BAC 2007

SÉRIE ES

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2007

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2007

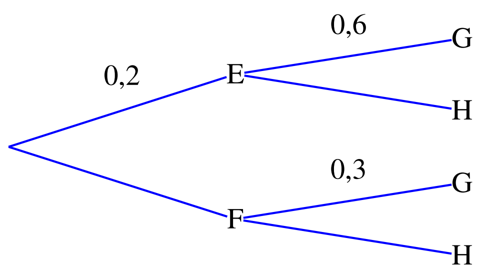
AMÉRIQUE DU NORD 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste àa cocher la réponse exacte sans justification.
Une bonne réponse apporte 1 *point, une mauvaise enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à* 0.

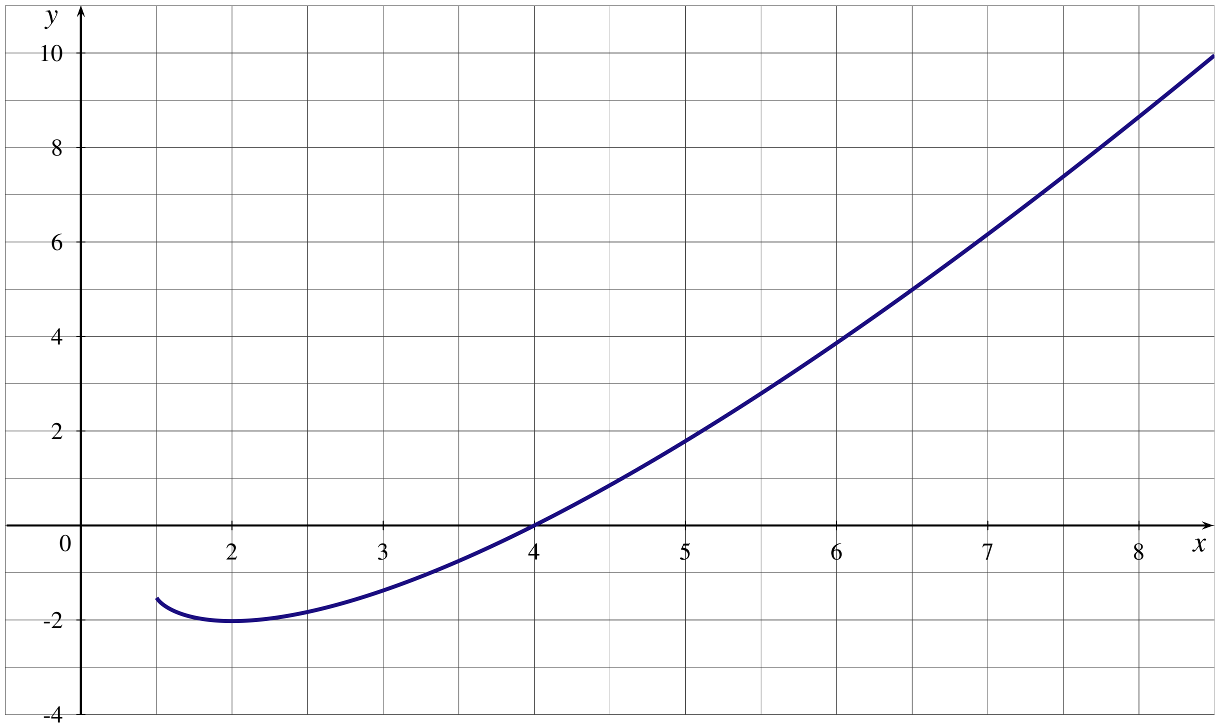
COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE

Rappel : La notation $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ désigne la probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

QUESTIONS	
1. A et B sont deux évènements indépendants tels que $p(A) = 0{,}7$ et $p(B) = 0{,}2$.	☐ $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}14$ ☐ $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}9$ ☐ $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0{,}5$
2. Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?	☐ $\frac{18}{81}$ ☐ $\frac{72}{81}$ ☐ $\frac{65}{81}$
3. On considère l'arbre pondéré ci-dessous.  Quelle est la probabilité de $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$?	☐ $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{F}) = 0{,}7$ ☐ $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{F}) = 0{,}56$ ☐ $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{F}) = 0{,}875$
4. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire, avec remise, une boule au hasard, n fois de suite (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?	☐ $1 - \frac{1}{2^n}$ ☐ $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ☐ $1 - \frac{1}{2^{2n}}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $J = \left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\ ;\ -2)$.
On note f la fonction dérivée de F.



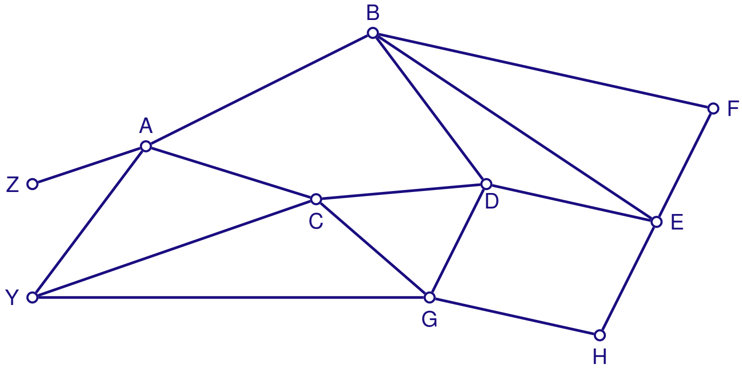
1. a) à l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.
   b) Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
   c) Calculer $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{2x-1},\ \ f_2(x) = \ln(2x-1)\ \text{ et }\ f_3(x) = -1 + \frac{1}{2x-1}.$$

   Une de ces trois fonctions est la fonction f.
   a) Étudier le signe de f_1 sur l'intervalle J.
   b) Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur l'intervalle J.
   c) Calculer $f_3(1)$.
   d) Calculer $\int_1^3 f_3(x)\,\mathrm{d}x$.
   e) En déduire la fonction f.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

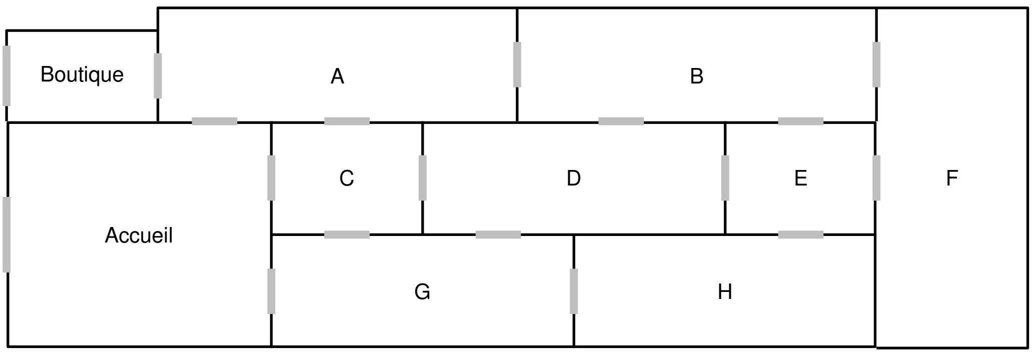
PREMIÈRE PARTIE : Étude d'un graphe



On considère le graphe ci-dessus.

1. a) Ce graphe est-il connexe ?
   b) Déterminer le degré de chacun des sommets.
   On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
   c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
2. a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
   b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

DEUXIÈME PARTIE : Visite d'un musée



Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
   b) Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans tout l'exercice, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.
On rappelle que l'image d'un réel x par la fonction exponentielle peut être notée $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela, on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.
On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en secondes, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1. **Étude d'un modèle affine**

   a) Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées. On commencera les graduations au point de coordonnées $(0;9)$.

b) Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ?

2. **Étude d'un modèle exponentiel**

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe. On effectue les changements de variables suivants :

$$X = \mathrm{e}^{-0,00924x} \text{ et } Y = \ln y.$$

On obtient le tableau suivant :

$X_i = \mathrm{e}^{-0,00924x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

b) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante : $y = \exp\left(a\mathrm{e}^{-0,00924x} + b\right)$ où a et b sont deux réels à déterminer.

c) à l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?

d) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante :

$$f(t) = \exp\left(0,154\mathrm{e}^{-0,00924x} + 2,221\right).$$

e) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quant aux records du cent mètres masculin, à très long terme ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PREMIÈRE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$.
On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.
Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

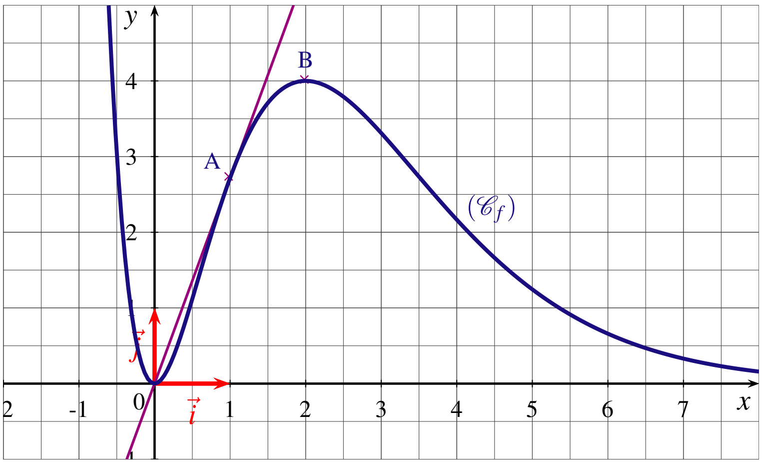
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

AMÉRIQUE DU SUD 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe $(\mathscr{C}_f)$:
– la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$;
– la courbe $(\mathscr{C}_f)$ passe par l'origine du repère et par les points $A(1;\text{e})$ et $B(2;4)$;
– la droite (OA) est tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, en utilisant les informations données par l'énoncé, cocher la cas V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse). Il n'est pas demandé de justifier les réponses. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en rapporte aucun. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.	☐ V	☐ F
2. L'équation $f(x)=0{,}1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.	☐ V	☐ F
3. $f'(1)=f(1)$.	☐ V	☐ F
4. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\text{d}x<5$.	☐ V	☐ F
5. $\displaystyle\int_1^3 f'(x)\,\text{d}x<1$.	☐ V	☐ F
6. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.	☐ V	☐ F
7. $F(5)>F(6)$.	☐ V	☐ F
8. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0;2]$.	☐ V	☐ F

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

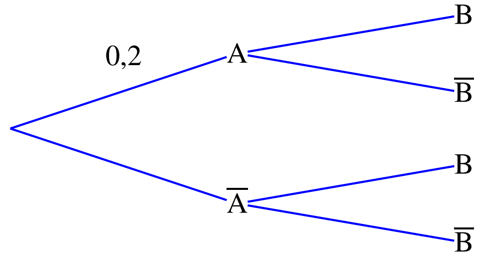
L' éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.
On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0,2 ; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 ; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1.

PARTIE I

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.
On note :

- A l'évènement « la personne s'abonne à l'édition papier »,
- B l'évènement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,
- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A, $\overline{\text{B}}$ l'évènement contraire de B.

1. a) Reproduire et compléter l'arbre suivant :



   b) Donner la probabilité de $\overline{\text{B}}$ sachant A et la probabilité de $\overline{\text{B}}$ sachant $\overline{\text{A}}$.

2. a) Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

   b) Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à 0,16.

   c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?

PARTIE II

Pour chacune des personnes contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue
– 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
– 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
– 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
– 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5000 lecteurs potentiels.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

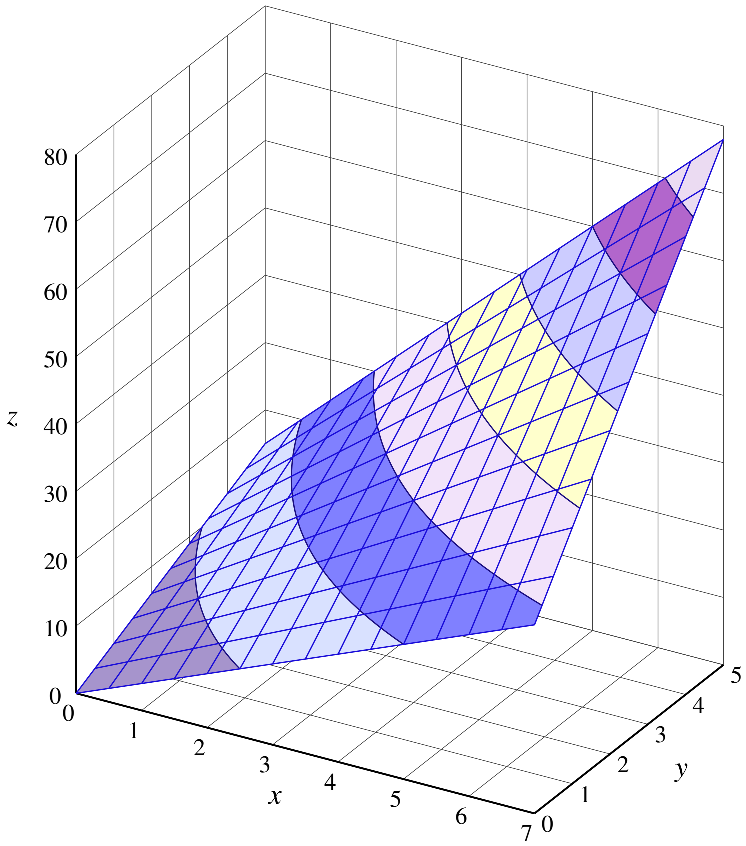
On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$ et tout réel y de l'intervalle $[0;5]$ par :

$$f(x;y) = 4x + 3y + xy.$$

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

PARTIE A

On appelle $\mathscr{S}$ la surface représentant la fonction f dans un repère orthogonal de l'espace.
La figure ci-après, à rendre avec la copie, donne une vue de la surface $\mathscr{S}$.



1. A est le point de $\mathscr{S}$ d'abscisse 3 et d'ordonnée 4, B est le point de $\mathscr{S}$ d'ordonnée 2 et de cote 40.
   a) Placer les points A et B sur la figure.
   b) Déterminer la valeur exacte de la cote du point A et la valeur exacte de l'abscisse du point B.
2. On appelle $\mathscr{L}$ l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $y = 4$.
   Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{L}$ et surligner en couleur cet ensemble sur la figure.

PARTIE B

Les activités d'une grosse entreprise sont réparties entre deux secteurs : le secteur P (production) et le secteur C (commercialisation).
Cette entreprise envisage d'investir au cours de l'année 2008 jusqu'à 7 millions d'euros dans le secteur P et jusqu'à 5 millions d'euros dans le secteur C.
Le service chargé d'évaluer l'effet de ces investissements sur le chiffre d'affaire 2009 de l'entreprise, propose le modèle suivant :
Pour $0 \leqslant x \leqslant 7$ et $0 \leqslant y \leqslant 5$, si l'entreprise investit au cours de l'année 2008, x millions d'euros dans le secteur P et y millions d'euros dans le secteur C, cela entraînera en 2009 une hausse du chiffre d'affaire égale à $f(x\ ;\ y)$ millions d'euros.

