deux nombres réels strictement positifs, $\ln(a+b)$ est égale à :

a) $(\ln a)\times(\ln b)$.

b) $\ln a+\ln\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\ln b$.

c) $\ln a+\ln b$.

ANNEXE

Pour chaque question du Q.C.M., cocher la case correspondant à la bonne réponse

Questions	Réponse a.	Réponse b.	Réponse c.
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

EXERCICE 9 *La Réunion Septembre 2006 (1)*

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Cocher cette réponse sur la feuille à rendre avec la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. Augmenter une quantité de 8 %, puis la diminuer de 8 % c'est :

   ☐ revenir à la quantité initiale
   ☐ augmenter la quantité initiale de 0,64 %
   ☐ diminuer la quantité initiale de 0,64 %

2. Le relevé des ventes de chaussures d'homme dans un magasin, en fonction des pointures, est le suivant :

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Nombre de paires vendues	10	12	15	13	5	5	1

   La médiane de cette série est égale à :

   ☐ 13
   ☐ 42
   ☐ 43

3. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln\left(a^2+3a\right)$ est égal à :

   ☐ $\ln\left(a^2\right)+3\ln(a)$
   ☐ $\ln(a)+\ln(a+3)$
   ☐ $42\ln(a)+\ln(3a)$

I. 7 Q.C.M Analyse et Probabilités

EXERCICE 1 — *Amérique du Nord 2006 (1)*

Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 point *; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à* 0.

	QUESTIONS	RÉPONSES		
Q1	Si $a \in]0;1[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ est égale à :	☐ 0	☐ $+\infty$	☐ $-\infty$
Q2	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ est :	☐ $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$	☐ $x \mapsto 2\mathrm{e}^{x^2}$	☐ $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
Q3	La dérivée sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$ est :	☐ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$	☐ $x \mapsto \ln x$	☐ $x \mapsto \ln x + 1$
Q4	$\mathrm{e}^{-2\ln 5}$ est égal à :	☐ $\dfrac{1}{25}$	☐ -25	☐ $\dfrac{5}{2}$
Q5	L'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{16}{\mathrm{e}^x}$ admet sur $\mathbb{R}$:	☐ Aucune solution	☐ Une solution	☐ Deux solutions
Q6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln(0,2) - 5 \geqslant 0$ est :	☐ $\left[\dfrac{5}{\ln 0,2};0\right[$	☐ $\left]-\infty;\dfrac{5}{\ln 0,2}\right]$	☐ $\left[\dfrac{5}{\ln 0,2};+\infty\right[$

Dans les questions 7, 8, 9 et 10, A et B sont deux évènements d'un univers tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A\cap B) = 0,2$.

Q7	$P(A\cup B) =$	☐ 0,1	☐ 0,5	☐ 0,7
Q8	$P\left(A\cap\overline{B}\right) =$	☐ 0,1	☐ 0,2	☐ 0,4
Q9	$P\left(\overline{A\cap B}\right) =$	☐ 0,3	☐ 0,5	☐ 0,8
Q10	$P_A(B) =$	☐ $\dfrac{2}{3}$	☐ $\dfrac{1}{2}$	☐ $\dfrac{3}{4}$

II PROBABILITÉS

II. 1 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXERCICE 1

Amérique du Sud 2006 (1)

Un hôpital est composé de trois services : service de soins A, service de soins B, service de soins C.
On s'intéresse aux prises de sang effectuées dans cet hôpital.

PARTIE A : Dans le service de soins A

Dans le tableau suivant figure le nombre de prises de sang effectuées dans le service de soins A lors des premiers mois de l'année 2006.

mois	janvier	février	mars	avril	mai
rang du mois x_i	1	2	3	4	5
nombre de prises de sang effectuées y_i	51	49	48	46	44

1. En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
2. Avec cet ajustement, quel nombre de prises de sang peut-on prévoir pour le mois de décembre 2006 ? (arrondir à l'unité).

PARTIE B : Dans l'ensemble des trois services de soins

On a constaté après l'observation d'une assez longue période que :

— 40 % des prises de sang sont effectuées dans le service de soins A,

— un tiers le sont dans le service de soins B,

— les autres dans le service de soins C.

Les aiguilles utilisées pour effectuer les prises de sang sont fournies soit par le laboratoire GLOBULEX, soit par le laboratoire HÉMATIS ;

— dans le service de soins A, 60 % des prises de sang effectuées le sont avec des aiguilles fournies par le laboratoire GLOBULEX ;

— dans le service de soins B, $\dfrac{4}{5}$ des prises de sang effectuées le sont avec des aiguilles fournies par le laboratoire HÉMATIS ;

— dans le service de soins C, il y a autant de prises de sang effectuées avec des aiguilles fournies par le laboratoire GLOBULEX que de prises de sang effectuées avec des aiguilles fournies par le laboratoire HÉMATIS.

On choisit au hasard un patient qui a subi une prise de sang dans l'hôpital.
On considère les évènements suivants :

— A : « La prise de sang a été effectuée dans le service de soins A. »

— B : « La prise de sang a été effectuée dans le service de soins B. »

— C : « La prise de sang a été effectuée clans le service de soins C. »

— G : « L'aiguille utilisée a été fournie par le laboratoire GLOBULEX. »

— H : « L'aiguille utilisée a été fournie par le laboratoire HÉMATIS. »

Pour toutes les questions, en donnera les valeurs exactes des probabilités demandées

1. Représenter la situation par un arbre en complétant cet arbre autant qu'il est possible.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement « Le patient a subi une prise de sang dans le service de soins B avec une aiguille fournie par le laboratoire HÉMATIS ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement H.
4. Le patient a subi une prise de sang avec une aiguille fournie par le laboratoire HÉMATIS.
   Déterminer la probabilité que cette prise de sang ait été effectuée dans le service de soins B.

II. 2 LOI BINOIMIALE

EXERCICE 1 *Antilles Guyane 2006 (2 obligatoire)*

Tous les résultats seront arrondis au millième si nécessaire

Dans une auto-école, il y a deux filières possibles : l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC) et la filière traditionnelle.
Afin d'inciter les candidats à préparer l'examen du permis de conduire avec la filière « apprentissage anticipé de la conduite » (AAC), une auto-école fournit les résultats suivants aux futurs candidats :

— Il y a 40 % des candidats qui choisissent la formule AAC ;

— Un candidat préparant son permis la filière AAC obtient son permis lors de la première présentation dans 79 % des cas ;

— Un candidat préparant son permis avec la filière traditionnelle obtient son permis lors de la première présentation dans 49 % des cas.

On interroge au hasard un candidat **après l'obtention du résultat** de sa première présentation.
On note A l'évènement : « le candidat a préparé son examen avec la filière AAC ».
On note S l'évènement : « le candidat a obtenu son permis de conduire ».

1. Traduire les données par un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité de l'évènement : « le candidat a obtenu le permis lors de la première présentation et il l'a préparé avec la filière AAC ».

   b) Calculer la probabilité d'obtenir le permis de conduire lors de la première présentation.
3. Le candidat interrogé a échoué lors de la première présentation. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen avec la filière AAC ?
4. On interroge au hasard et de façon indépendante trois candidats après l'obtention du résultat de leur première présentation.

   Calculer la probabilité d'interroger au moins un candidat ayant échoué.
5. Cette auto-école pratique les tarifs suivants :

   — 1 200 € le forfait 20 heures avec la filière AAC ;

   — 1 050 € le forfait 20 heures avec la filière traditionnelle.

   Sachant que le nombre d'inscrits est de 200 candidats pour l'année, quel est le chiffre d'affaires annuel de cette auto-école pour l'année 2006 ?

EXERCICE 2 *Centres étrangers 2006 (2 obligatoire)*

Un musée très fréquenté propose à la vente trois sortes de billets :

— au prix de 5 € un billet pour visiter uniquement le fonds permanent des collections ;

— au prix de 3 € un billet pour visiter uniquement une exposition temporaire ;

— au prix de 6 € un billet pour visiter le fonds permanent et l'exposition temporaire.

On sait que :

— 85 % des visiteurs visitent le fonds permanent

— 35 % des visiteurs visitent l'exposition temporaire.