1. Déterminer la hausse du chiffre d'affaire 2009 prévue par ce modèle dans chacun des cas suivants :
   a) $x = 3$ et $y = 5$;
   b) $x = 7$ et $y = 1$.
2. On suppose que l'entreprise décide de fixer à 8 millions d'euros le montant total des investissements prévus au cours de l'année 2008.
   a) Montrer que, sous cette contrainte, on peut exprimer $f(x\ ;\ y)$ en fonction de x seulement.
   On note $g(x)$ l'expression ainsi obtenue. Vérifier que $g(x) = -x^2 + 9x + 24$.
   b) Selon le modèle proposé, comment faudra-t-il répartir entre les secteurs P et C les 8 millions euros à investir au cours de l'année 2008 pour obtenir une hausse maximale du chiffre d'affaire de l'année 2009 ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service « bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2001 à l'année 2006.
y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1er janvier de l'année de rang x_i, q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année de rang x_i.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients : y_i (en milliers)	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à « bank.net » : q_i (en milliers)	45	53	63	74	87	103

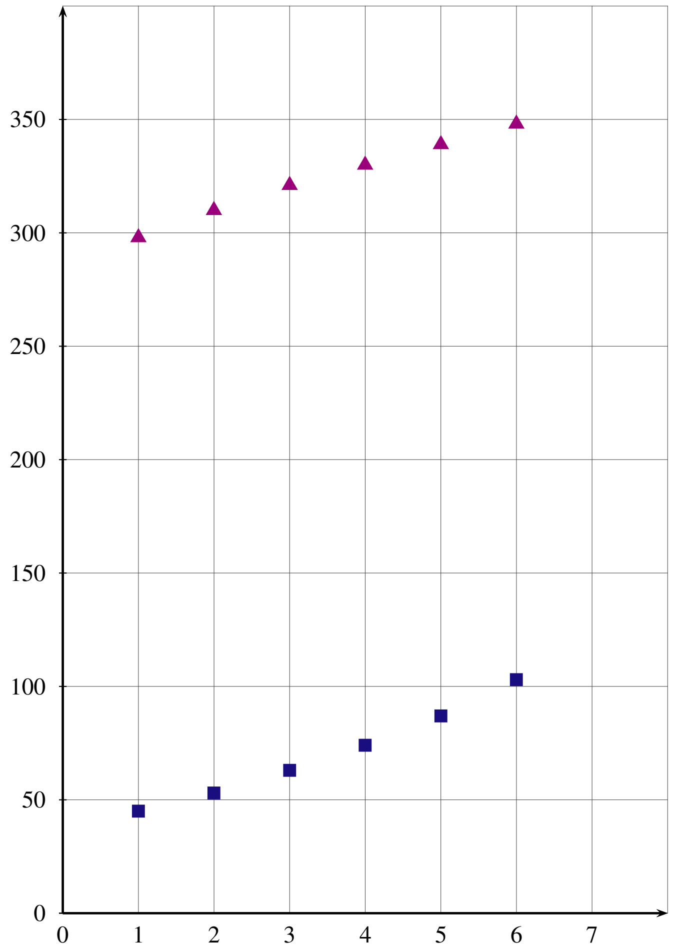
Les séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$ sont représentées sur la figure de l'annexe.

1. a) Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier de l'année 2001 (donner le résultat arrondi à l'unité).
   b) Calculer le taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1er janvier 2001 et le 1er janvier 2006 (ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité).
2. Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.
   a) Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondie à l'unité.
   b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque au premier janvier 2010.
3. La forme du nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ q_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   En effectuant le changement de variable $z_i = \ln(q_i)$, on obtient la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés d'équation $z = 0{,}165x + 3{,}642$.
   a) En déduire une expression de q en fonction de x de la forme $q = kA^x$ et donner les valeurs approchées arrondies au centième des constantes k et A.
   b) On admet que l'évolution du nombre de clients abonnés à « bank.net » entre les années 2001 et 2006 peut être modélisée par la relation $q = 38{,}17 \times (1{,}18)^x$.
   En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2010.
   c) Quel serait, selon l'estimation obtenue à la question 2. b. et l'estimation précédente, le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1er janvier 2010 ?

4. On suppose que, jusqu'au 1er janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2. a. et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question 3.b.
À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016 ? Qu'en pensez-vous ?

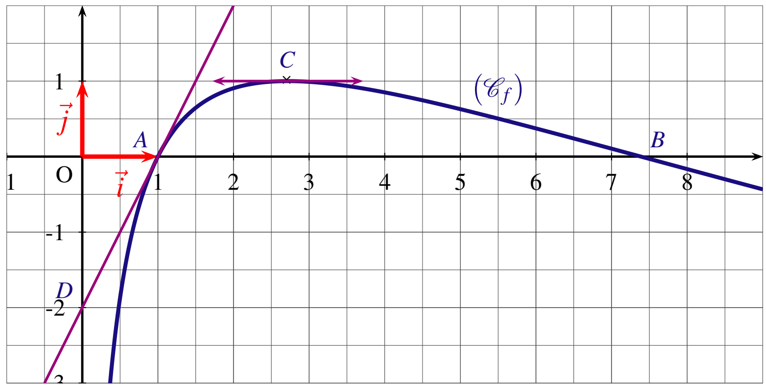
ANNEXE

Représentation graphique des séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$



EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en $A(1;0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
   b) Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x[f(x)+2\ln x-4]$.
   Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

ANTILLES SEPTEMBRE 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.
Barême : *Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. La fonction $F : x \longmapsto \ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par :
   - $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ • $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$ • $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ est égale à :
   - $6(\mathrm{e}-1)$ • $\dfrac{3}{2}(\mathrm{e}-1)$ • $\dfrac{3}{2}\mathrm{e}$
3. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 1$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonorrnal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :
   - $(2 ; 0)$ • $(1 ; -1)$ • $\left(2 ; \dfrac{3}{2} - \ln 2\right)$
4. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
   - $y = 0$ • $y = 2x - \ln 2$ • $y = 2x$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. a) Construire le nuage de points de coordonnées (a_i, y_i) dans le plan muni du repère orthogonal suivant
      – sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm,
      – sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm.

   b) Un ajustement affine semble-t-il adapté ?
2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

   a) Compléter sur la feuille annexe le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

   On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

b) Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

c) En déduire la relation : $y = 61,3\ln x - 197$.

d) Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ?

e) À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise désire construire dans son hall d'entrée un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de hauteur 5 dm (décimètres).
Ses deux autres dimensions, exprimées en dm, sont des entiers naturels x et y tels que $x \in]0\,;\,20[$ et $y \in]0\,;\,20[$.
La structure de cette construction est un bâti métallique correspondant aux 12 arêtes du pavé droit et nécessitant des réglettes d'aluminium dont le prix de revient est de 0,8 euro le dm.
Les quatre parois verticales et le fond de cet aquarium sont construits en verre.

PARTIE A

On décide d'investir exactement 80 euros pour la construction du bâti métallique.

1. Montrer que, pour cet investissement, les dimensions x et y sont liées par la contrainte $x + y = 20$.
2. a) Déterminer en fonction de x et y le volume V, exprimé en dm^3, de cet aquarium.

   b) En déduire le volume V en fonction de x sous la contrainte précédente.
3. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,20[$ par $f(x) = V$.

   a) Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]0\,;\,20[$.

   b) En déduire les dimensions de l'aquarium peur que son volume soit maximal ainsi que la valeur de ce volume maximal.

PARTIE B

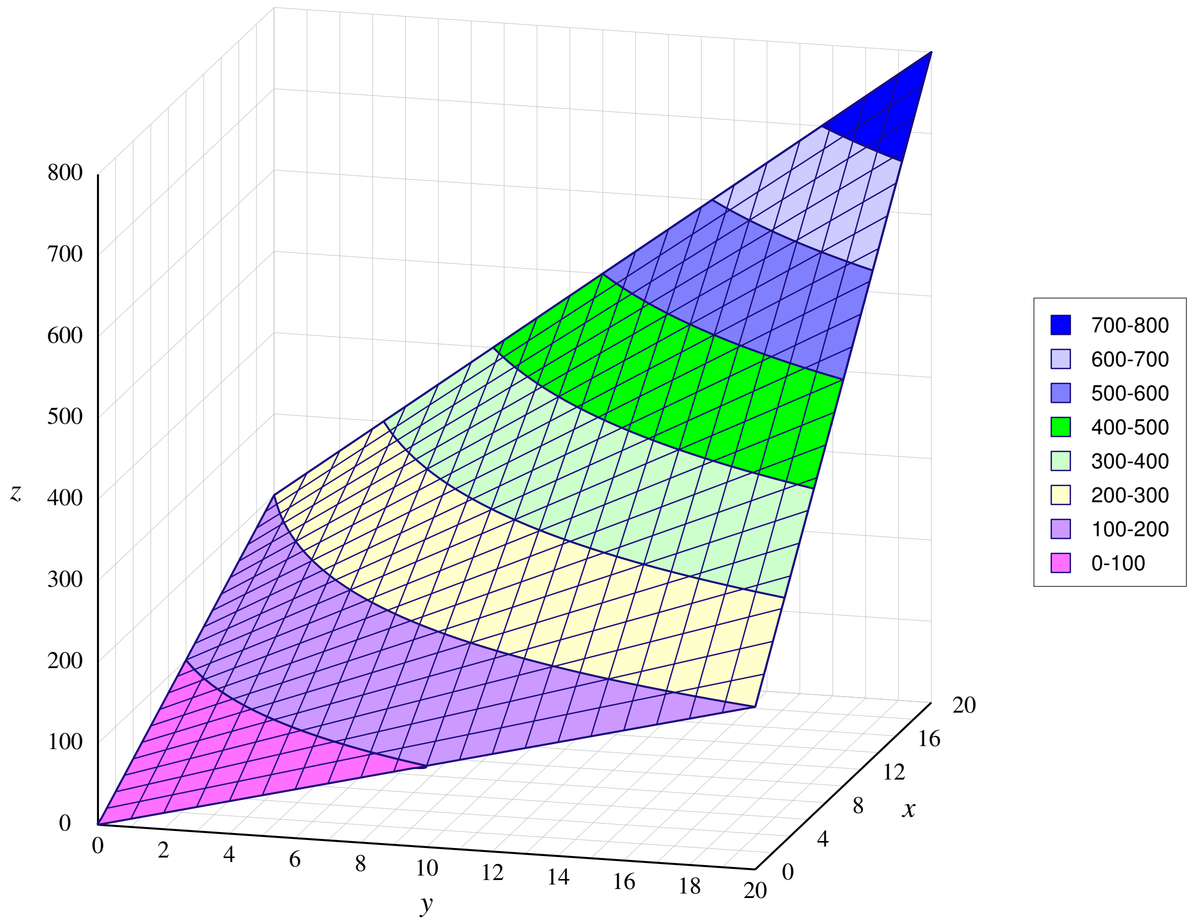
Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0\,;\,20[$ et tout $y \in]0\,;\,20[$ par $g(x,\,y) = xy + 10(x + y)$.
On donne en annexe la représentation graphique de la surface d'équation $z = g(x,\,y)$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Quelle est la nature de la section de cette surface par le plan d'équation $x = 12$, parallèle au plan $\left(\text{O}\,;\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$? Justifier la réponse.
2. Montrer que $g(x,\,y)$ représente en fonction des dimensions x et y l'aire S, exprimée en dm^2, de la surface vitrée de l'aquarium.
3. On suppose pour cette question que $x = 12$.

   a) Calculer l'aire de la surface vitrée de l'aquarium dans le cas où la contrainte de la partie A est respectée.

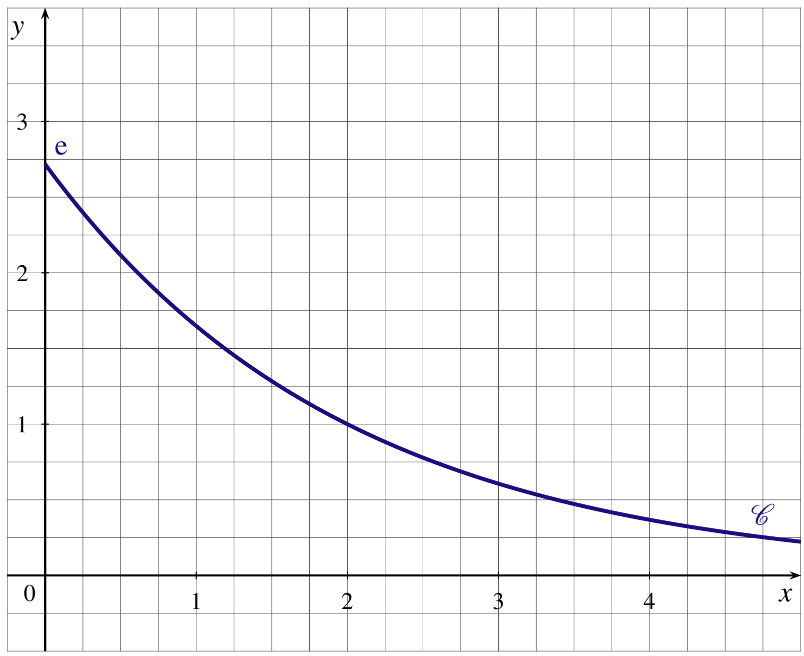
   b) Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de y pour lesquelles l'aire est comprise entre 400 et 500 dm^2.

   c) Vérifier le résultat précédent en utilisant le résultat de la question 1.



EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$ dans un repère orthonormé du plan $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.



1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = -\dfrac{1}{2}x+2$. Tracer T sur le graphique de la feuille annexe.
2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x)+\dfrac{1}{2}x-2$.
   a) Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.
   b) Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Hachurer sur le graphique, le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T, la droite d'équation $x=2$ et l'axe des ordonnées.
   b) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores.
Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.
On note :
– A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».
– A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».
On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2.

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\dfrac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\dfrac{1}{3}$.
   a) Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?
2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\dfrac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\dfrac{1}{3}$.
   a) Illustrer cette situation par un arbre pondéré.
   b) Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\dfrac{1}{3}$.
   c) Calculer $P\left(A_1 \cap A_2\right)$ et $P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$; en déduire $P\left(A_2\right)$.
   d) L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?
3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.
   b) Déterminer la durée moyenne du trajet.

ANTILLES-GUYANE 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.
35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.
Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.
On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.
On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ;
on note C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

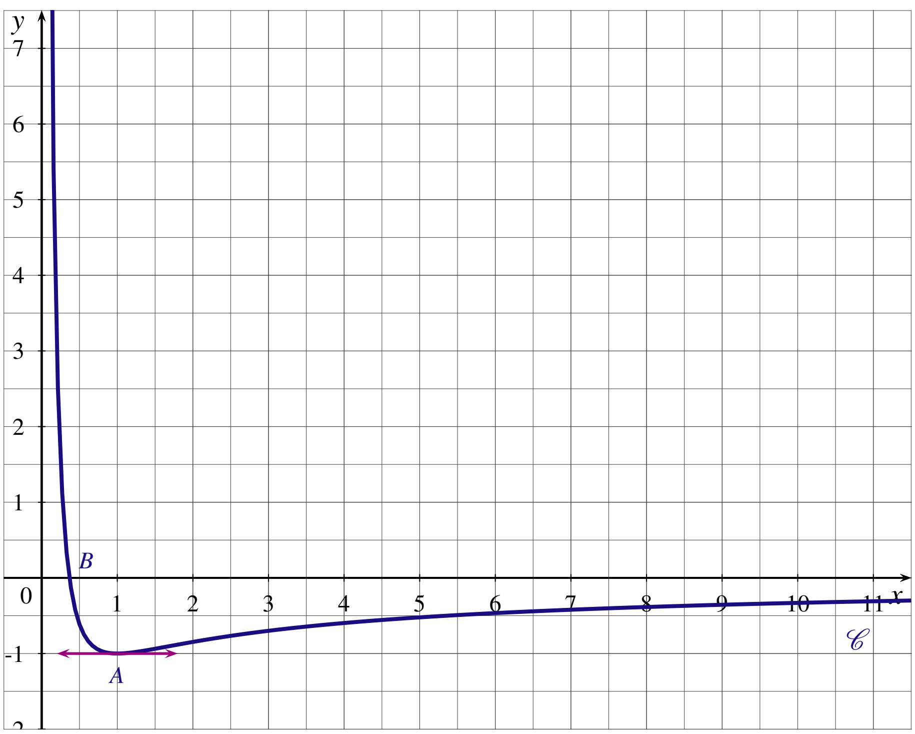
Tous les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au millième.

1. Quelle est la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant ?
2. Sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes ?
3. Décrire l'événement $\overline{E} \cap C$, et montrer que $p\left(\overline{E} \cap C\right) = 0{,}26$.
4. On sait de plus que 30 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
   a) Calculer $p(E \cap C)$.
   b) En déduire la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
Les axes (Ox) et (Oy) sont asymptotes à $\mathscr{C}$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1\ ;\ -1)$ et $B\left(\frac{1}{\text{e}}\ ;\ 0\right)$ et admet une tangente parallèle à (Ox) au point A.



1. En utilisant les données ci-dessus, déterminer sans justification :
   a) $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   c) les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ et les solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
2. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) = \dfrac{a + b \ln x}{x}$ où a et b sont deux nombres réels.
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction des réels a et b.
   b) Utiliser les résultats de la question 1a. pour montrer que $a = -1$ et $b = -1$.
   c) Retrouver les résultats de la question 1c par le calcul.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 personnes le quittent.
En 2005, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année $2005 + n$ exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminer P_0, P_1 et P_2. La suite de terme général P_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier la réponse.
2. Expliquer pourquoi on obtient, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = 1{,}014 P_n + 7$.
3. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = P_n + 500$ pour tout entier naturel n est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
4. Exprimer U_n puis P_n en fonction de n.
5. a) Combien d'habitants peut-on prévoir en 2010 ?
   b) Au bout de combien d'années la population aura-t-elle doublé par rapport à l'année 2005 ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages français, en millions d'euros, de 1998 à 2004.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant en millions d'euros y_i	75	260	820	1650	2300	4000	5300

1. Calculer l'augmentation relative entre 2001 et 2002 du montant des achats.
2. Représenter par un nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 1000 millions d'euros sur l'axe des ordonnées).
3. *Dans cette question, les calculs, effectués à la machine, ne seront pas justifiés et seront arrondis à l'unité.*

   Donner une équation des la droite d'ajustement affine D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter cette droite dans le repère précédent.

4. On propose un deuxième ajustement de cette série statistique par la fonction f définie, pour tout réel positif x, par : $f(x) = 130x^2 + 100x + 68$.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$							

   Construire la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.

5. Le montant des achats en ligne en 2005 a été de 7 700 millions d'euros. Lequel de ces deux ajustements vous paraît-il le plus conforme à la réalité ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\text{e}^x - 1$.
Le tableau suivant est le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	-1	↘	$-\dfrac{1}{\text{e}-1}$	↗	$+\infty$

1. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a strictement positive. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On note f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \text{e}^x - \ln x$.
   a) Étudier la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
   b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f.
   c) Étudier les variations de f puis établir son tableau de variations en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en prenant 0,57 comme valeur approchée de a.
   (*Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées*).
4. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$.
   b) Vérifier que la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln x$.
   c) En déduire une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   d) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$, en unités d'aire, puis donner une valeur en cm^2, arrondie au dixième.

ASIE 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 1 *point, une réponse fausse enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.-

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. Son tableau de variations est donné ci-dessous. On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

x	$-\infty$		2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	e	↘	0

1. On peut affirmer que :

   RÉPONSE A : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   RÉPONSE B : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   RÉPONSE C : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2. La courbe $(\mathscr{C})$ admet :

   RÉPONSE A : la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote.

   RÉPONSE B : la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote.

   RÉPONSE C : la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote.

3. Dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ admet :

   RÉPONSE A : une unique solution.

   RÉPONSE B : deux solutions distinctes.

   RÉPONSE C : trois solutions distinctes.

4. Dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 3$

   RÉPONSE A : n'a pas de solution.

   RÉPONSE B : a toutes ses solutions positives.

   RÉPONSE C : a toutes ses solutions négatives.

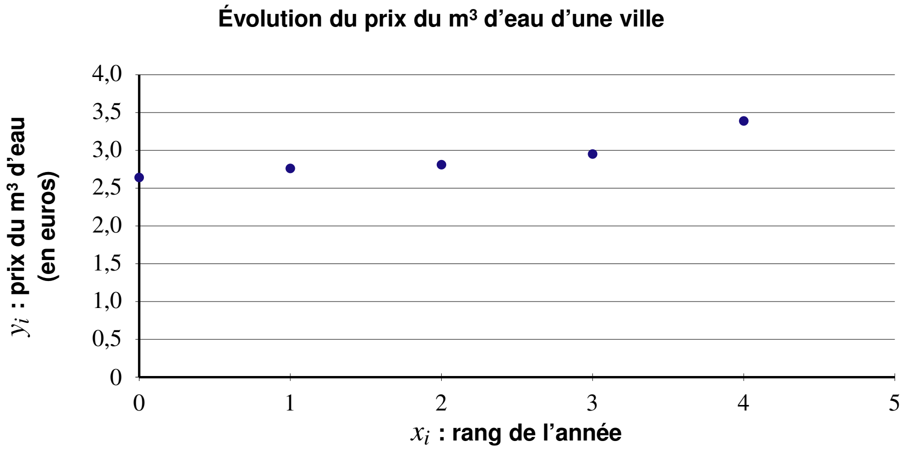
EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution du prix (en euros) du m^3 d'eau, dans une ville, entre 2002 et 2006.

Années	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Prix en euros du m^3 d'eau y_i	2,64	2,76	2,81	2,95	3,39

I. Calculer le pourcentage d'augmentation du prix entre 2002 et 2006. Donner le résultat arrondi à 0,1 %.

II. Le nuage de points associé à cette série statistique est représenté ci-dessous :



L'allure du nuage suggère deux types d'ajustement :

1. **Ajustement affine**

   a) Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant arrondis au centième.

   b) Quelle estimation du prix en euros (arrondie au centième d'euro) du m^3 d'eau peut-on en déduire pour 2010 ?

2. **Ajustement exponentiel**

   On pose $z_i = \ln y_i$.

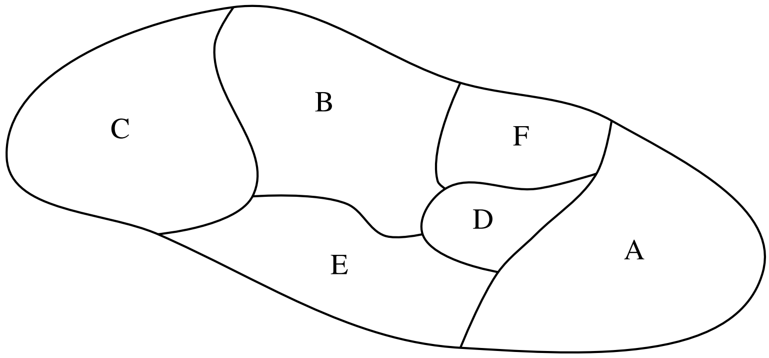
   On prend $z = 0{,}06x + 0{,}95$ pour équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés, avec $z = \ln y$.

   a) En déduire qu'une relation entre y et x s'écrit alors sous la forme $y = \mathrm{e}^{0,95} \times \mathrm{e}^{0,06x}$.

   b) Quelle estimation du prix en euros (arrondie au centième d'euro) du m^3 d'eau peut-on en déduire pour 2010 ?

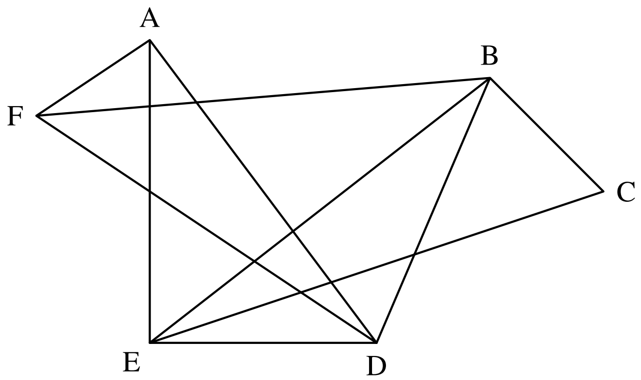
EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-dessous ; est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.



On s'intéresse aux frontières séparant ces provinces. On traduit cette situation par un graphe dont les sommets sont les provinces et où chaque arête représente une frontière entre deux provinces.

On admet que le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous représente cette situation :



1. a) Donner l'ordre du graphe $\mathscr{G}$, puis le degré de chacun de ses sommets
   b) Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières ? Justifier Si oui, proposer un parcours possible.
2. a) Le graphe $\mathscr{G}$ possède-t-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Si oui, en citer un.
   Préciser, sans justification, si le graphe $\mathscr{G}$ possède un sous graphe complet d'ordre 4.
   Quelle consequence cela a-t-il sur le nombre chromatique c du graphe $\mathscr{G}$?
   b) Proposer une coloration de la carte (ou du graphe) avec le minimum de couleurs afin que deux provinces qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes (on peut remplacer les couleurs par différents hachurages).

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.

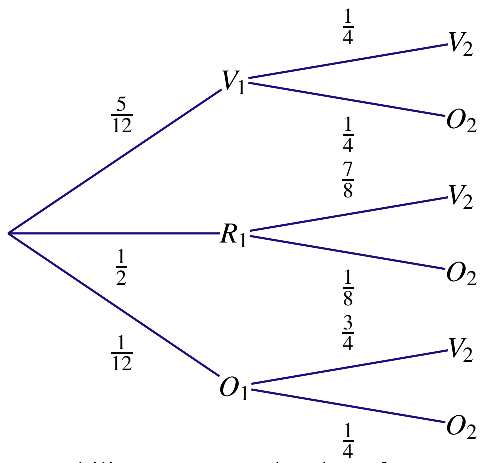
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\dfrac{5}{12}$ à l'orange $\dfrac{1}{12}$ et au rouge $\dfrac{1}{2}$.

On note :
R_1 l'évènement le premier feu rencontré est au rouge
V_1 l'évènement : le premier feu rencontré est au vert
O_1 l'évènement : le premier feu rencontré est à l'orange
et on définit de même R_2, V_2, O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert

PARTIE B

On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide.
L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $[1;6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$.
$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1;6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a) Montrer que pour tout nombre reel x appartenant à l'intervalle $[1;6]$, $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)(x-4)}{x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;6]$.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$.
   d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$.
   c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel :
Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

CENTRES ÉTRANGERS 2007

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification Une bonne réponse apporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

PARTIE A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2+3}\right)$ est égale à :	☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ e^3
2. $\mathrm{e}^{\ln(2)}+\mathrm{e}-4$ est égal à :	☐ $\mathrm{e}-2$ ☐ $\ln(2)+\mathrm{e}-4$ ☐ 2
3. $\ln(1-x)\geqslant 1$ est équivalente à :	☐ $x\leqslant 1-\mathrm{e}$ ☐ $x<0$ ☐ $x>-\mathrm{e}$
4. La fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+2$ a pour primitive la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :	☐ $F(x)=x\ln(x)$ ☐ $F(x)=x\ln(x)-x$ ☐ $F(x)=x\ln(x)+x$

PARTIE B

Soient a et b deux réels strictement positifs. A et B sont deux évènements associés à une expérience aléatoire. On sait que $P(\mathrm{A})=a^2$, $P(\mathrm{B})=b^2$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=2ab$. Alors,

5. $P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ est égale à :	☐ $(1-a)(1+a)$ ☐ a^2-1 ☐ b^2-a^2
6. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ est égale à :	☐ $(a+b)^2$ ☐ $(a-b)^2$ ☐ a^2+b^2
7. $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ est égale à :	☐ $\dfrac{a}{2b}$ ☐ $\dfrac{2b}{a}$ ☐ $\dfrac{2a}{b}$

PARTIE C

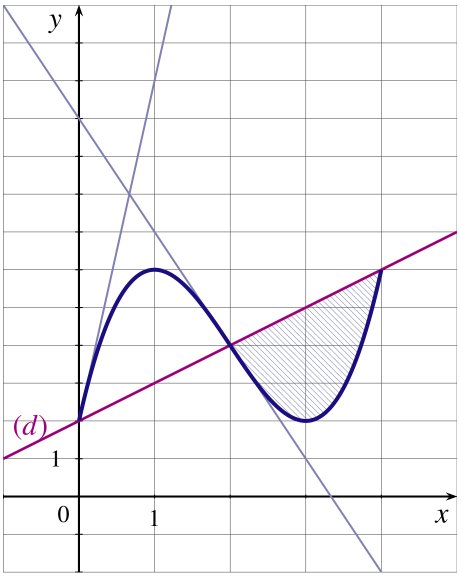
Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, la suite géométrique de premier terme $U_0=2$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Alors,

8. U_{n+1} est égale à :	☐ $U_n + \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}U_n$ ☐ $(U_n)^{\frac{1}{2}}$
9. U_n est égale à :	☐ $2 + \frac{1}{2}n$ ☐ $2^{(1-n)}$ ☐ $2^{(n+1)}$
10. $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ est égale à :	☐ $\frac{31}{8}$ ☐ 15 ☐ $\frac{15}{8}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On considère une fonction f définie et dérivable sur I = [0 ; 4] ; sa courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal . On note f' la fonction dérivée de f.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x + 2$. Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.

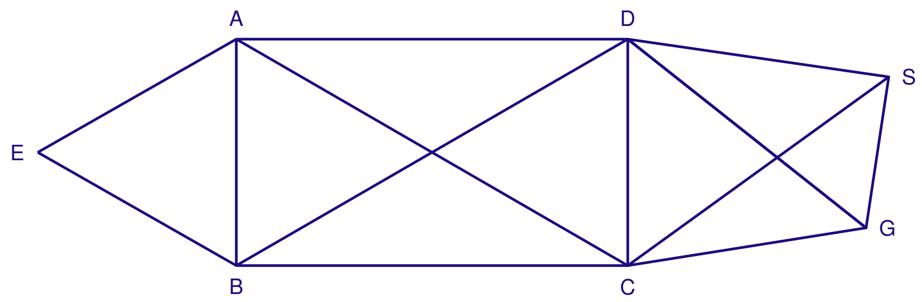
1. Par lecture graphique, déterminer :
   a) $f(0)$ et $f'(0)$.
   b) $f(1)$ et $f'(1)$.
   c) $f(2)$ et $f'(2)$.
   d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x + 2$.



2. a) Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur I ; on indiquera le signe de $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0;4]$ par $g(x) = \ln[f(x)]$.
3. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques
   a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$
   b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$
   c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
4. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où m, n, p et q sont des réels.
   a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer p et q.
   b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer m et n.
5. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
   a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.
   b) Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

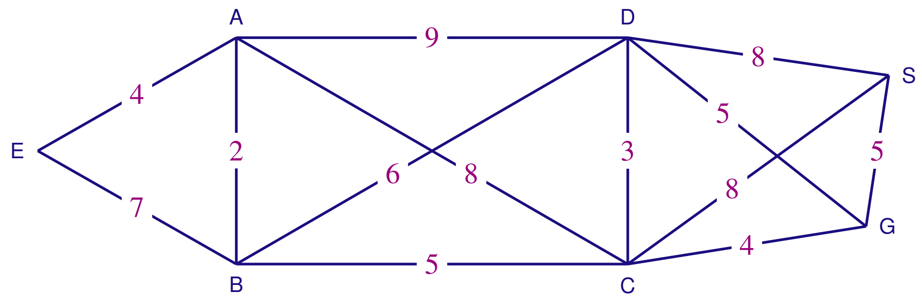
Les parties A *et* B *sont indépendantes*
L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous : les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.



PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
2. Justifier que le nombre chromatique de ce graphe est compris entre 4 et 6.

PARTIE B



Le graphe pondéré ci-dessus donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts.