Un visiteur se présente à l'entrée du musée et achète un billet. On considère les évènements suivants :

F : « Le visiteur achète un billet à 5 € »

E : « Le visiteur achète un billet à 3 € »

M : « Le visiteur achète un billet à 6 € ».

1. a) Établir que $p(M) = 0{,}2$; $p(F) = 0{,}65$ et $p(E) = 0{,}15$.

   b) Calculer le prix de vente moyen d'un billet.

Le musée propose à la vente un catalogue sur l'exposition temporaire. On sait que :

— 35 % des personnes qui ne visitent que l'exposition temporaire achètent le catalogue.

— 25 % des personnes qui visitent le fonds permanent et l'exposition temporaire achètent le catalogue.

— 97 % des visiteurs du seul fonds permanent n'achètent pas le catalogue.

On considère l'évènement C : « Le visiteur achète le catalogue »

2. Démontrer que $p(C) = 0{,}122$ (on pourra s'aider d'un arbre).
3. Un visiteur a acheté le catalogue. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas visité l'exposition temporaire ?
4. Quelle est la probabilité que, parmi trois visiteurs du musée venus indépendamment les uns des autres, au moins un n'ait pas acheté le catalogue ?

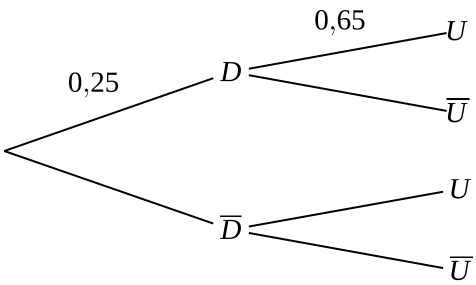
EXERCICE 3 *France Métropolitaine Juin 2006 (2 obligatoire)*

La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés.
Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.
On choisit au hasard un de ces DVD. On note :

D l'évènement « le DVD a été reçu en dotation » et $\overline{D}$ l'évènement contraire,

U l'évènement « le DVD est de production européenne » et $\overline{U}$ l'évènement contraire.

On modélise cette situation aléatoire par l'arbre incomplet suivant dans lequel figurent quelques probabilités par exemple, la probabilité que le DVD ait été reçu en dotation est $p(D) = 0{,}25$.



On donne, de plus, la probabilité de l'évènement U : $p(U) = 0{,}7625$.

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1. a) Donner la probabilité de U sachant D.
   b) Calculer $p\left(\overline{D}\right)$.
2. a) Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne (donner la valeur exacte).
   b) Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.
3. Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

PARTIE B

On choisit trois DVD au hasard. On admet que le nombre de DVD est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à trois tirages successifs indépendants avec remise. On rappelle que la probabilité de choisir un DVD reçu en dotation est égale à 0,25.
Déterminer la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ».
(Donner la valeur décimale arrondie au millième).

EXERCICE 4 *Liban 2006 (2 obligatoire)*

La question 6 peut être traitée indépendamment des 5 autres.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Un pépiniériste conditionne un mélange de 400 bulbes de fleurs composé de trois variétés :

— 100 bulbes d'Anémones

— 180 bulbes de Bégonias

— 120 bulbes de Crocus.

On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit.
Après avoir planté tous les bulbes et observé leur floraison, on constate que :

— 83 % des bulbes germent ;

— 50 % des bulbes d'Anémones germent ;

— 90 % des bulbes de Bégonias germent.

On note les évènements suivants :

— A : « le bulbe planté est un bulbe d'Anémone. »

— B : « le bulbe planté est un bulbe de Bégonias. »

— C : « le bulbe planté est un bulbe de Crocus. »

— G : « le bulbe planté germe. »

1. Donner les probabilités conditionnelles $P_A(G)$, $P_B(G)$ et la probabilité $P(G)$.
2. Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'Anémone qui germe ?
3. Quelle est la probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias ?
4. a) Calculer la probabilité conditionnelle $P_C(G)$.

   b) Que peut-on en déduire ?
5. On considère un bulbe ayant germé. Quelle est la probabilité que ce soit un bulbe de Crocus ?
6. On considère à présent que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement trois bulbes de ce stock.

   Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois bulbes choisis germe ?

Remarques :

— *On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*

— *On rappelle la formule des probabilités totales :*

Si $A_1, A_2, \cdots A_n$, forment une partition de l'univers, alors la probabilité d'un évènement quelconque E est donnée par :

$$p(E) = p(A_1 \cap E) + p(A_2 \cap E) + \cdots + p(A_n \cap E)$$

EXERCICE 5 *Nouvelle Calédonie 2006 (2)*

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire d'analyse médicale. L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation. Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil), soit une assistance téléphonique suffit.
À l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :

— Situation A : l'appareil a fonctionné normalement ;

— Situation B : l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;

— Situation C : l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.
Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.

L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement,

— la probabilité d'être dans la situation A est 0,6 ;

— la probabilité d'être dans la situation B est 0,3 ;

— la probabilité qu'il doive se déplacer est 0,6.

PARTIE A : L'appareil a été utilisé pendant une semaine.

On considère les évènements suivants :
A : « On se trouve dans la situation A »
B : « On se trouve dans la situation B »
C : « On se trouve dans la situation C »
S : « L'installateur se déplace »
T : « L'installateur effectue une assistance téléphonique ».

On pourra construire un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Calculer la probabilité de l'événement T.
2. Démontrer que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est 0,9.
3. On sait que l'installateur s'est déplacé. Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

PARTIE B : L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite.

On admet que les évènements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?
2. a) Donner la loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.
   b) Montrer que l'espérance mathématique de cette loi vaut 1,8.
   c) Pour l'installateur, un déplacement revient à 300 € (l'assistance téléphonique ne lui coûte rien). L'installateur décide de proposer à son client un forfait pour trois semaines de maintenance.
   Déterminer le montant minimum de ce forfait afin que l'installateur puisse espérer rentrer dans ses frais.

EXERCICE 6 *Nouvelle Calédonie Remplacement 2006 (3)*

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut D_{A} et le défaut D_{B}, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut D_{A}, 37 % ont le défaut D_{B}, et 10 % ont les deux défauts.

   On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?

2. *Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.*

   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut D_{A}, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut D_{B}. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut D_{A} sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut D_{B} sont réparables.

   On choisit une pièce au hasard.

   On note :

   A l'évènement : « La pièce a le défaut D_{A} »,

   B l'évènement : « La pièce a le défaut D_{B} »,

   R l'évènement : « La pièce est réparable ».

   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation

   b) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie a le défaut D_{A} et est réparable ».

   c) Calculer la probabilité de l'évènement : « La pièce choisie est réparable ».

   d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut D_{A} (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

   e) À trois moments différents, on choisit au hasard une pièce parmi les pièces défectueuses qui ont un seul défaut. On suppose que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.

      Calculer la probabilité pour que, sur les 3 pièces choisies, exactement 2 pièces aient le défaut D_{A}.

EXERCICE 7 *Polynésie 2006 (3)*

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.
Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.
En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :

— A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »

— T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »

— D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »

— V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux évènements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p_A(V)$ et $p_T(V)$.
2. a) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.
   b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.
   c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.
   On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.
   a) Prouver que : $p_n = 1 - 0{,}4^n$.
   b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0{,}9999$.

EXERCICE 8 *La Réunion 2006 (2 obligatoire)*

Une entreprise de transports routiers dispose de 16 camions dont :

— 9 sont considérés comme « anciens »

— 4 sont considérés comme « récents »

— 3 sont considérés comme « neufs ».

PARTIE A

L'entreprise décide d'observer l'état des 16 camions pendant une période donnée. On sait de plus que, pendant cette période, la probabilité que :

— un camion « ancien » ait une panne, est égale à 0,08

— un camion « récent » ait une panne, est égale à 0,05

— un camion « neuf » ait une panne, est égale à 0,0025.

On choisit au hasard un camion parmi les 16. On note les évènements suivants :

A : « le camion est ancien »

R : « le camion est récent »

N : « le camion est neuf »

D : « le camion a une panne ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant les éventualités associées au choix d'un camion.
2. Calculer la probabilité que le camion choisi soit récent et ait une panne (*on donnera, pour cette question et les deux suivantes, à chaque fois une valeur approchée du résultat arrondie à* 10^{-4} *près*)
3. Calculer la probabilité que le camion choisi ait une panne.
4. Calculer la probabilité que le camion soit neuf sachant qu'il n'a pas de panne.