1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à la station S. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.
2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
   a) Comment peut-il terminer, au plus vite, son trajet jusqu'à S ? Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?
   b) S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ? Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

EXERCICE 3 (3 points) *commun à tous les candidats*

On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.

S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.

S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
   Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*

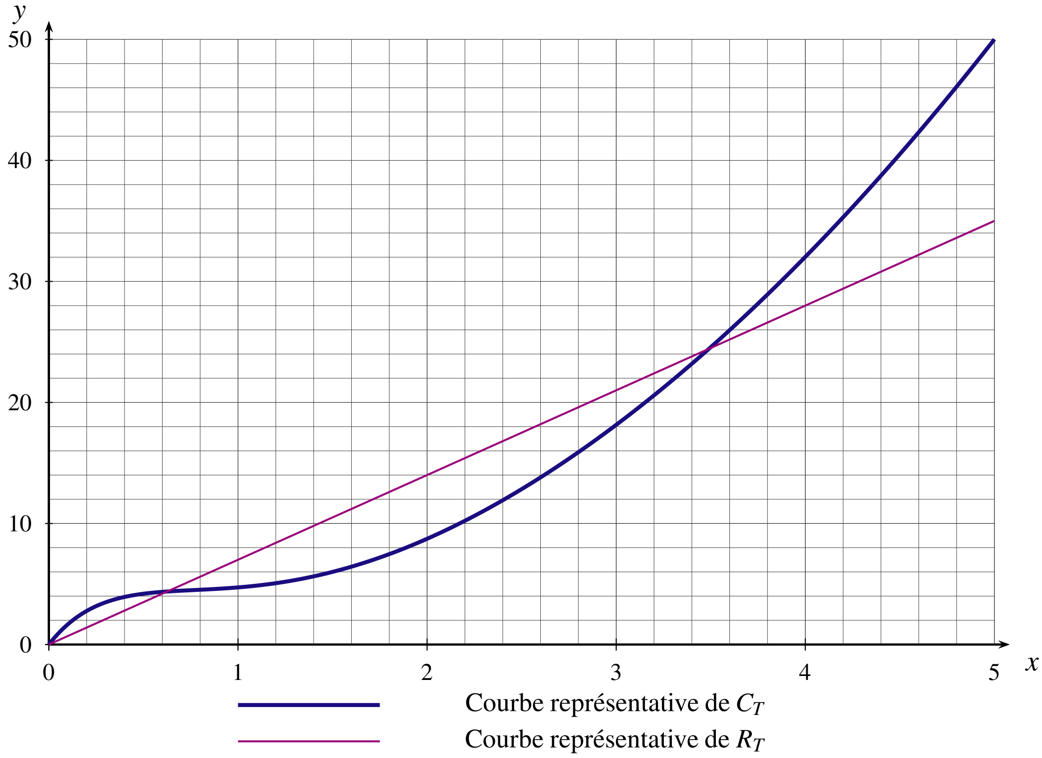
EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E.
On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500.
On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $C(x) = 4x + (1-2x)\mathrm{e}^{-2x+3}$ où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur $[0;5]$ qui s'annule pour $x = 0$.
   Justifier que $C_T(x) = 2x^2 + x\mathrm{e}^{-2x+3}$.
2. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur $]0;5]$ par $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.
   Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x.
3. a) Déterminer $C'_M(x)$ où C'_M désigne la fonction dérivée de C_M.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} = 0$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - \mathrm{e}^{-2x+3} > 0$.
   d) En déduire le sens de variations de C_M sur $]0\,;5]$.
4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?
5. Chaque centaine d'articles est vendue 7000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.
   Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$.

   a) En annexe, sont représentées les fonctions C_T et R_T.
      Par lecture graphique déterminer :
      – le coût moyen minimal,
      – l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,
      – la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
      On fera apparaître les constructions nécessaires.
   b) Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

ANNEXE



y
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
x
Courbe représentative de C_T
Courbe représentative de R_T

FRANCE MÉTROPOLITAINE JUIN 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 1 *point, une réponse fausse enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. Pour tout nombre réel a et pour tout nombre réel b, on peut affirmer que $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$ est égal à :

   RÉPONSE A : $\mathrm{e}^{\left(\frac{a}{b}\right)}$ RÉPONSE BC : $\mathrm{e}^{(a-b)}$ RÉPONSE C : $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b$

2. On considère trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
   Si l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors on peut en déduire que :

   RÉPONSE A : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ RÉPONSE B : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ RÉPONSE C : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f'. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   a) L'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$:

      RÉPONSE A : trois solutions RÉPONSE B : deux solutions RÉPONSE C : une solution

   b) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 peut avoir pour équation :

      RÉPONSE A : $y = -3x + 2$ RÉPONSE B : $y = 3x + 2$ RÉPONSE C : $y = -4$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

PARTIE A

Dans un pays européen, le montant des recettes touristiques, exprimé en millions d'euros, est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Montant des recettes touristiques y_i en millions d'euros	24495	26500	29401	33299	33675	34190

1. On utilise un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Les coefficients, obtenus à l'aide de la calculatrice, seront arrondis au centième.

2. En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2007, calculer le montant que l'on peut prévoir pour les recettes touristiques de l'année 2007, arrondi au million d'euros.

PARTIE B

On considère la fonction f définie pour tout nombre entier n par $f(n) = \mathrm{e}^{10,13+0,07n}$.
On utilise cette fonction pour modéliser l'évolution des recettes touristiques de ce pays européen.
Ainsi, $f(n)$ représente le montant des recettes touristiques (exprimé en millions d'euros) de ce pays européen pour l'année $2000+n$.

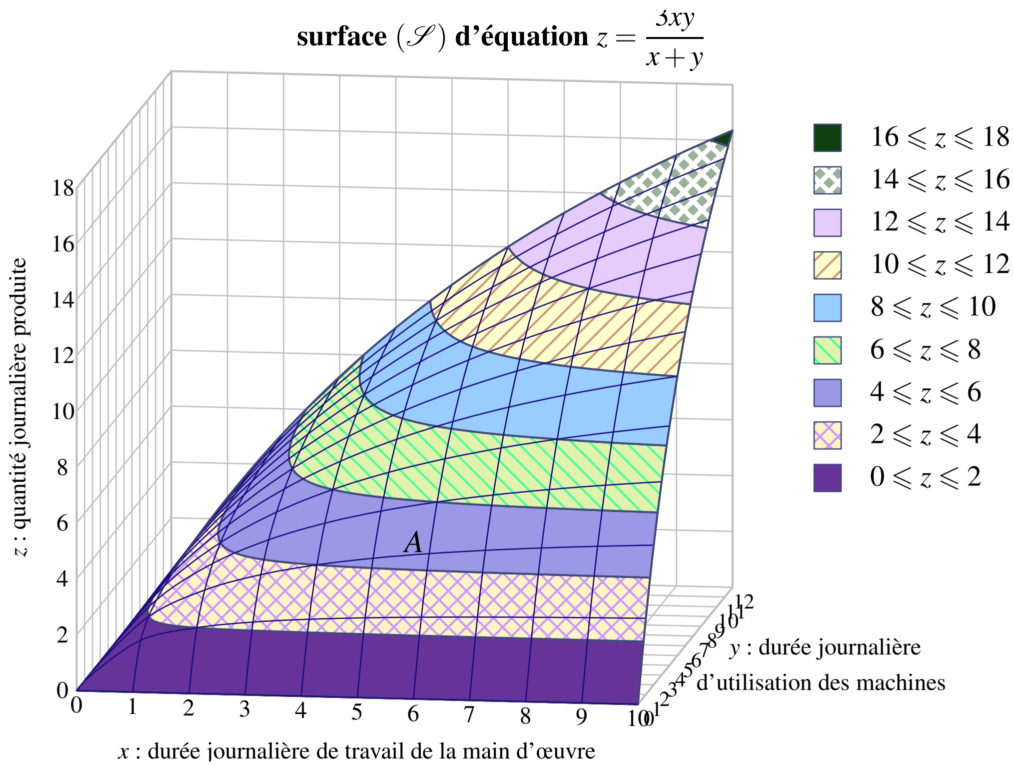
1. Selon ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques que l'on peut prévoir pour l'année 2007. Arrondir le résultat au million d'euros.
2. a) Déterminer le nombre entier n à partir duquel $f(n) > 45000$.
   b) En déduire l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le montant des recettes touristiques dépasserait 45 000 millions d'euros.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne :
– par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heure ; x appartient à l'intervalle $]0~;~10]$
– par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0~;~12]$.
La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x;y) = \frac{3xy}{x+y} \text{ avec } 0 < x \leqslant 10 \text{ et } 0 < y \leqslant 12.$$

La figure ci-dessous représente la surface $(\mathscr{S})$ d'équation : $z = f(x;y)$ pour $0 < x \leqslant 10$ et $0 < y \leqslant 12$.



PARTIE 1 : Le point A représenté par une croix est un point de la surface $(\mathscr{S})$.

1. Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).

2. Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

PARTIE 2 : Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.
L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x+y=36$.
La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ par $g(x)=\dfrac{4x^2-36x}{x-12}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.
   a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)=\dfrac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$.
   b) étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$.
2. a) En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.
   b) Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.
Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les évènements suivants :

F : « la grille est de niveau facile »
M : « la grille est de niveau moyen »
D : « la grille est de niveau difficile »
R : « Pierre réussit la grille » et $\overline{\text{R}}$ son évènement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
   b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
   c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
   Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

PARTIE I : ÉTUDE DES COÛTS HEBDOMADAIRES DE PRODUCTION

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0;10]$ par $C_m(x) = x + \dfrac{16}{x+1}$. ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).

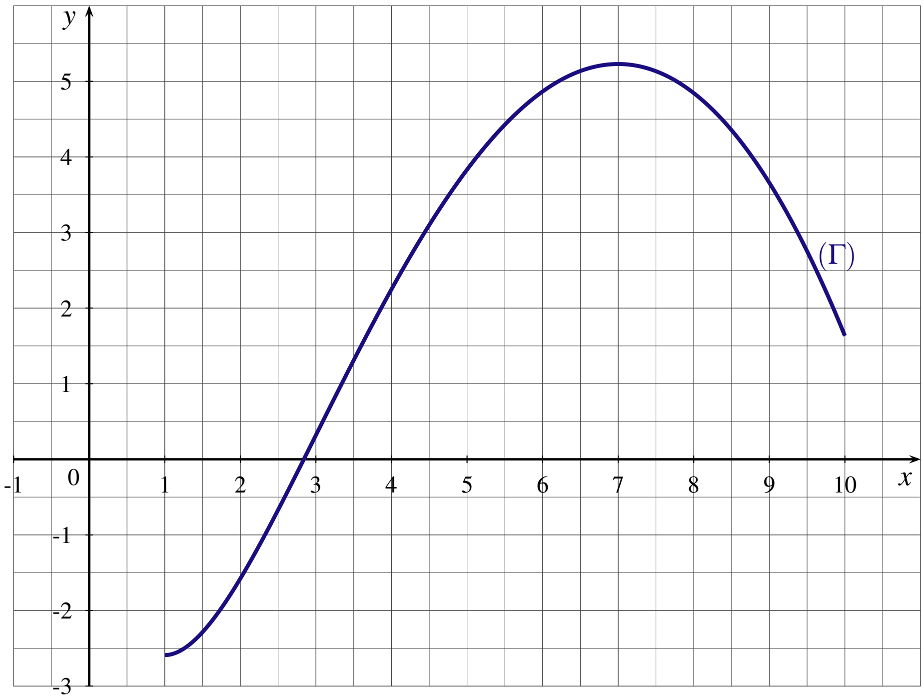
   Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0;10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.

   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0;10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

PARTIE II : ÉTUDE DU BÉNÉFICE HEBDOMADAIRE.

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1;10]$ par $B(x) = 9x - 0{,}5x^2 - 16\ln(x+1)$.

La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée ci-dessous.



1. a) On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1;7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7;10]$.

   En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.

   b) Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).
2. a) Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.

   b) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.*

Une fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble $]-6\,;\,-3[\cup]-3\,;\,+\infty[$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-6		-4		$-3{,}5$		-3			2		$+\infty$
Variations de f	7	$\nearrow$	8	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	3 $\nearrow$	5

1. On peut affirmer que :
   RÉPONSE A : $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=+\infty$.
   RÉPONSE B : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=5$
   RÉPONSE C : $\lim\limits_{x\to -6} f(x)=-\infty$.
   RÉPONSE D : $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} f(x)=0$.
2. La courbe représentative de f admet pour asymptotes les droites d'équation :
   RÉPONSE A : $x=5$ et $y=-3$
   RÉPONSE B : $x=-3$ et $y=5$.
   RÉPONSE C : $y=8$ et $y=3$
   RÉPONSE D : : $x=-6$ et $y=5$.
3. Dans l'ensemble $]-6\,;\,-3[\cup]-3\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x)=4$ admet
   RÉPONSE A : 0 solution
   RÉPONSE B : 1 solution
   RÉPONSE C : 2 solutions
   RÉPONSE D : 3 solutions
4. On considère le nombre réel $I=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :
   RÉPONSE A : $0\leqslant I\leqslant 3$
   RÉPONSE B : $6\leqslant I\leqslant 10$
   RÉPONSE C : $3\leqslant I\leqslant 6$
   RÉPONSE D : $I\geqslant 10$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau suivant donne, en milliers, le nombre de Pactes civils de solidarité (PACS) signés chaque année en France :

Années	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année, x_i	0	1	2	3	4
Nombres de PACS en milliers, y_i	22,1	19,4	25	31,1	39,6

Source INSEE.

1. Calculer, à 0,1 près, le pourcentage d'augmentation du nombre de milliers de Pactes civils de solidarité entre 2000 et 2004.
2. ON ENVISAGE UN AJUSTEMENT AFFINE
   a) à l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y=ax+b$. Par la suite, on pose $f(x)=ax+b$.

b) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2007, donner une estimation du nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2007.

3. ON ENVISAGE UN AUTRE TYPE D'AJUSTEMENT

On modélise le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés durant l'année $2000+x$ (x entier) à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = 1{,}6x^2 - 1{,}8x + 21{,}4$.

a) En utilisant ce second modèle, calculer le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2007.

b) On suppose que l'évolution se poursuit selon ce modèlejusqu'en 2015. Le nombre de milliers de Pactes civils de solidarité signés en 2010 sera-t-il supérieur à 100 000 ? Justifier.

4. COMPARAISON DES DEUX AJUSTEMENTS

Pour chacun des deux modèles, on calcule ci-dessous le tableau des carrés des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs calculées à l'aide de chacun des deux ajustements.

x_i	0	1	2	3	4
$[(y_i - f(x_i)]^2$	16	11,36	5,95	1,02	7,95

x_i	0	1	2	3	4
$[(y_i - g(x_i)]^2$	0,49				

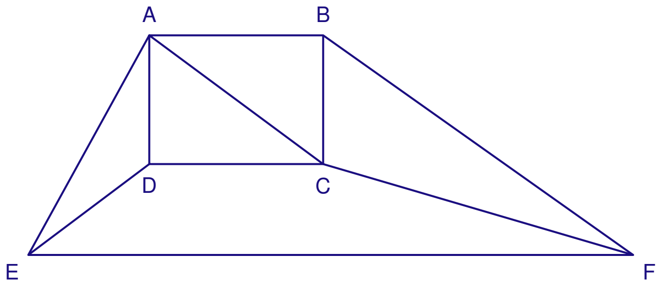
a) Recopier et compléter le deuxième tableau, les valeurs étant arrondies au centième.

b) Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ? Justifier.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

PARTIE I

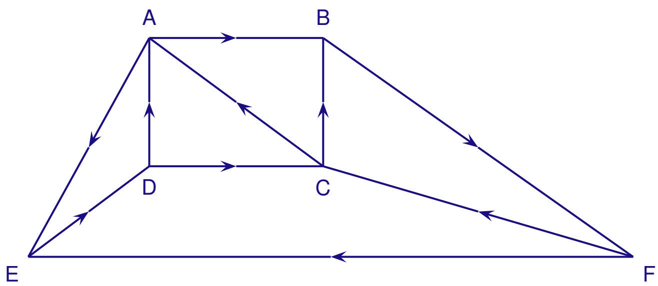
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.

PARTIE II

Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



1. Écrire la matrice M associée à ce graphe. (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
2. a) Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?

   b) Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ?

EXERCICE 3 (7 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée.
Les points $A(3;\mathrm{e})$ et $B(4;2)$ appartiennent à cette courbe.
La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : LECTURE GRAPHIQUE

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3;10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II : ÉTUDE DE LA FONCTION

La fonction f représentée dans l'ANNEXE, est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$$

1. a) Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.

   b) On donne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

   b) Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

   En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2;10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.

   RAPPEL : Soit f une fonction et $[a ; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

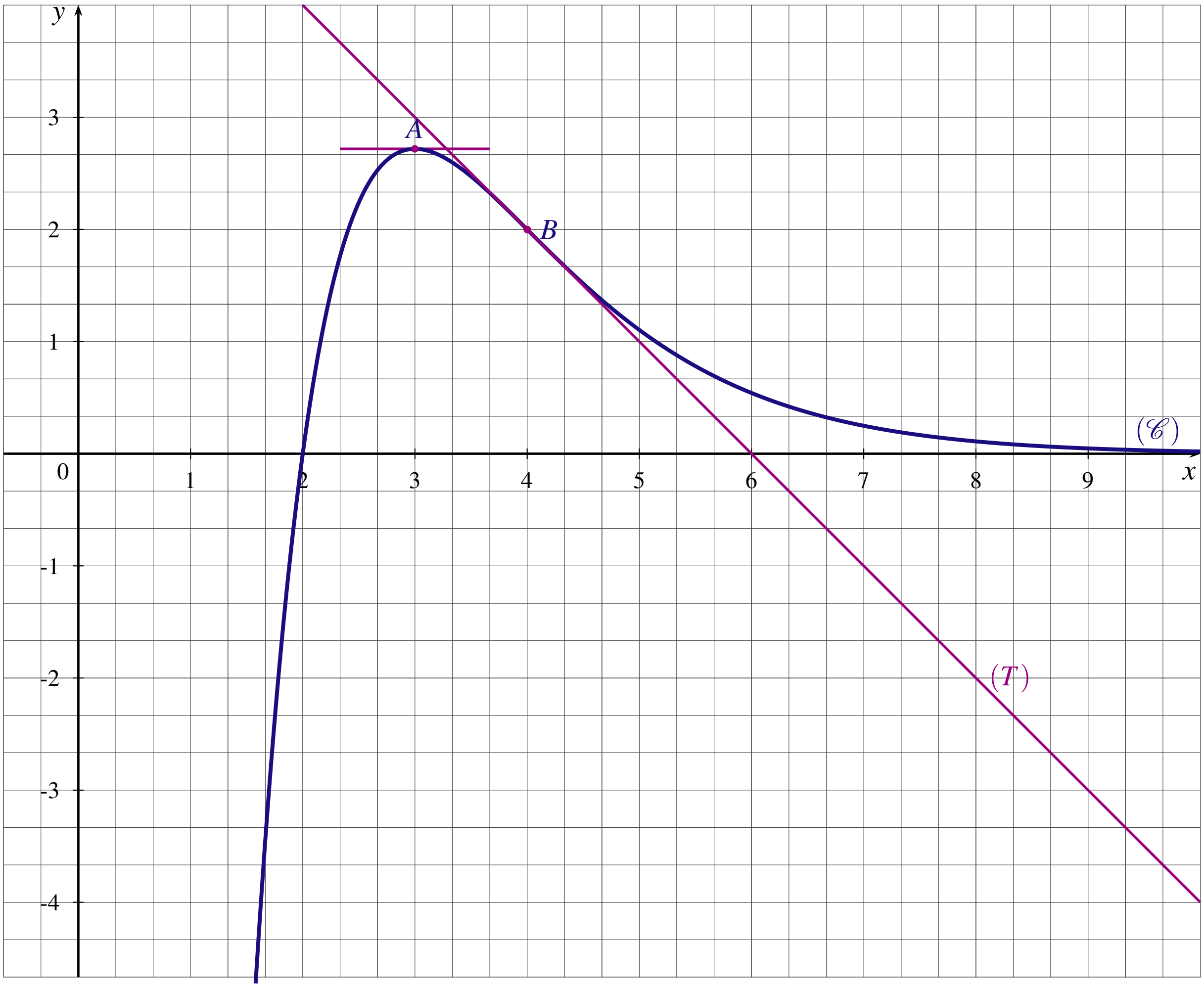
   La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a ; b]$ est le nombre m tel que $m = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE III : ÉTUDE D'UN BÉNÉFICE

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1{,}8 \leqslant x \leqslant 4{,}5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1{,}8;4{,}5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

ANNEXE



EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.
Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :
– la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à 0,8 ;
– s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,7 ;
– s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,5.

On note R_1 l'évènement : « le premier tir au but est réussi » et $\overline{R_1}$ son évènement contraire, R_2 l'évènement : « le second tir au but est réussi » et $\overline{R_2}$ son évènement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que les deux tirs au but soient réussis.
3. a) Calculer la probabilité que le second tir au but soit réussi.
   b) Les évènements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. On note A l'évènement : « Jean a réussi exactement un tir au but ». Montrer que $p(A) = 0{,}34$.

LA RÉUNION 2007

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 2]$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relativement à un repère orthogonal.

PARTIE A

Un logiciel fournit le graphique qui figure en annexe ci-dessous.
En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Expliquer les procédés utilisés et, lorsque c'est nécessaire, compléter le graphique.

1. Donner une estimation de $f'(0)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f.
2. a) Donner un encadrement d'amplitude 1 de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Donner une valeur approchée à 0,5 près de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

PARTIE B

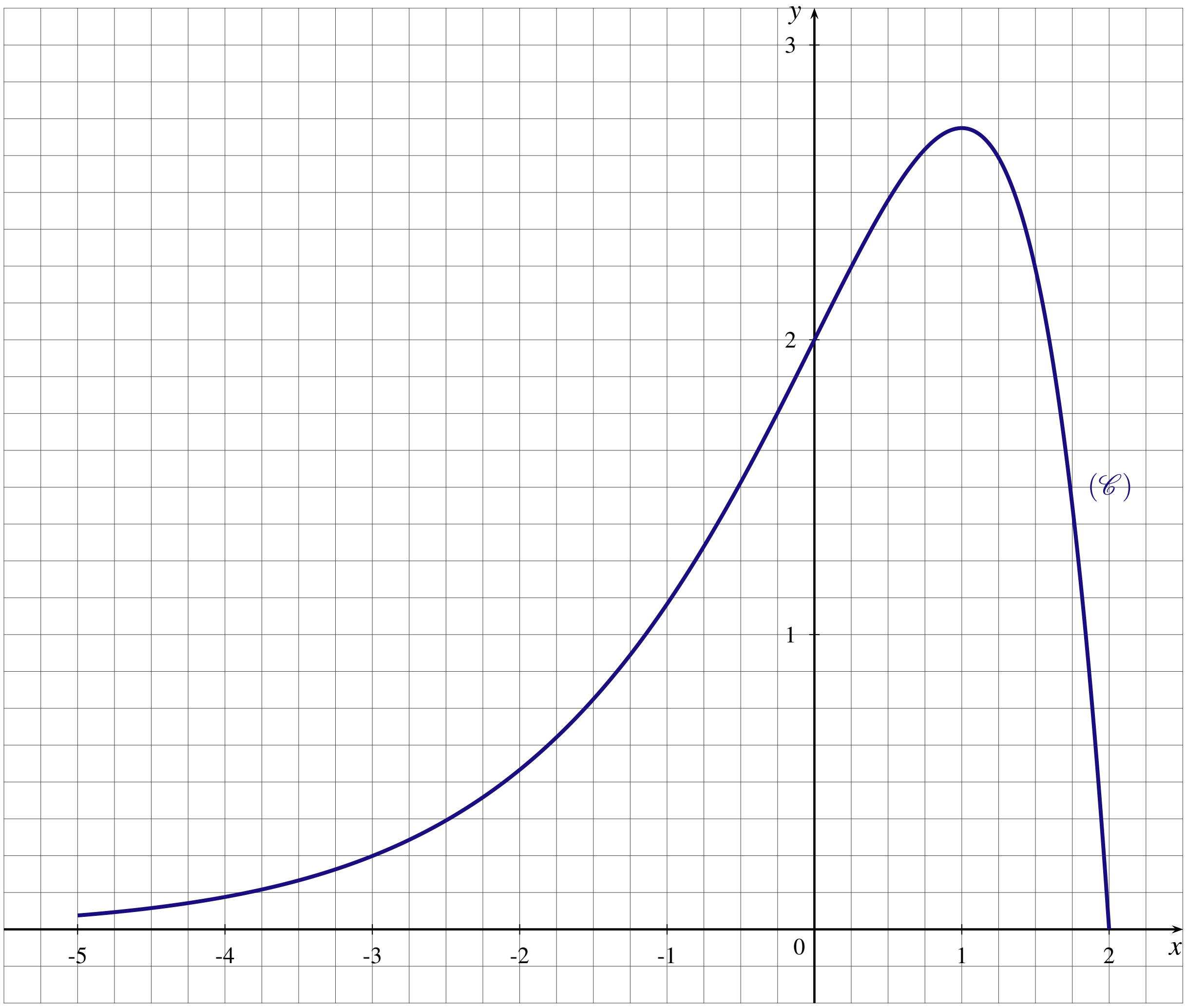
Dans cette partie on sait que la fonction f est définie par :

$$\text{Pour tout élément } x \text{ de } [-5\ ;\ 2],\ f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$$

1. a) On nomme f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour x élément de $[-5\ ;\ 2]$.
   b) Justifier l'affirmation : « Sur l'intervalle $[-5\ ;\ 2]$, la fonction f admet un maximum pour $x = 1$ et ce maximum est égal à e. »
2. Donner une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.
3. Soit g la fonction définie par : pour x élément de $[-5\ ;\ 2]$, $g(x) = (3-x)\mathrm{e}^x$.
   a) Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de la fonction g.
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ (en donner la valeur exacte).

ANNEXE

À UTILISER POUR L'EXERCICE 1 ET À RENDRE AVEC LA COPIE

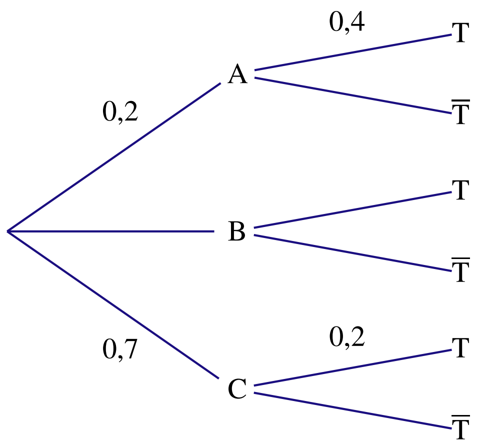


EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les deux parties sont totalement indépendantes.

PARTIE A

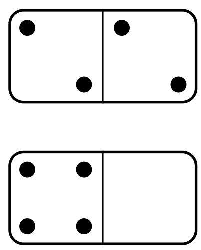
Soient A, B, C et T quatre évènements associés à une épreuve aléatoire. On note $\overline{\mathrm{T}}$ l'évènement contraire de l'évènement T.
On donne l'arbre de probabilités suivant.



1. Donner la probabilité $p_{\text{A}}(\text{T})$ de l'évènement « T sachant que A est réalisé ».
2. Calculer :
   a) la probabilité $p(\text{B})$ de l'évènement B ;
   b) la probabilité $p_{\text{A}}\left(\overline{\text{T}}\right)$ de l'évènement « non T sachant que A est réalisé » ;
   c) la probabilité $p(\text{A} \cap \text{T})$ de l'évènement « A et T ».
3. On sait que la probabilité $p(\text{T})$ de l'évènement T est : $p(\text{T}) = 0{,}3$.
   a) Calculer la probabilité $p_{\text{T}}(\text{A})$.
   b) Calculer la probabilité $p_{\text{B}}(\text{T})$.

PARTIE B

Un domino est une petite plaque partagée en deux parties.
Sur chacune des parties figure une série de points.
Il peut y avoir de zéro à six points dans une série.
Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.
Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :
– le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
– il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.
On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés



1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

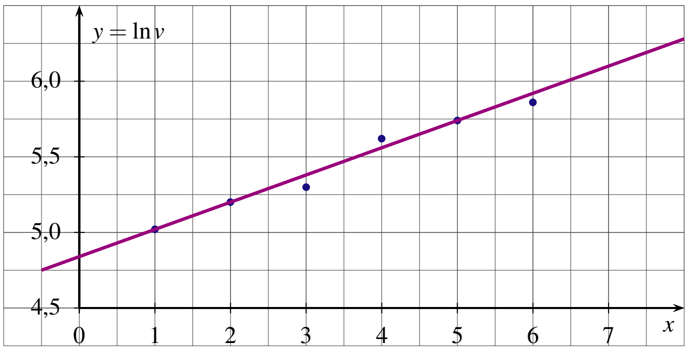
EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1 à 5, une et une seule des trois propositions a, b, c est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.
Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 *point, une réponse incorrecte enlève* 0,25 *point, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à* 0.

1. Le nombre d'habitants d'une ville était : 157 500 en 2002 et 139 860 en 2006. Le taux d'évolution du nombre d'habitants de cette ville de 2002 à 2006 est :
   a) 11,2 % ;
   b) $-12{,}6$ % ;

c) $-11{,}2$ %.

2. Effectuer une augmentation de 15 % suivie d'une baisse de 15 % revient à :
   a) ne procéder à aucune modification ;
   b) effectuer une augmentation de 2,25 % ;
   c) effectuer une diminution de 2,25 %.
3. On admet que le chiffre d'affaire d'une entreprise augmentera régulièrement de 3,2 % par an. Sur une période de 10 ans, il augmentera, à une unité près, de :
   a) 32 % ;
   b) 29 % ;
   c) 37 %.
4. La suite (u_n) est définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{e}^{-n\ln 2}$.
   a) (u_n) est une suite géométrique de raison $-\ln 2$;
   b) (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$;
   c) (u_n) n'est pas une suite géométrique.
5. On a représenté un nuage de points $M_i\,(x_i;\ln v_i)$ et effectué un ajustement affine :



   Selon cet ajustement, lorsque x prendra la valeur 7, y vaudra environ :
   a) 1,8 ;
   b) 6,1 ;
   c) 445.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1 à 5, une et une seule des trois propositions a, b, c est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.
Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 *point, une réponse incorrecte enlève* 0,25 *point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à* 0.

1. La suite (u_n) est définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 1 - \dfrac{6}{n - 10{,}5}$.
   a) La suite (u_n) est croissante.
   b) La suite (u_n) est décroissante.
   c) La suite (u_n) n'est pas monotone.