PARTIE A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux camions « neufs ».

On donnera, pour chacune des questions suivantes, une valeur approchée du résultat arrondie au millième.

Un camion peut être indisponible pour des raisons de matériel ou de personnel. Chaque camion neuf a de façon indépendante une probabilité d'indisponibilité de 0,01.
Déterminer la probabilité pour qu'un jour donné :

1. tous les camions « neufs » soient indisponibles (évènement T)
2. un camion « neuf » au moins soit indisponible (évènement M)
3. deux camions « neufs » exactement soient disponibles (évènement S).

EXERCICE 9 *La Réunion Septembre 2006 (3)*

On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs.
On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60 % des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.
On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un évènement est assimilée à la fréquence correspondante.
On note :

A, l'évènement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur A »

B, l'évènement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur B »

H, l'évènement : « la personne choisie accède à Internet par le haut débit »

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,20.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,54.
4. Calculer $p_H(A)$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.
5. On choisit au hasard trois personnes dans cette population. On admet que le nombre de personnes est suffisamment grand pour assimiler le choix des trois personnes à des tirages successifs indépendants avec remise.

   Calculer la probabilité de l'évènement « exactement deux des personnes choisies accèdent à Internet par le haut débit ». On en donnera la valeur décimale arrondie au centième.

II. 3 VARIABLE ALÉATOIRE

EXERCICE 1 *Amérique du Nord 2006 (2 obligatoire)*

Tous les résultats de cet exercice seront arrondis à 10^{-2} près.

Un site touristique dont le billet d'entrée coûte 4 € propose deux possibilités de visite, une visite à pied sans frais supplémentaire ou une visite en car avec frais supplémentaires de 3 € par personne.

Une buvette est installée sur le site. On y vend un seul type de boisson au prix de 2 € l'unité.
On suppose qu'à la buvette un touriste achète au plus une boisson.
Un touriste visite le site. On a établi que :

— la probabilité pour qu'il visite à pied est 0,3 ;

— la probabilité qu'il visite à pied et achète une boisson est 0,18 ;

— la probabilité qu'il achète une boisson sachant qu'il visite en car est 0,8.

On note :

— C l'évènement : « le touriste visite en car » ;

— B l'évènement : « le touriste achète une boisson ».

1. Donner $p\left(\overline{C}\cap B\right)$ et $p\left(\overline{C}\right)$.
2. Le touriste visite à pied. Quelle est la probabilité qu'il achète une boisson ?
3. a) Montrer que $p(B) = 0{,}74$.
   b) En déduire la recette moyenne prévisible de la buvette lors d'une journée où 1 000 touristes sont attendus sur le site.
4. On appelle d la dépense (entrée, transport éventuel, boisson éventuelle) associée à la visite du touriste.
   a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
   b) Établir la loi de probabilité de d. On présentera le résultat dans un tableau.
   c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2

Asie 2006 (3)

Une roue de loterie comporte trois secteurs notés A, B et C.
On lance la roue, elle tourne puis s'arrête devant un repère fixe.
Le mécanisme est conçu de telle sorte que, à l'arrêt de la roue, le repère fixe se trouve toujours devant l'un des trois secteurs, qui est alors déclaré « secteurs repéré ».
On note p_1 la probabilité que le secteur A soit repéré. On donne $p_1 = 0{,}2$.
On note p_2 la probabilité que le secteur B soit repéré. On donne $p_2 = 0{,}3$.

1. Calculer la probabilité, notée p_3, que le secteur C soit repéré.

   Une partie consiste à lancer la route de fois successivement. On s'intéresse aux couples de secteurs repérés obtenus à la suite des deux lancers successifs.

   On admet que les lancers de roues successifs sont indépendants.

2. Justifier que la probabilité d'obtenir le couple de secteurs repérés (A, B) est égale à $0{,}06$.
3. Compléter le tableau suivant par les probabilités d'obtenir les différents couples de secteurs repérés possibles. Certaines probabilités sont déjà indiquées, ainsi la probabilité de tenir le couple (C, C) est égale à $0{,}25$.

Secteur repéré au premier lancer / Secteur repéré au deuxième lancer	A	B	C
A	0,04		
B	0,06		
C			0,25

4. Montrer que la probabilité de tenir un couple de secteurs repérés ne comportant pas le secteur C est égale à 0,25.
5. De l'argent est mis en jeu dans cette partie. Le gain dépend du nombre de secteurs C repérés :

   — obtenir deux fois le secteur C fait gagner huit euros ;

   — obtenir exactement une fois le secteur C fait gagner un euro ;

   — n'obtenir aucun secteur C fait perdre dix euros.

   a) Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité			0,25

   b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 *Polynésie Septembre 2006 (2 obligatoire)*

On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %.
On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?

   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?

   b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.

   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.

2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.

   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.

   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.

   a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

   b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   c) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4

Pondichéry 2006 (2 obligatoire)

Pour passer le temps, Chloé et Margaux inventent un jeu avec leur paquet de 32 cartes à jouer et un paquet de bonbons.
On rappelle que, dans un jeu de 32 cartes, on trouve quatre couleurs (pique, trèfle, cour, carreau) et, dans chaque couleur, on a une série de 8 cartes (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

Margaux propose la règle suivante :

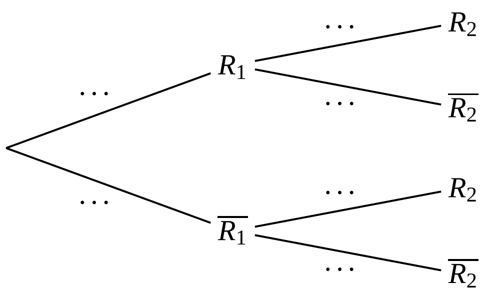
— On tire une carte, on regarde si c'est un roi. Sans remettre la carte dans le paquet, on tire une seconde carte et on regarde si c'est un roi.

— Si, sur les deux cartes, on a tiré exactement un roi, on gagne 10 bonbons ; si on a tiré deux rois, on gagne 20 bonbons ; sinon, on a perdu !

On note :

R_1 l'évènement « tirer un roi au premier tirage » et $\overline{R_1}$ son évènement contraire,
R_2 l'évènement « tirer un roi au deuxième tirage » et $\overline{R_2}$ son évènement contraire.

1. Justifier les valeurs des probabilités suivantes : $P(R_1) = \dfrac{1}{8}$, $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{31}$, et $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \dfrac{4}{31}$.
2. On traduit le jeu par un arbre pondéré. Reproduire l'arbre ci-dessous en inscrivant les probabilités, en écriture fractionnaire sur chaque branche.



Dans ce qui suit, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie au millième.

3. Calculer la probabilité des évènements :
   A « tirer un roi au premier tirage et au deuxième tirage » ;
   B « tirer un roi à un seul des deux tirages »
4. On s'intéresse au nombre X de bonbons gagnés après deux tirages.
   Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X.

Nombre de bonbons x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$		0,226	

5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au dixième.

II. 4 Q.C.M PROBABILITÉS

III STATISTIQUES

III. 1 AJUSTEMENT AFFINE

EXERCICE 1

Antilles Guyane 2006 (1)

Le conservatoire du littoral créé en 1976 acquiert des terrains sur le littoral français (métropole, Antilles-Guyane). Voici les superficies en milliers d'hectares du patrimoine cumulé depuis sa création :

Année	1976	1981	1986	1991	1996	2001
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Superficie y_i (en milliers d'hectares)	2	16	28	38	50	65

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de la superficie possédée par le conservatoire du littoral entre 1991 et 2001. On donnera le résultat arrondi à l'unité.
2. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal :
   — Sur l'axe des abscisses, on prendra 2 cm pour unité ;
   — Sur l'axe des ordonnées, on prendra 1 cm pour 5 milliers d'hectares.
3. *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*
   Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.
   a) Donner une équation de la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au dixième)
   b) Représenter cette droite dans le repère précédent.
4. Avec cet ajustement, calculer l'estimation de la superficie du patrimoine possédé par le conservatoire du littoral en 2006 (en milliers d'hectares).
5. a) Le conservatoire du littoral a pour objectif de posséder une superficie de 200 milliers d'hectares. En quelle année ce chiffre sera-t-il atteint en utilisant cet ajustement ?
   b) Sachant que 200 milliers d'hectares représentent 22 % de bande côtière française, quelle est la superficie totale, en hectares de la bande côtière française.