2. La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0,1u_n$.
   a) La suite (u_n) est arithmétique.
   b) La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   c) La suite (u_n) est géométrique.
3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
   – le plan (P) d'équation $x+y+z-2=0$,
   – la droite (D) d'équations cartésiennes $y=1$ et $z=1-x$.

   a) La droite (D) est sécante au plan (P).
   b) La droite (D) est incluse dans le plan (P).
   c) La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).
4. La matrice d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D, E est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Le graphe G comporte 12 arêtes.
   b) Le graphe G admet une chaîne eulérienne.
   c) Le graphe G est complet.
5. Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2 % chaque semaine depuis sa parution.
   Au cours de la première semaine il s'en était vendu dix mille exemplaires.
   Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :
   a) 23 900
   b) 718 927
   c) 743 306

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1;50]$ par $f(x) = x^2 + 72\ln(10x+1)$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1;50]$.
2. La fonction h est définie sur l'intervalle $[1;50]$ par $h(x) = x^2 + \dfrac{720x}{10x+1} - 72\ln(10x+1)$.
   a) On admet que la dérivée de la fonction h est la fonction h' définie par :

   $$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle } [1;50],\ h'(x) = \frac{2x(10x-59)(10x+61)}{(10x+1)^2}.$$

   Résoudre l'équation $h'(x) = 0$ sur l'intervalle $[1;50]$.
   Étudier le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $[1;50]$.
   b) Dresser le tableau des variations de la fonction h.
   c) On admet que, dans l'intervalle $[1;50]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.
   À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
   d) Expliquer pourquoi :
   – pour tout x élément de l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $h(x) \leqslant 0$,
   – pour tout x élément de l'intervalle $[\alpha ; 50]$, $h(x) \geqslant 0$.

3. a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $[1;50]$, $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.
   b) Démontrer que la fonction g admet un minimum pour $x = \alpha$.
   c) En utilisant le fait que $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ puis déduire de la question précédente que $g(\alpha) = f'(\alpha)$.

PARTIE B : APPLICATION

Une entreprise a conduit une étude statistique sur les coûts de production de l'un de ses produits. Pour une production comprise entre 1 tonne et 50 tonnes et des coûts exprimés en milliers d'euros, cette étude conduit à adopter le modèle mathématique suivant :

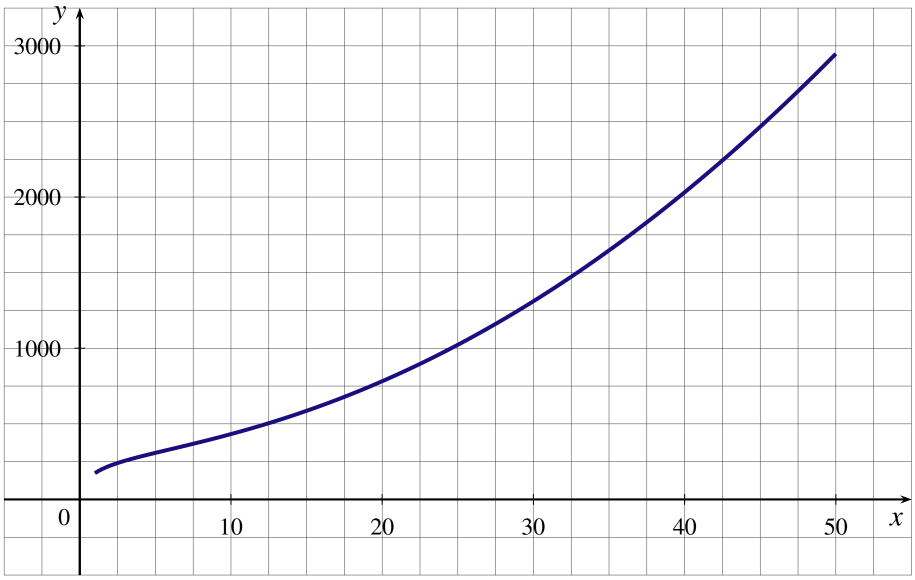
– le coût total de production C_T est donné par $C_T = f(x)$, où x est la quantité produite exprimée en tonnes,
– pour une production de x tonnes, le coût moyen C_M de production d'une tonne est donné par $C_M = g(x)$ et le coût marginal C de production est donné par $C = f'(x)$.

(*Des graphiques obtenus à l'aide d'un logiciel sont fournis en annexe ci-dessous. Ils peuvent être complétés et rendus avec la copie.*)

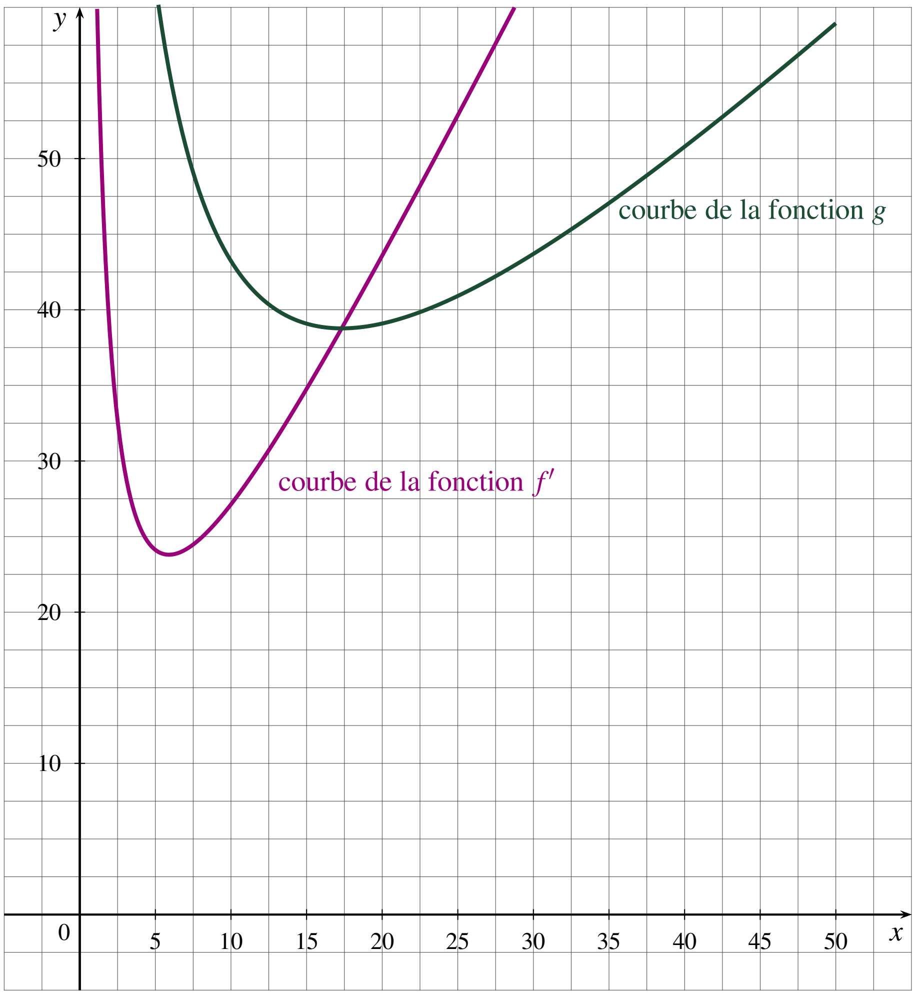
1. Expliquer pourquoi, quelle que soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38 000 € la tonne.
2. Quelle que soit sa production, l'entreprise pense pouvoir la vendre en totalité au prix de 45 000 € la tonne. Donner une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.

ANNEXE

Représentation graphique de la fonction f

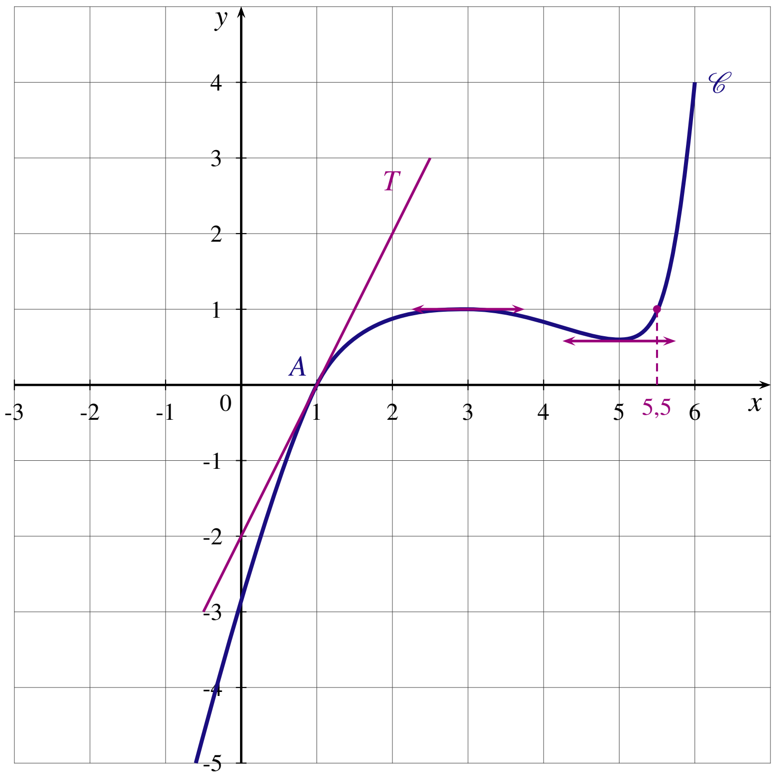


Représentations graphiques des fonctions f' et g



LIBAN 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*



On considère la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie et dérivable sur $]-\infty~;~6]$.
La fonction dérivée de f est notée f'. La droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est située sous cette tangente T sur $]-\infty~;~6]$.
On répondra au QCM ci-après en s'appuyant sur les informations données par le graphique.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification. Une bonne réponse apporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

PARTIE A

QUESTIONS	
1. L'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1 est	☐ $y = x - 1$ ☐ $y = x - 2$ ☐ $y = 2(x - 1)$
2. L'équation $f'(x) = 0$ admet	☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐ 0 solution
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est	☐ $-\infty$ ☐ -5 ☐ 6
4. La fonction $\ln f$ est définie sur	☐ $[-\infty~;~6]$ ☐ $]0;6]$ ☐ $]1;6]$
5. La fonction $\ln f$ s'annule exactement	☐ 1 fois ☐ 2 fois ☐ 0 fois

PARTIE B

Dans cette partie du QCM, on appelle g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 6]$ par son expression $g(x) = \exp[f(x)]$.

QUESTIONS	
6. La fonction g est strictement croissante sur	☐ $]-\infty\ ;\ 3]$ ☐ $]1;6]$ ☐ $]-\infty\ ;\ 6]$
7. $g'(1)$ est égal à	☐ 2 ☐ 0 ☐ 2e
8. La fonction g s'annule exactement	☐ 1 fois ☐ 2 fois ☐ 0 fois

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès.

Dans cette salle, les hommes représentent 25 % des spectateurs, les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs et les autres spectateurs sont des enfants.

$\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film au moins une fois.

À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.

On appelle :

H l'évènement : « la personne interrogée est un homme »

F l'évènement : « la personne interrogée est une femme »

E l'évènement : « la personne interrogée est un enfant »

V l'évènement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection »

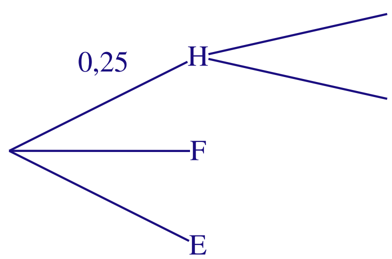
$\overline{\text{V}}$ l'évènement : « la personne interrogée n'avait jamais vu le film avant cette projection ».

La notation $p(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A.

La notation $p_{\text{B}}(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

PARTIE A

1. à l'aide des notations ci-dessus, traduire la situation décrite en recopiant et en complétant l'arbre pondéré dont le départ est proposé ci-dessous. On prendra soin de le compléter au fur et à mesure.



2. a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'évènement $\text{H} \cap \text{V}$.

   b) Donner $p_{\text{H}}(\text{V})$ et en déduire $p(\text{H} \cap \text{V})$.

3. La probabilité que l'évènement V soit réalisé est égale à 0,345.

   a) Déterminer $p\left(\overline{\text{V}}\right)$.

   b) Déterminer la probabilité que si l'on interroge un enfant, il ait déjà vu ce film au moins une fois avant cette projection.

4. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise.

   Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?

PARTIE B

À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film.
Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

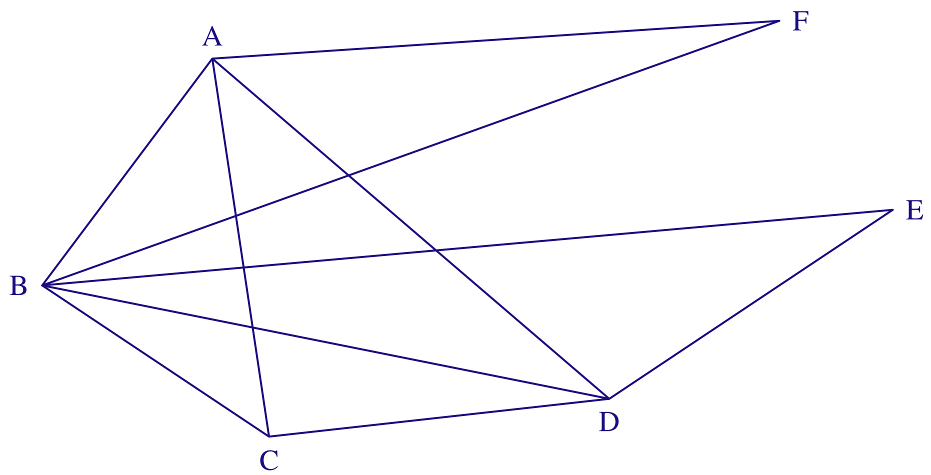
1. Déterminer q.
2. En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville. Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A : Eau	B : économie d'énergies	C : Plantations et cultures locales
D : Développement durable	E : Biotechnologies	F : Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

PARTIE A

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.

3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
   b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

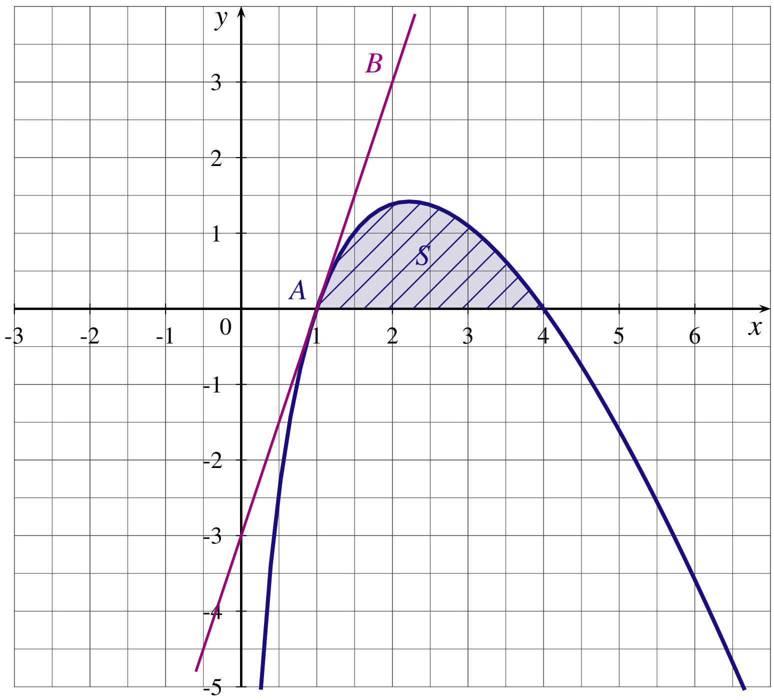
   (Dans les deux cas, **a** et **b**, justifiez votre réponse.)

PARTIE B

Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes. Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).

1. Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*



On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthonormal.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(1;0)$ et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE A

Pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} 4a+b &= 0 \\ a+b &= 3 \end{cases}$

   Déterminer a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (4-x)\ln x$.
On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2} - 8x\ln x + 8x\right)$.

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner une valeur arrondie à 10^{-1} de S exprimée en unités d'aire. Justifier.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de ménages (en milliers) équipés d'un ordinateur entre les années 1986 et 1996.

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de ménages y_i	160	235	345	510	760	1160	1780	2600	3850	5400	7300

PARTIE A

1. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de ménages équipés d'un ordinateur entre les années 1986 et 1987.
2. Si ce pourcentage était resté le même d'année en année jusqu'en 1996, quel aurait été le nombre de ménages équipés en 1996 ? (on arrondira en millier).
3. On pose $z = \ln y$.
   a) Compléter le tableau donné en ANNEXE 2 (arrondir les valeurs au centième).
   b) Construire le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ z_i)$ pour i allant de 0 à 10 dans le repère donnée en ANNEXE 2.
   c) Donner une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
   Tracer cette droite dans le repère précédent.
   d) Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = a\mathrm{e}^{bx}$, a étant un réel arrondi à l'entier le plus proche et b un réel arrondi au centième.
   En déduire dans ce cas, une estimation arrondie au millier du nombre des ménages qui auraient dû être équipés en 2000.

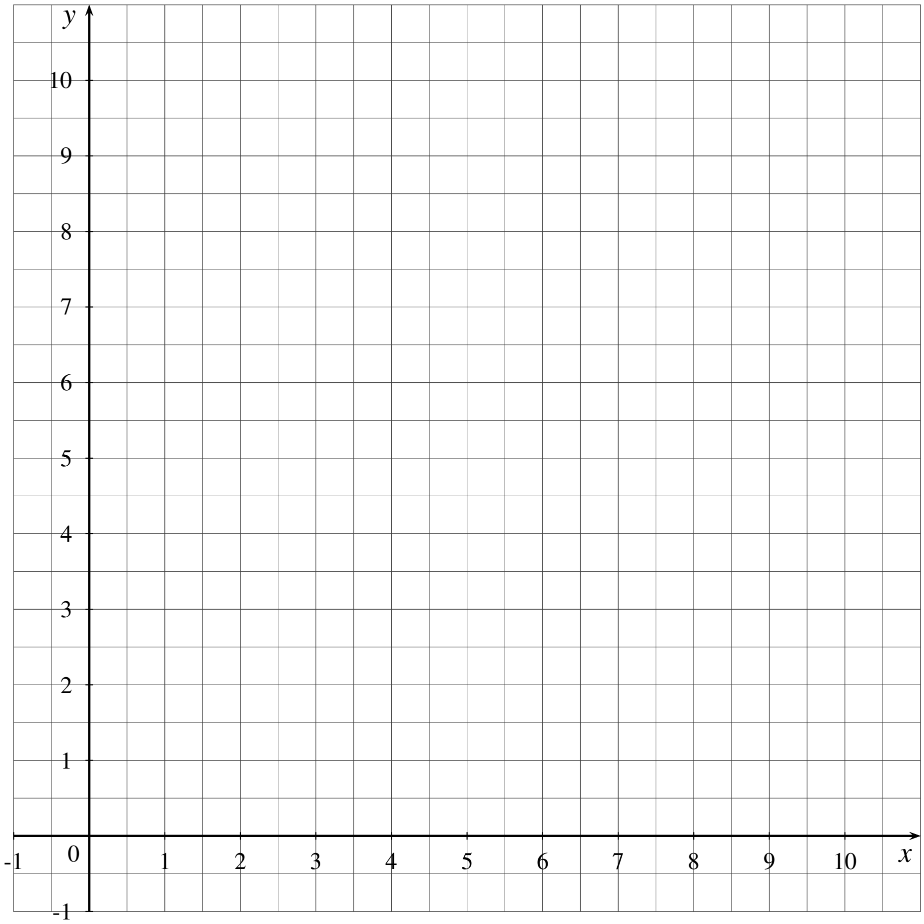
PARTIE B

En fait le nombre de ménages équipés en 2000 est de 15 400 000.
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{20}{1+2000\mathrm{e}^{-0{,}44t}}$.
On estime alors que sur la période de 1980 à 2015 l'équipement des ménages en ordinateur peut être modélisé par la fonction f définie ci-dessus.
Ainsi, le nombre de ménages équipés en $1980+n$, exprimé en millions, est donné par $f(n)$.

1. Déterminer une estimation arrondie au millier du nombre des ménages équipés en 2002 puis en 2003.
2. Prouver que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   a) En quelle année le nombre de ménages équipés a-t-il atteint 18 millions selon l'estimation ?
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

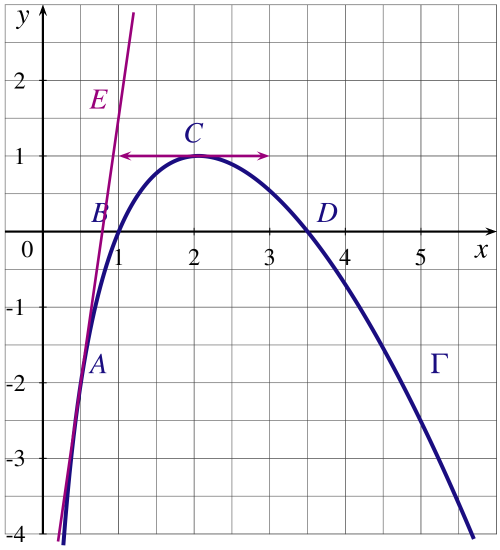
Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de ménages : $z_i = \ln y_i$											



NOUVELLE CALÉDONIE 2007

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $]0;2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est tracée ci-contre.
Elle passe par les points $A\left(\frac{1}{2}~;~-2\right)$, $B(1;0)$, $C(2;1)$ et $D\left(\frac{7}{2}~;~0\right)$. E est le point de coordonnées $\left(1~;~\frac{3}{2}\right)$.
La courbe Γ admet au point C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite (AE) est tangente à la courbe Γ au point A.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, cocher la case V (l'affirmation est vraie) ou la case F (l'affirmation est fausse) sur l'annexe, à rendre avec la copie. Les réponses ne seront pas justifiées.
NOTATION : *une réponse exacte rapporte* 0,5 *point ; une réponse inexacte retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

AFFIRMATION	VRAIE	FAUSSE
a) L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$	□ V	□ F
b) Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\frac{1}{7}$.	□ V	□ F
c) Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1;2]$.	□ V	□ F
d) Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1~;~\frac{7}{2}\right]$.	□ V	□ F
e) On peut calculer $\ln[f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.	□ V	□ F
f) La fonction g définie sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.	□ V	□ F

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.
Le tableau ci-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

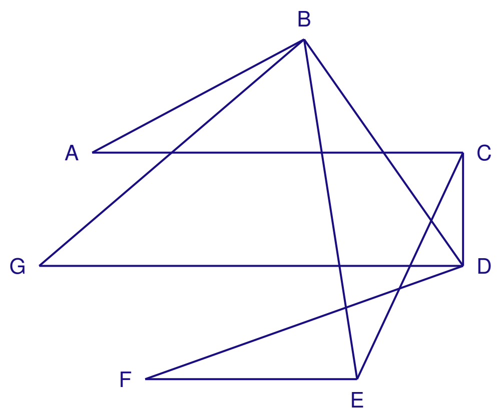
Le détail des calculs statistiques à effectuer à la calculatrice n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ le nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique.
   On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnées. Sur l'axe des ordonnées, on commencera la graduation à 120.
2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$
   a) On désigne par G_1, le point moyen des trois points M_1, M_2 et M_3 du nuage et par G_2 le point moyen des trois points M_4, M_5 et M_6 du nuage.
   Calculer les coordonnées respectives de G_1 et de G_2 dans le repère $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   b) Déterminer l'équation réduite $y = Ax + B$ de la droite $\left(G_1G_2\right)$ dans le repère $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   Les coefficients A et B seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.
   Tracer la droite $\left(G_1G_2\right)$ sur le graphique.
   c) En utilisant la droite $\left(G_1G_2\right)$ comme droite d'ajustement du nuage, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.
3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés,
   a) Soit Δ la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite Δ dans le repère $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   b) En utilisant la droite Δ, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007.
4. a) Si le taux d'augmentation du nombre d'adhérents d'une année à l'autre était fixe et égal à t %, quelle serait la valeur de t arrondie au centième qui donnerait la même augmentation du nombre d'adhérents entre 2000 et 2005 ?
   b) Avec ce même taux d'augmentation t, quel serait le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, pour l'année 2007 ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Sur le graphe ci-contre, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes.

Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

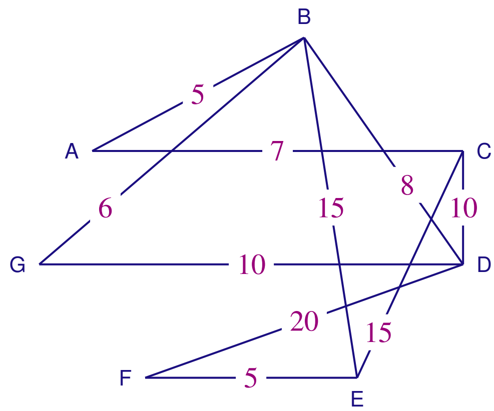
1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ?
2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.
Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-contre les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :

AB : 5 ; AC : 7 ;
BD : 8 ; BE : 15 ;
BG : 6 ;CD : 10 ;
CE : 15 ; DF : 20 ;
DG : 10 ; EF : 5 ;



Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F.
En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 55 % des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves qui ont un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable. De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au centième donc les pourcentages à l'unité.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A :

On choisit au hasard un élève de ce lycée. On note :
– M l'évènement : « L'élève possède un ordinateur » ;
– T l'évènement : « L'élève possède un téléphone portable » ;
– $\overline{\text{M}}$ l'évènement contraire de M ;
– $\overline{\text{T}}$ l'évènement contraire de T.

1. a) Calculer la probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable.
   b) En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable.
2. a) On prend 0,90 comme valeur de la probabilité de l'évènement T.
   Calculer la probabilité que l'élève ne possède pas d'ordinateur mais possède un téléphone portable.

b) En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur.

PARTIE B :

On choisit trois élèves au hasard, indépendamment les uns des autres.
On note E l'évènement : « Exactement deux des trois lycéens choisis possèdent un ordinateur ».
Calculer la probabilité de l'évènement E.

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A :

On considère la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 6$. On note h' sa fonction dérivée.

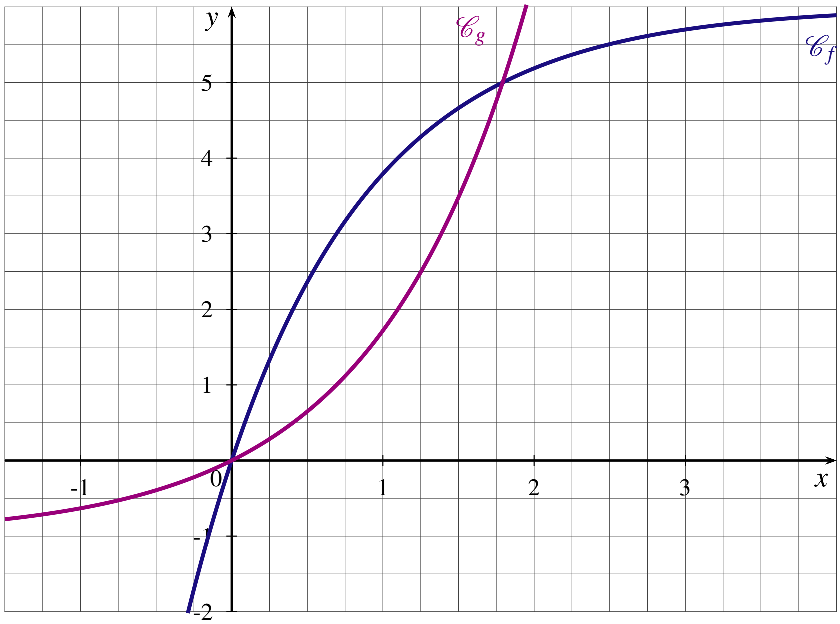
1. a) Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$.
   b) Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$;
   (on pourra utiliser l'égalité vraie pour tout réel x : $h(x) = e^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 7 + 6\mathrm{e}^{-x}\right)$).
2. Calculer $h\left[\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)\right]$, $h(0)$ puis $h(\ln 6)$.
3. Déterminer par le calcul l'image $h'(x)$ d'un réel x par la fonction h' et étudier les variations de la fonction h.
   Dresser le tableau de variations de la fonction h et faire figurer les résultats des questions précédentes dans ce tableau.
4. En déduire le tableau des signes de la fonction h.

PARTIE B :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6 - 6\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan d'unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données en annexe.

1. Démontrer que le point de coordonnées $(\ln 6\ ;\ 5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = -\dfrac{h(x)}{\mathrm{e}^{x}}$.
   b) Déterminer, par le calcul, la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.
   a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe.
   b) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2 puis en donner une valeur approchée arrondie au centième.

ANNEXE



POLYNÉSIE 2007

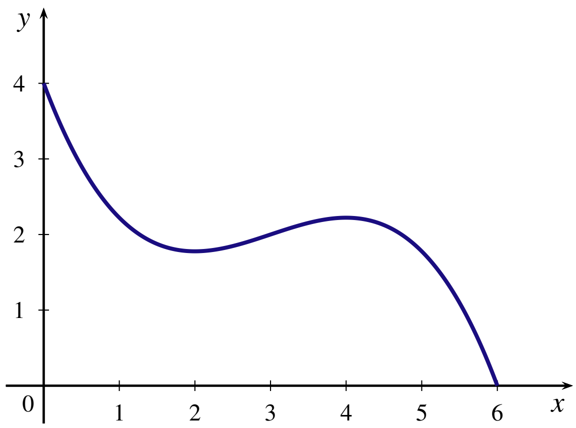
EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte ou une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

1. Voici la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[0;6[$.



Sur l'intervalle $[0;6[$, la fonction composée $x \longmapsto \ln[f(x)]$:
- est strictement croissante.
- a les mêmes variations que f.
- a les variations contraires de celles de f.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 4x - 2\ln x$.

Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :
- $y = 2x + 2$.
- $y = 4x - 2$.
- $y = 2x + 6$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation $2\ln x = \ln(2x+3)$ est :
- l'ensemble vide.
- $\{-1\ ;\ 3\}$.
- $\{3\}$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :

– la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20 % des adultes

– 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10 % des enfants.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :

– A l'évènement « la personne appelée est un adulte » ;
– M l'évènement « la personne appelée a choisi la magie » ;
– T l'évènement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
– N l'évènement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».

2. a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?
   b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?
   c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre
3. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est 0,32.
4. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
5. On choisit, parmi les personnes qui désirent suivre un stage, trois personnes au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   Quelle est la probabilité qu'une seule personne ait choisi la magie (*on donnera une valeur arrondie au centième*) ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes. Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\,;\,6]$ et $y \in [0\,;\,8]$.