EXERCICE 2 *Nouvelle Calédonie 2006 (3 obligatoire)*

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125	127

1. a) Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i;y_i)$ dans un repère orthogonal.
   Les unités graphiques seront : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
   b) Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième). Placer le point G dans le repère.
2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.
   a) Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).
   b) Tracer cette droite (D) dans le repère.
   c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cette approximation ?
3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec $f(x) = -2x^2 + 23x + 63$.
   a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
   b) Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans le repère de la question 1.
   c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?
4. En réalité, le bénéfice en 2005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2004.
   Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ?

EXERCICE 3 *Polynésie Septembre 2006 (3)*

La société INFOLOG a mis au point un nouveau logiciel de gestion destiné aux PME.
Cette société a mené une enquête dans une région auprès de 300 entreprises équipées d'ordinateurs aptes à recevoir ce logiciel, ceci afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir un exemplaire de ce nouveau logiciel. Elle a obtenu les résultats suivants :

x prix proposé pour le nouveau logiciel en **centaines** d'euros	y nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix
30	90
25	120
20	170
15	200
10	260

1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 200 euros en abscisses et 5 cm pour 100 entreprises en ordonnées).

   Placer le point moyen G après avoir déterminé ses coordonnées.
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite D d'ajustement affine de y en x sous la forme $y = ax + b$. (*Aucun détail des calculs n'est demandé, les résultats ne seront pas arrondis.*)

   Tracer D sur le graphique précédent.
3. En utilisant l'ajustement précédent, préciser pour quel prix de vente la société INFOLOG peut espérer que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel.
4. On note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, dégagée par la vente de y logiciels au prix de x centaines d'euros.

   a) En utilisant la relation entre y et x obtenue à la question 2, donner l'expression de $R(x)$ pour x variant entre 5 et 30.

   b) Étudier les variations de la fonction R sur $[5 ; 30]$ et en déduire le prix de vente du logiciel, exprimé en euros, pour que la recette $R(x)$ soit maximale.

   Déterminer alors le montant de cette recette ainsi que le nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

III. 2 AJUSTEMENT EXPONENTIEL

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2006 (3)

Tous les résultats numériques seront arrondis à l'unité près sauf indication contraire.

Une machine est achetée 3 000 euros. Le prix de revente y, exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

A : Ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i;y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.
   Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 euros sur l'axe des ordonnées.
2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.
3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.
   Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter la droite dans le repère précédent.

B : Ajustement non affine

On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

$$z = -0{,}22x + 8{,}01$$

1. Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.
2. En admettant que $y = 0{,}80^x \times 3011$, déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 euros.

C : Comparaison des ajustements

Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 euros.
Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse.

EXERCICE 2 *Centres étrangers 2006 (4)*

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine. en milliards de dollars, entre 1982 et 2002.

Année	1982	1986	1990	1994	1998	2002
Rang x_i de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB y_i	280	300	384	546	945	1232

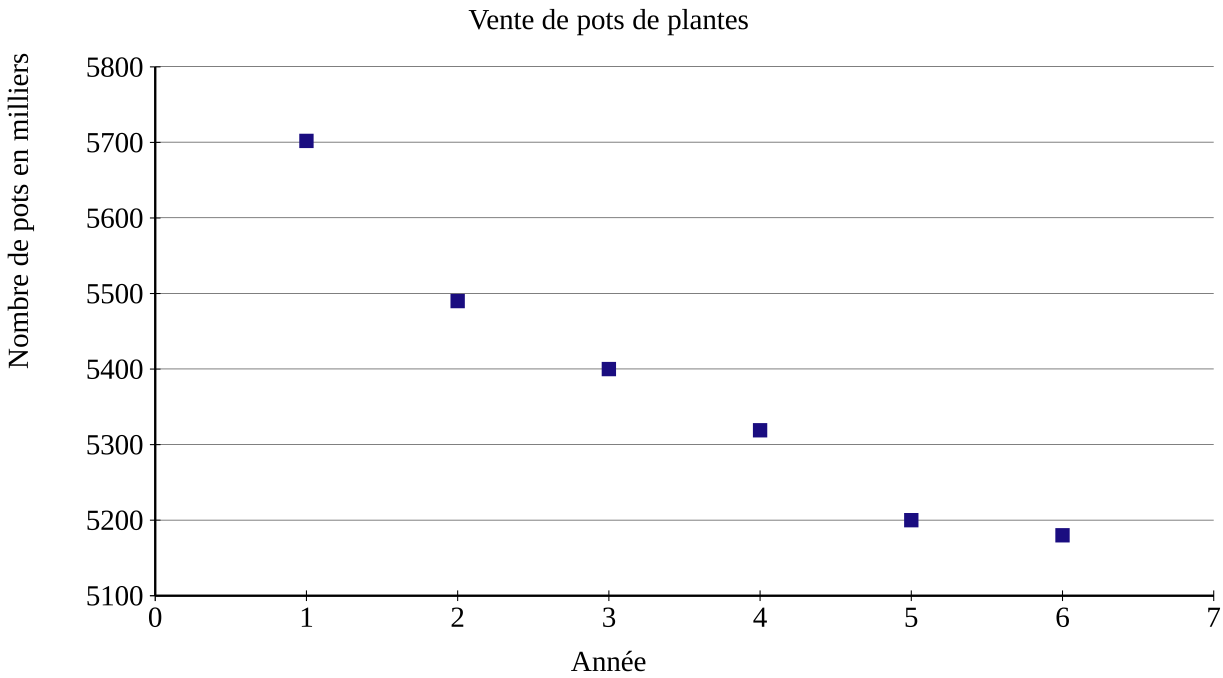
Le Monde du 26/01/2004

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.
   Les unités graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.
2. a) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b) Tracer cette droite sur le graphique.
   c) Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul le PIB de la Chine en 2004. Commenter le résultat obtenu.
3. On envisage dans celte question un ajustement exponentiel.
   En posant $z = \ln y$ on obtient une droite d'ajustement de z en x d'équation $z = 0{,}08x + 5{,}46$.
   a) On se propose de déterminer alors y en fonction de x sous la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ où α et β sont deux réels. Montrer que $y = 235{,}10e^{0{,}08x}$.
   b) Tracer sur le graphique la courbe d'équation $y = 235{,}10e^{0{,}08x}$, pour $x \in [0; 24]$.
   c) Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul, le PIB de la Chine en 2004.
4. Le PIB de la Chine pour 2004 était de 1 650 milliards de dollars (Source internet).
   Calculer en pourcentage par rapport à la valeur réelle, les erreurs commises en prenant comme PIB les estimations obtenues aux questions 2 et 3.

EXERCICE 3 *La Réunion 2006 (1)*

Le tableau suivant donne l'évolution de la vente de pots de plantes vertes en milliers de pots en France, de 1999 à 2004.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre $_i$ de pots de plantes (en milliers de pots)	5 702	5 490	5 400	5 319	5 200	5 180



Pour ce nuage de points, un ajustement affine ne semble pas adapté. On cherche alors un ajustement exponentiel.

1. On pose $z_i = \ln y_i$.

   a) Calculer les valeurs z_i, du tableau associées aux rangs x_i, en arrondissant au centième et pour i variant de 1 à 6. *On portera ces valeurs dans le tableau ci-dessous.*

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de pots de plantes	5 702	5 490	5 400	5 319	5 200	5 180
$z_i = \ln y_i$						

   b) Construire, sur une feuille de papier millimétré, le nuage de points $N_i(x_i; z_i)$, dans le repère orthogonal défini de la manière suivante :

   — sur l'axe des abscisses, on place 0 à l'origine et on prend 2 cm pour représenter 1 année

   — sur l'axe des ordonnées, on place 8,50 à l'origine et on prend 1 cm pour représenter 0,01.

2. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (*on ne demande pas le détail des calculs*). Les coefficients seront arrondis au centième.

   b) Tracer la droite d dans le repère précédemment défini.

   c) Déterminer la relation entre y et z, sous la forme $y = Ae^{Bx}$, qui traduit l'équation de la droite d'ajustement d. Le nombre A est arrondi à l'unité et le nombre B arrondi au centième,

3. a) On suppose que l'évolution de la vente reste conforme à l'ajustement calculé à la question 2.
   Donner alors une estimation du nombre de pots qu'on peut espérer vendre en 2006, exprimé en milliers de pots (résultat arrondi à l'unité).

   b) Une étude concurrente donne une estimation pour 2006 de 5 085 milliers de pots vendus.
   Calculer la différence entre les deux estimations. Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à la première estimation ? (on donnera une valeur approchée arrondie au centième de ce résultat).

III. 3 AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS

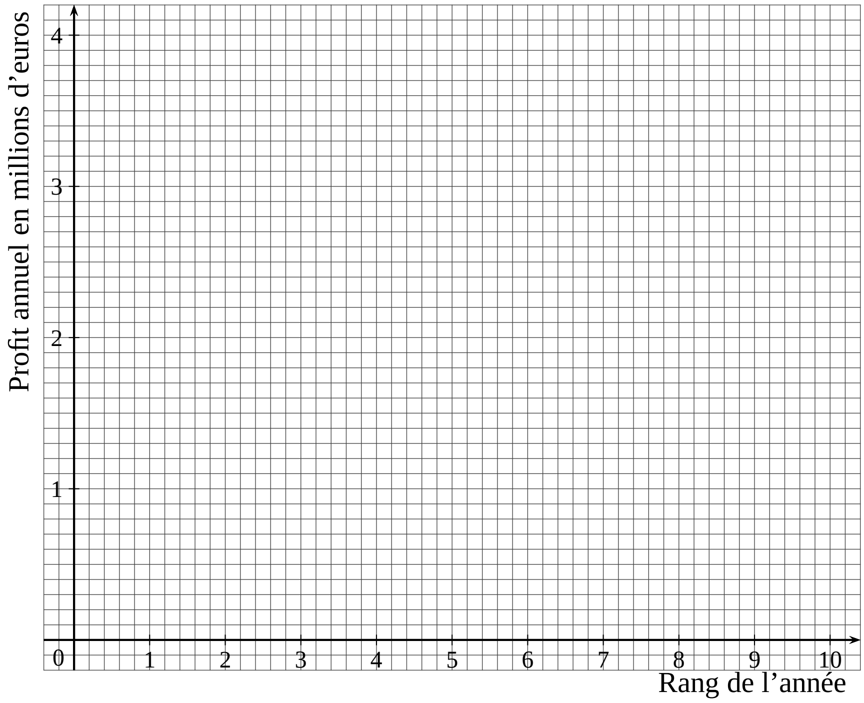
EXERCICE 1

Asie 2006 (2 obligatoire)

Le tableau suivant donne l'évolution du profit annuel d'une entreprise de l'année 1999 à l'année 2005.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Profit annuel en millions d'euros (y_i)	1,26	1,98	2,28	2,62	2,84	3,00	3,20

1. Construire le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans le repère orthogonal représenté ci-dessous.



2. La forme du nuage suggère un ajustement logarithmique. On décide donc d'étudier la série $(x_i; z_i)$, où $z_i = e^{y_i}$.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs décimales arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = e^{y_i}$	3,53			13,74	17,12	20,09	24,53

3. Donner l'équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les résultats obtenus à la calculatrice seront arrondis au centième (avec ces arrondis, on obtient une équation de la forme $z = ax$).
4. En déduire que la courbe d'équation $y = \ln(x) + 1,23$ approche le nuage de points.
5. On suppose que l'évolution du profit annuel se poursuit suivant ce modèle.
   a) Calculer le profit annuel, exprimé en millions d'euros, attendu pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
   b) Déterminer à partir de quelle année le profit annuel initial (c'est à dire celui de l'année 1999) aura au moins triplé.

EXERCICE 2 *France Métropolitaine Juin 2006 (3)*

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes

Le tableau ci-dessous donne la consommation médicale (exprimée en milliards d'euros) de la population d'un pays :

Année	1990	1995	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	11	12	13
Consommation y_i	38	49,1	51,81	57	62,7	68,97

D'après INSEE.

PARTIE A

Le but de cette partie est de mettre en œuvre deux modélisations de cette consommation médicale.

1. **Premier modèle**
   a) On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.
   b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
2. **Deuxième modèle**
   a) Calculer l'accroissement relatif de la consommation médicale de l'année 2000 à l'année 2001, puis de l'année 2001 à l'année 2002 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).
   b) À partir de l'année 2000, on modélise la consommation médicale par $y = 51{,}81 \times 1{,}1^n$ pour l'année $2000 + n$ avec n entier naturel.
   En utilisant ce deuxième modèle, en déduire une estimation de la consommation médicale en milliards d'euros pour l'année 2008 (donner la valeur décimale arrondie au centième).

PARTIE B : Réduction des dépenses

Pour l'année 2005, la consommation médicale réelle s'est élevée à 83,44 milliards d'euros. Il a été décidé de réduire les dépenses et de les ramener en 2006 à 69,79 milliards d'euros.
De quel pourcentage (arrondi à 1 %) la consommation médicale doit-elle baisser pour atteindre cet objectif ?

Rappel de définitions

On désigne par a_1 et a_2 des nombres réels strictement positifs tels que $a_2 > a_1$.

— L'accroissement absolu de a_1 à a_2 est égal à $a_2 - a_1$.

— L'accroissement relatif de a_1 à a_2 est égal à $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1}$.

EXERCICE 3 *Liban 2006 (3)*

Sauf indication contraire, on arrondira les résultats à 10^{-2} *près.*

Le taux de pénétration du téléphone mobile dans la population française indique le pourcentage de personnes équipées d'un téléphone mobile par rapport à la population totale.
Le tableau ci-dessous donne, entre 1998 et 2004, l'évolution de la population française et du taux de pénétration.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Population française en millions	60,05	60,32	60,67	61,04	61,43	61,80	62,18
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

Source : site de l'INSEE

1. a) Calculer le nombre, en millions, de personnes équipées d'un téléphone mobile en 1999 et en 2004.

   b) Entre ces deux années quel est le pourcentage d'augmentation du taux de pénétration ?

2. Placer dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$: les unités graphiques sont de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées.

3. L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme $y = a\ln(x) + b$ où a et b sont des réels. On pose pour cela $z = \ln(x)$.

   a) Recopier et compléter le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	0						
Taux de pénétration y_i	18,7	34,2	48,9	60,6	62,8	67,5	71,6

   b) En déterminant avec la calculatrice une équation de la droite de régression de y en z, obtenue par la méthode des moindres carrés, donner la valeur approchée décimale à 10^{-2} près par défaut des coefficients a et b.

4. En admettant que cet ajustement reste fiable à moyen terme :

   a) Déterminer le taux de pénétration en 2006 que l'on peut alors envisager.

   b) À partir de quelle année peut-on penser que le taux de pénétration dépassera 85 % ?