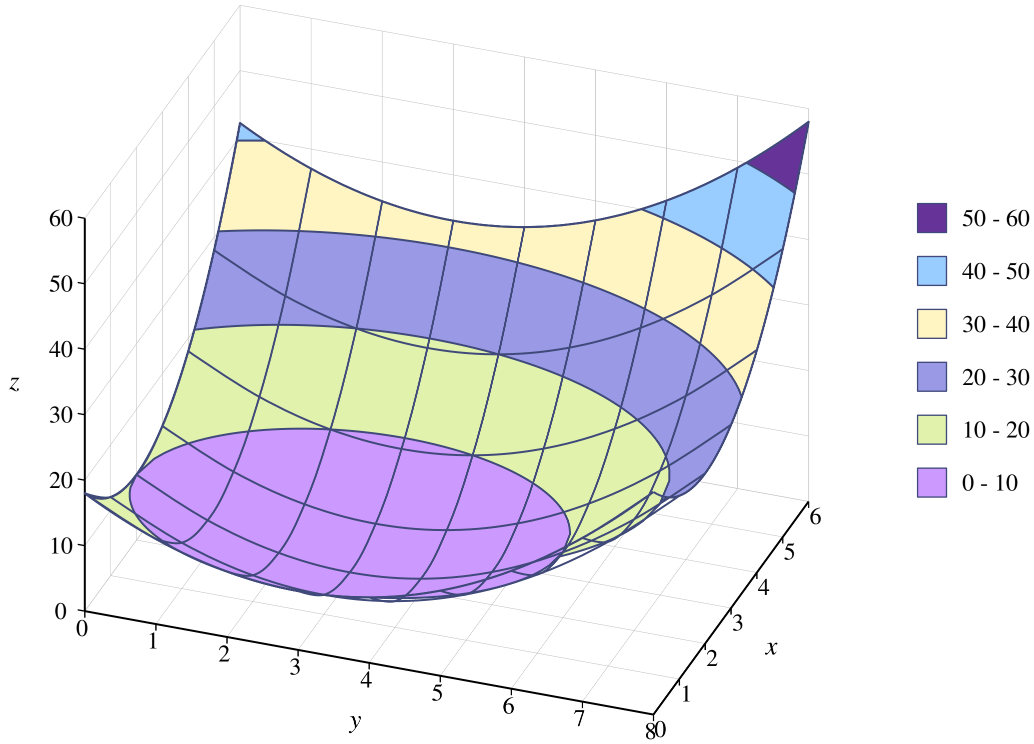
1. La surface $\mathcal{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est donnée sur la feuille annexe 1, figure 1.

   L'annexe* 1 *sera rendue complétée avec la copie.

   a) Le point $A(3;2;3)$ appartient-il à la surface $\mathcal{S}$? Justifier.
   b) Placer sur la figure 1 le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à $\mathcal{S}$.
   c) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.
2. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes des bougies parfumées engendre la contrainte $x + y = 5$.
   a) Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?
   b) Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.
   c) Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent. On note C le point de la surface $\mathcal{S}$ qui correspond à ce coût minimum.
   d) On donne, sur la feuille annexe 1, figure 2, la projection orthogonale de la surface $\mathcal{S}$ sur le plan $(x\text{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathcal{S}$ »).
   Construire sur cette figure 2 la projection orthogonale sur le plan $(x\text{O}y)$ des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.
   Placer sur cette figure 2 le point C_1, projeté orthogonal du point C sur le plan $(x\text{O}y)$.

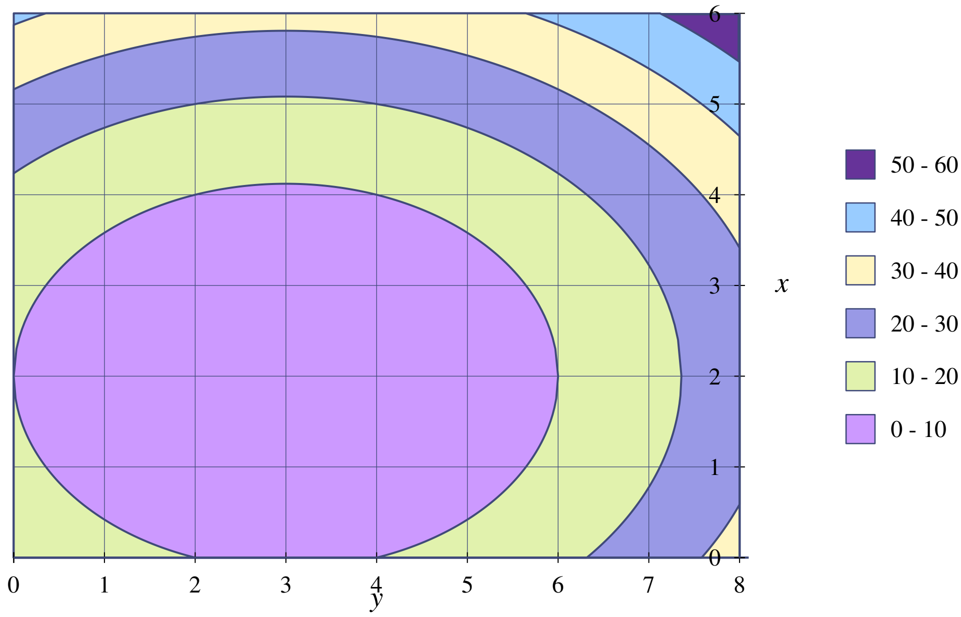
ANNEXE 1

FIGURE 1



ANNEXE 1

FIGURE 2



EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du montant des ventes d'appareils photos numériques en France, en milliers d'euros, entre 1999 et 2004.

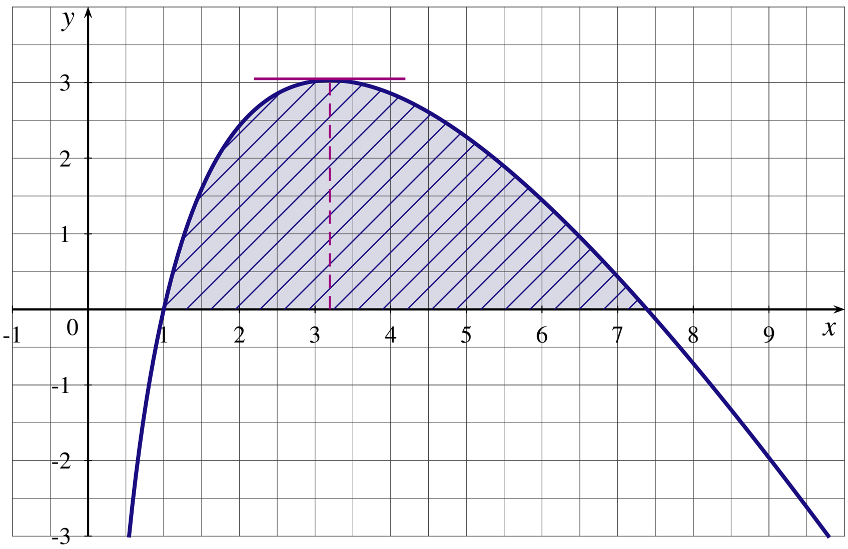
Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Montant des ventes y_i	179	332	584	1092	2675	4164

1. Calculer l'augmentation, en pourcentage, du montant des ventes entre 1999 et 2000 puis entre 2000 et 2001. On exprimera ces pourcentages par un nombre entier en effectuant un arrondi.

   Peut-on additionner ces augmentations successives pour obtenir le pourcentage d'augmentation entre 1999 et 2001 ? Justifier.
2. La rapidité de la croissance suggère un ajustement de type exponentiel. On pose : $z_i = \ln(y_i)$.
   a) Présenter la série statistique $(x_i ; z_i)$ dans un tableau en arrondissant les valeurs de z_i au centième.
   b) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés, les coefficients seront arrondis au centième.
   c) En utilisant cet ajustement, donner une estimation du montant des ventes pour l'année 2008, arrondie au millier d'euros.
3. Du fait de l'apparition des téléphones mobiles avec appareil photo intégré, on a observé un ralentissement dans la progression des ventes, avec un montant de 5027 milliers d'euros en 2005 puis une diminution de 10 % en 2006.
   a) Calculer le montant des ventes, arrondi au millier d'euros, pour 2006.
   b) En supposant qu'après 2006 le montant des ventes continuera de baisser de 10 % par an, quelle prévision peut-on faire pour 2008 ? (On arrondira le montant au millier d'euros)

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -2x + \left(e^2 - 1\right)\ln x + 2$.
La courbe de la fonction f est donnée sur la figure ci-dessous :



1. Vérifier par le calcul que $f(1) = 0$ et $f\left(e^2\right) = 0$.
2. À l'aide du graphique, déterminer approximativement :
   a) le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice ;

b) les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul,

3. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.

   c) En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (le résultat sera arrondi à l'unité).

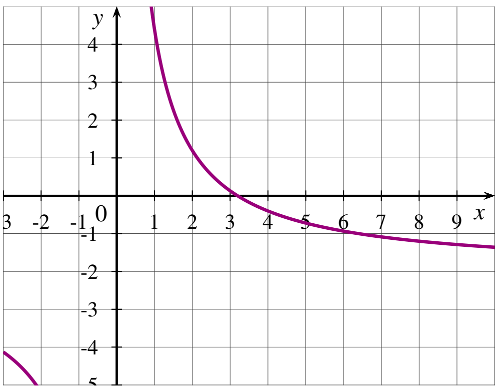
4. Parmi les courbes données en annexe, une seule correspond à celle d'une primitive de f. Déterminer la courbe qui convient, en expliquant votre choix (on pourra s'appuyer sur le signe de $f(x)$).

5. En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire, par une lecture graphique, une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré dans la figure ci-dessus.

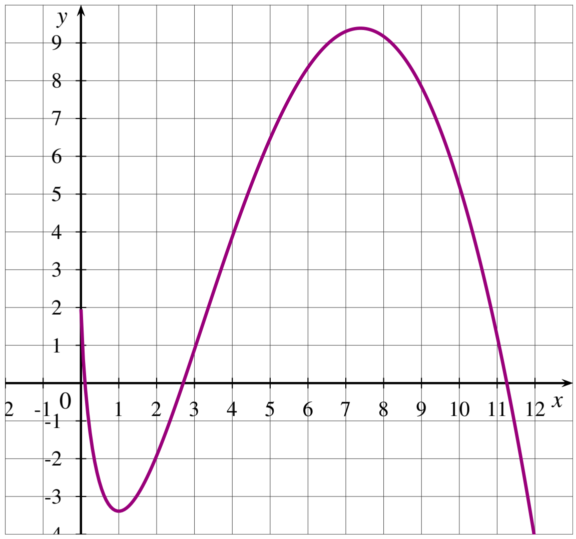
6. a) Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = -x^2 + \left(3 - \mathrm{e}^2\right)x + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)x\ln x$ est une primitive de f.

   b) Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise sur l'intervalle où ce bénéfice est positif ou nul.

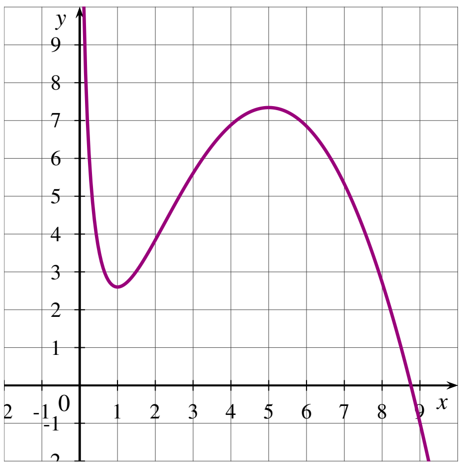
ANNEXE



Courbe de F_1



Courbe de F_2



Courbe de F_3

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2007

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées.
Chaque client achète une seule crêpe.
60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).
Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.
On appelle :
D l'évènement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'évènement : « le client achète une crêpe salée ».
On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.

On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Déterminer les probabilités des évènements D et $\overline{\text{D}}$.
2. a) Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?
   b) Calculer $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{D}}\right)$.
   c) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(\text{A} \cap \text{D})$.
   d) Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à 0,9.
3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à 0,01 près, qu'il soit venu l'après-midi ?
4. On vend 3 euros une crêpe salée et 2 euros une crêpe sucrée. La buvette reçoit 250 clients par jour.
   Quelle est l'espérance de la recette quotidienne due à la vente de crêpes ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \text{e} + \dfrac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \text{e}x + \ln 5$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\text{e}^x - 1)(\text{e}^x + 4) = 0$ est $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \dfrac{1}{100}\right)^n \leqslant 0{,}7$ alors $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}7}{\ln 0{,}99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
5. La limite quand x tend vers 1, $x < 1$, de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

EXERCICE 3 (9 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)\text{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

PARTIE B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Vérifier que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c) En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0;4]$.
   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   (Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.)

PARTIE C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0;4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression $f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}$.

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

PONDICHERY 2007

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, on ne demande aucune justification.
Barème : Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. Une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

PARTIE A

Dans cette partie, pour chaque question, indiquer sur votre copie le numéro de la question et préciser en toutes lettres, sans justifier votre choix, VRAI ou FAUX ou ON NE PEUT PAS RéPONDRE.

On connaît le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathscr{D}_f =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

1. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la représentation graphique de f.
2. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions dans $\mathscr{D}_f$.
3. Pour tout x appartenant à $]1;3[$, $f'(x) > 0$ (f' désigne la fonction dérivée de f sur $\mathscr{D}_f$).
4. Toute primitive de f sur $[3\ ;\ 8]$ est décroissante.
5. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est décroissante sur $[3\ ;\ +\infty[$

PARTIE B

Dans cette partie, pour chaque question, trois propositions sont formulées. Une seule d'entre elles convient. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la proposition qui vous semble exacte, sans justifier votre choix.

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. L'ensemble de définition D_g de g est égal à :

   a) $]0\ ;\ +\infty[$ b) $\mathbb{R} - \{0\}$ c) $\mathbb{R} - \{1\}$

2. L'équation $g(x) = 3$ admet pour solution :

   a) e^3 b) $\ln 3$ c) Aucune solution

3. La limite de g en $+\infty$ est :

   a) -1 b) $+\infty$ c) 2

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation des ménages sur les dernières années.
Le rang $x_1 = 1$ est donné pour l'année 1998. La consommation est exprimée en milliers d'euros.

Année	1998	2000	2001	2002	2004
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation en milliers d'euros y_i	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $P_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1 cm pour 10 000 € en ordonnées).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.
3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12{,}5x + b$ qui passe par le point G.
   a) Déterminer la valeur de b.
   b) Tracer la droite D dans le repère précédent.
4. Déterminer, à l'aide de l'ajustement précédent, la consommation estimée des ménages de cette ville en 2005.
5. En réalité, un relevé récent a permis de constater qu'en 2005 la consommation réelle des ménages de cette ville était de $y_8 = 140\,000$ €.
   Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise par l'estimation précédente par rapport à la valeur exacte (on donnera un résultat à l'aide d'un nombre entier en effectuant un arrondi).
6. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble alors plus adapté.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième.

x_i	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	...	...	...	...	4,94

   b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice ; cette équation est de la forme $z = cx + d$; on donnera les arrondis des coefficients c et d à 10^{-2}.
   c) En déduire que : $y = 20{,}49\mathrm{e}^{0{,}23x}$.
   d) Estimer alors, à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2007 à 100 € près.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Madame Boulard fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Boulard a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.
On sait que :
- 32 % des chatons sont des Siamois, 54 % des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54 % sont des mâles.
- 66 % des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96 % de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le prendre au hasard. On désigne par S, B, A, M et F les évènements suivants :

S : « Pierre achète un chaton Siamois » ;
B : « Pierre achète un chaton Birman » ;
A : « Pierre achète un chaton Abyssin » ;
M : « Pierre achète un chaton mâle » ;
F : « Pierre achète un chaton femelle ».

1. a) Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités.
   b) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.
2. a) Déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois,
   b) Calculer $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{A})$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
   c) En déduire que la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman est égale à 0,0532.
   d) Le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?
3. Finalement, Pierre est tellement séduit par ces chatons qu'il décide d'en acheter trois toujours au hasard. On assimilera ces achats à des tirages successifs avec remise.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans (*le résultat sera arrondi à* 10^{-3}) ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a) Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$; en donner une interprétation graphique.
2. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$.
3. a) Déterminer une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On pourra remarquer que $f(x) = 5u'(x) \times u(x) + 3$ avec $u(x)$ à préciser.
   b) En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.
4. a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2;4]$.
   b) Donner une interprétation graphique de I.
5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2000 et 4000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

BACCALAURÉAT 2007

SÉRIE ES (OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ) : INDEX THÉMATIQUE