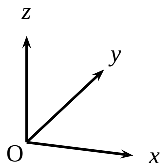
IV SPÉCIALITÉ

IV. 1 FONCTION DE DEUX VARIABLES

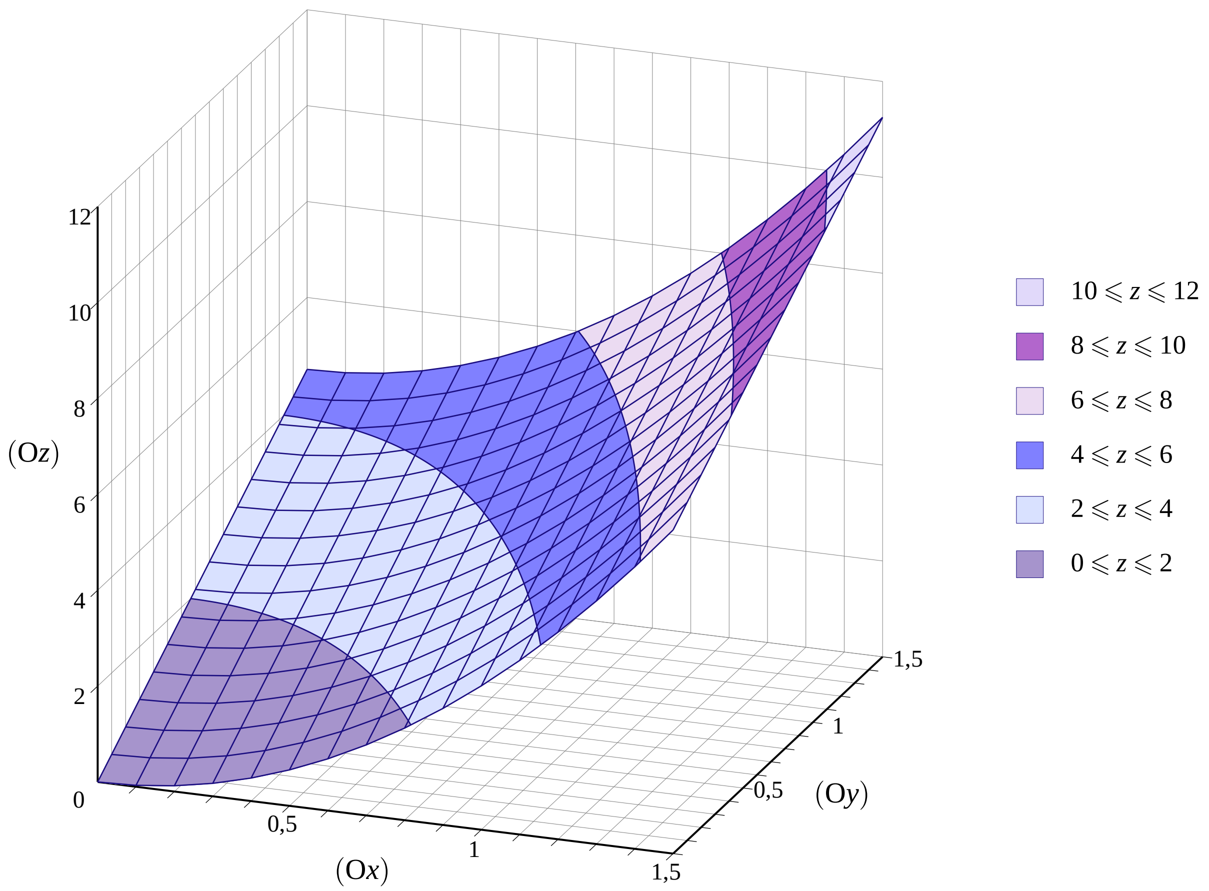
EXERCICE 1

Asie 2006 (2)

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0;1{,}5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0;1{,}5]$.



PARTIE A : Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1;1;6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

PARTIE B : Recherche d'un coût minimum.

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.
On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.
Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x;y) = 3\left(x^2 + y\right)$.

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

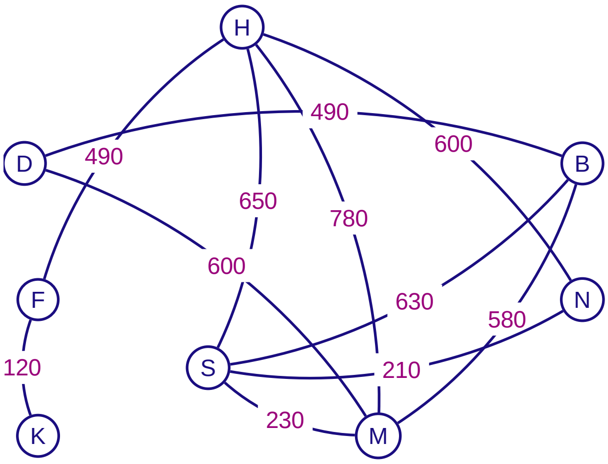
1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x+y=2$.
   Exprimer $C(x;y)$ en fonction de la seule variable x. On note f la fonction ainsi obtenue.
   Vérifier que $f(x)=3x^2-3x+6$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[0;1{,}5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x=0{,}5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

IV. 2 GRAPHES

EXERCICE 1 *Amérique du Sud 2006 (2)*

1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.

   Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.

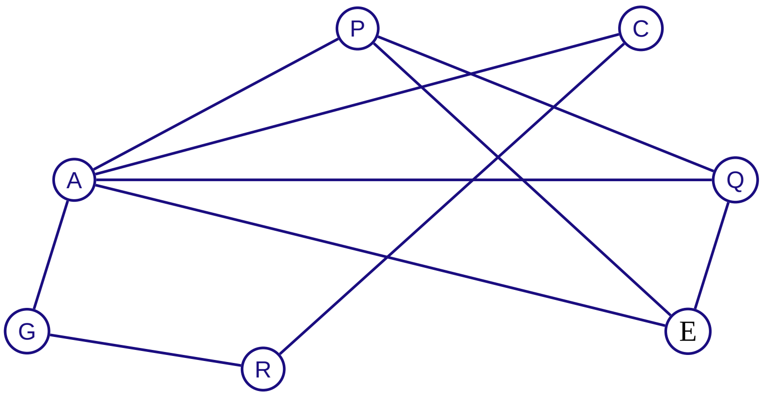
   

   En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.

2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.

   L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.

   On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B.

   a) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.

   b) Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

EXERCICE 2

Antilles Guyane 2006 (2)

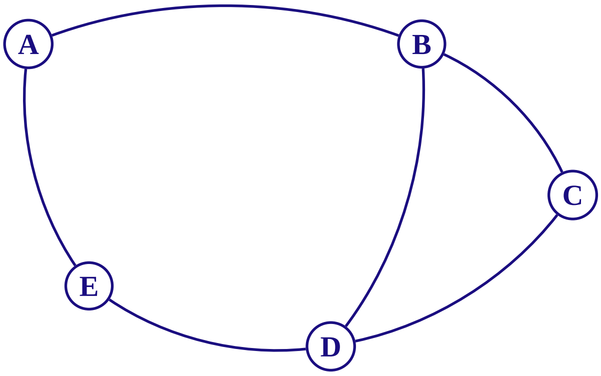
Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres.
Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

1. Représenter par son graphe G la situation
2. a) Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.
   b) Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ?
   Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?
3. a) Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.
   b) En déduire un encadrement de C, nombre chromatique de G.
4. a) Procéder à la coloration du graphe G.
   b) Que peut-on en déduire pour le nombre C ? Justifier avec soin.
   c) Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

EXERCICE 3 *Liban 2006 (2)*

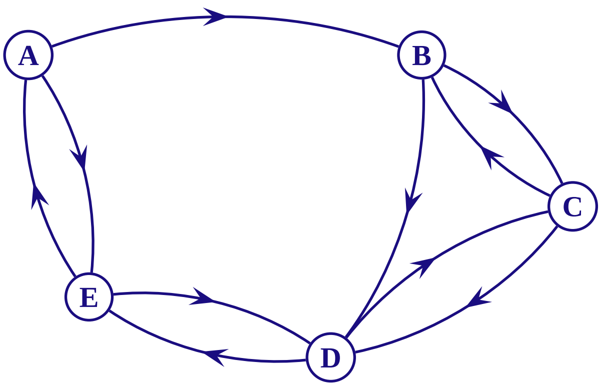
1. Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.
   On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :



Graphe G

   a) On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.
      Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier.
      Déterminer ce nombre.
   b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

2. Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens.
   Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B.
   Le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :

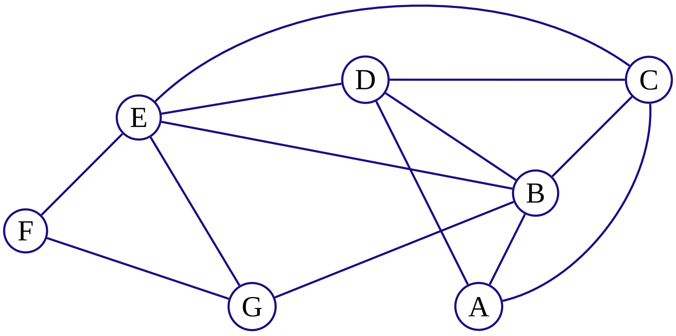


Graphe G'

   a) Donner la matrice M associée au graphe G'. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).
   b) On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$
      Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ?
      Les donner tous.
   c) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle ?
      En est-il de même pour le sommet B ?

EXERCICE 4 *Polynésie 2006 (2)*

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathscr{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathscr{G}$?
2. a) Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.

   Proposer un coloriage adapté à cette condition.

   b) Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathscr{G}$?
3. a) Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?

   b) Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?
4. a) En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à $\mathscr{G}$.

   b) On donne :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6\,945 & 9\,924 & 8\,764 & 8\,764 & 9\,358 & 3\,766 & 5\,786 \\ 9\,924 & 14\,345 & 12\,636 & 12\,636 & 13\,390 & 5\,486 & 8\,310 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,178 & 11\,177 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,177 & 11\,178 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 9\,358 & 13\,390 & 11\,807 & 11\,807 & 12\,634 & 5\,095 & 7\,807 \\ 3\,766 & 5\,486 & 4\,829 & 4\,829 & 5\,095 & 2\,116 & 3\,181 \\ 5\,786 & 8\,310 & 7\,369 & 7\,369 & 7\,807 & 3\,181 & 4\,890 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?
5. a) Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

   b) Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

IV. 3 GRAPHES PROBABILISTES

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2006 (2)

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.
Le premier jour, 15 % du personnel souhaite le déclenchement d'une grève. À partir de ce jour-là :

— parmi ceux qui souhaitent (e déclenchement d'une grève un certain jour, 35 % changent d'avis le lendemain.

— parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33 % changent d'avis le lendemain.

On note :

— g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n,

— t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n,

— $P_n = \begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$, la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3e jour.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable (on rappelle que $x + y = 1$).

   a) Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0{,}65x + 0{,}33y$.

   b) Déterminer x et y (on arrondira les résultats à 10^{-3} près).

   c) Interpréter le résultat.

EXERCICE 2 *Centres étrangers 2006 (2)*

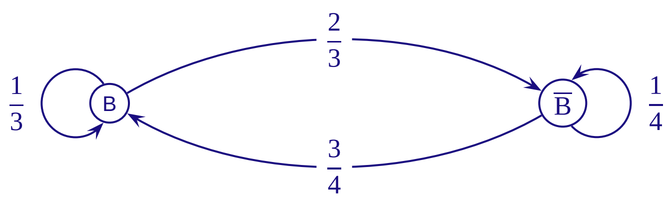
Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.
   On sait que :
   - S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{6}$
   - Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{2}$
   - S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il fasse beau est $\frac{1}{2}$

   On note :
   - B : « le temps est beau » ;
   - V : « le temps est variable » ;
   - P : « le temps est pluvieux ».

   a) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
   b) Donner la matrice de transition de ce graphe. Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.
   c) Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste dans n jours est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} b_n & v_n & p_n \end{pmatrix}$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau dans n jours, v_n la probabilité que le temps soit variable dans n jours et p_n la probabilité qu'il pleuve dans n jours.
   Aujourd'hui il fait beau, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice ligne décrivant l'état initial.
   Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2. Dans une autre région, on note B : « il fait beau » $\overline{\text{B}}$: « il ne fait pas beau ».
   Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



   a) Donner la matrice de transition T de ce graphe.
   b) Soit $Q = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$.
   Déterminer x et y tels que $Q = QT$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 3 *France Métropolitaine Juin 2006 (2)*

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage. On admet que :

— si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à 0,6 ;

— si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à 0,35.

PREMIÈRE PARTIE

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1. Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.
2. En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $\begin{pmatrix} 70 & 120 \end{pmatrix}$. En donner une interprétation.

DEUXIÈME PARTIE

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année $2000+n$. On a donc $X_0 = 60$.
On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0{,}05X_n + 66{,}5$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0{,}05^n$.

   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

EXERCICE 4 *Nouvelle Calédonie 2006 (3)*

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.
Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.
Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

— 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,

— 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.
On appelle $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année $2003+n$:

— a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année $2003+n$

— b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année $2003+n$

— $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Déterminer l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.
3. a) Déterminer la matrice de transition M associée au graphe.
   (Rappel M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)
   b) En admettant que, en 2005, 36,25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)
4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$.
   (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$)
   a) Déterminer les nombres x et y.
   b) En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.
5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %.
   Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

EXERCICE 5 *Nouvelle Calédonie Remplacement 2006 (2)*

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

— La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7.

— Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n+1)$ est seulement de 0,4.

— Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n+1)$ est de 0,9.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'évènement : « A gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{\text{ième}}$ semaine », et on note $a_n = p(A_n)$.
Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n), en utilisant deux méthodes différentes.

PREMIÈRE MÉTHODE : graphe probabiliste

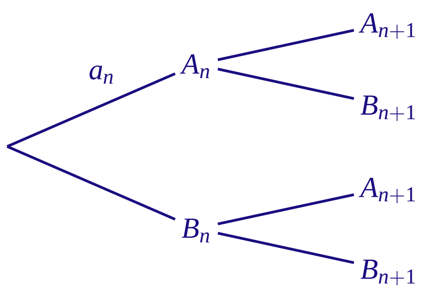
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1-a_n \end{pmatrix}$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ième}}$ semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.
2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$.
   Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la $4^{\text{ème}}$ semaine ?
3. Déterminer la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ telle que $P \times M = P$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

DEUXIÈME MÉTHODE : probabilité et suites

Dans cette deuxième partie, on ne tient pas compte de résultats démontrés dans la partie précédente.

1. a) Recopier sur votre copie l'arbre ci-dessous, et compléter l'arbre avec les 5 probabilités manquantes.



   b) Justifier que $a_{n+1} = 0,9 - 0,5a_n$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par : $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $(-0,5)$.
   b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).

EXERCICE 6 *Polynésie Septembre 2006 (2)*

Une commune possède deux clubs de sport que l'on note A et B.
Le club A est installé depuis 1990, le club B a ouvert ses portes au cours de l'année 2004.
Au premier janvier 2005, on constate que 1 100 personnes sont abonnées au club A et 400 au club B.
Le prix de l'abonnement est moins coûteux au club A ; les activités proposées sont plus nombreuses au club B. Aussi, chaque année, 14 % des abonnés au club A changent pour le club B et 6 % des abonnés au club B changent pour le club A.
On suppose que la population totale des abonnés reste constante et qu'une personne ne s'abonne jamais aux deux clubs en même temps.

On note a_n le nombre d'abonnés au club A et b_n le nombre d'abonnés au club B au premier janvier de l'année $2005+n$.
E_n désigne la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$; ainsi $E_0=\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1100 & 400\end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste.
2. a) Écrire la matrice de transition M telle que $E_{n+1}=E_n\times M$.
   En déduire E_n en fonction de E_0,M et n. On ne demande pas de démontrer le résultat.
   b) Calculer M^2 . En déduire le nombre d'abonnés aux deux clubs au premier janvier 2007.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1}=0,8\times a_n+90$.
   b) Pour n entier naturel, on pose : $u_n=a_n-450$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1}=650\times 0,8^n+450$.
   d) Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat pour les deux clubs sportifs.

EXERCICE 7 *Pondichéry 2006 (2)*

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.
La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.
L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel n, on note pour la saison $(2005+n)$:

— a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),

— b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, la matrice traduisant l'état probabiliste, avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondies à 10^{-4}.

1. a) Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.

   b) On note M la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & \dots \\ 0,15 & \dots \end{pmatrix}$

2. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45 % des touristes. On a donc $a_0 = 0,45$.

   a) Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.

   b) Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels positifs tels que $a+b=1$.

   a) Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   c) Interpréter ce résultat.

4. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\dfrac{3}{7}$.

   On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres.

   Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

IV. 4 SUITES

EXERCICE 1

La Réunion 2006 (2)

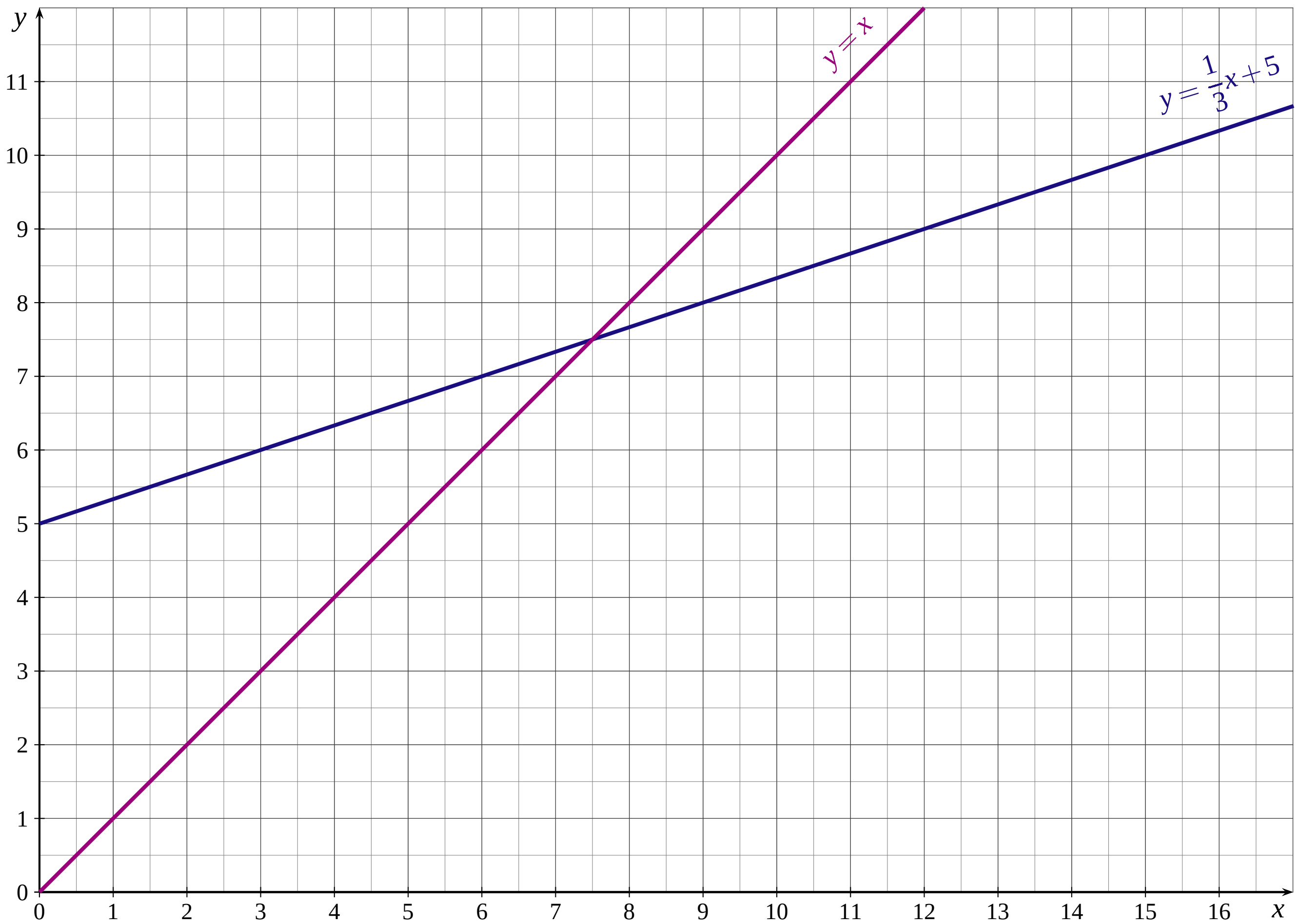
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 & = & 12 & \text{et} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 5 & \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 5$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n). (*Cette construction est à faire sur le graphique de l'annexe ci-dessous*)
   Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par : $v_n = u_n - \dfrac{15}{2}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis en déduire la limite de la suite (u_n).
3. Est-il possible de déterminer n de sorte que :
   a) $u_n - \dfrac{15}{2} \leqslant 10^{-6}$?
   b) $u_n - \dfrac{15}{2} \geqslant 10^{6}$?

ANNEXE

À rendre avec la copie



EXERCICE 2 *La Réunion Septembre 2006 (2)*

Lors de sa création au 1er janvier 2000, un club de sport a 300 adhérents. À la fin de la première année, trois quarts des adhérents se réinscrivent et 120 nouveaux membres adhèrent.
Pour tout nombre entier naturel n, on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, exprimé en centaines, n années après la création du club.
On a donc $a_0 = 3$. On suppose que le nombre d'adhérents au club évolue de la même façon les années suivantes.
Ainsi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 1,2$.

PARTIE A : Étude graphique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans le repère donné en ANNEXE, à rendre avec la copie, on a représenté la droite D d'équation $y = 0,75x + 1,2$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour les abscisses comprises entre 0 et 6.

1. Placer a_0 sur l'axe des abscisses et, en utilisant les droites D et Δ, placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 (*laisser apparents les traits de construction*).
2. Quelle semble être la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

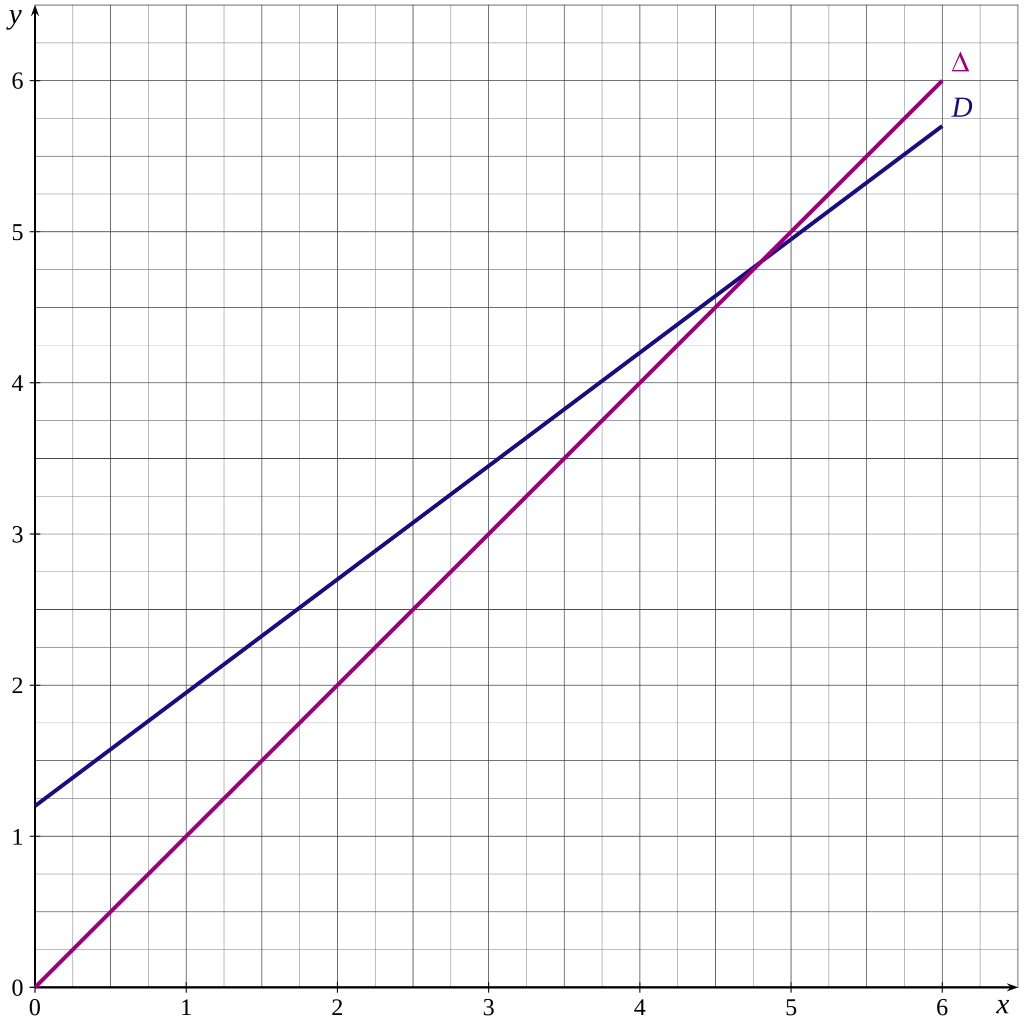
PARTIE B : Étude numérique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - 4,8$ pour tout nombre entier naturel n.

1. a) Calculer u_0.
   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,75.
   c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $a_n = 4,8 - 1,8 \times (0,75)^n$.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2. Si l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit selon ce modèle, le club peut-il avoir 500 adhérents durant une année ? Pourquoi ?

ANNEXE

À rendre avec la copie



BACCALAURÉAT 2006

SÉRIE ES : INDEX DES DIFFÉRENTS SUJETS