

# BAC 2010

## ANNALES D'EXERCICES REGROUPÉS PAR THÈME

### OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

---

Ce document, rassemble l'ensemble des exercices, classés par thèmes, des sujets du baccalauréat de la série ES de la session 2010. De par la nature même de l'épreuve, les exercices peuvent recouvrir plusieurs thèmes.

Les exercices sont regroupés sous quatre rubriques :

- Analyse
- Probabilités
- Statistiques
- Spécialité

---

**Les exercices proposés sont établis à partir des sujets mis en ligne par  
D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P**

## SOMMAIRE DES EXERCICES DE LA SESSION 2010

---

<b>I</b>	<b>ANALYSE, ÉTUDE DE FONCTIONS</b>	<b>1</b>
I. 1	LECTURES GRAPHIQUES	1
	Antilles-Guyane 2010	1
	Pondichéry 2010	2
I. 2	FONCTION LOGARITHME	5
	Amérique du Nord 2010	5
	Centres Étrangers 2010	6
	Liban 2010	7
	Nouvelle Calédonie 2010	7
	Polynésie 2010	8
	Polynésie Septembre 2010	9
I. 3	FONCTION EXPONENTIELLE	11
	Amérique du Sud 2010	11
	Antilles Septembre 2010	12
	Antilles-Guyane 2010	13
	Asie 2010	14
	France Métropolitaine Juin 2010	16
	France Métropolitaine Septembre 2010	17
	La Réunion 2010	19
	Liban 2010	20
	Nouvelle Calédonie 2010	21
	Polynésie Septembre 2010	23
	Pondichéry 2010	24
I. 4	Q.C.M	26
	Amérique du Nord 2010	26
	Amérique du Sud 2010	27
	Antilles Septembre 2010	28
	Antilles-Guyane 2010	28
	Asie 2010	29
	Centres Étrangers 2010	30
	France Métropolitaine Septembre 2010	31
	La Réunion 2010	32
	Polynésie 2010	32
<b>II</b>	<b>Q.C.M DIVERS</b>	<b>34</b>
II. 1	Q.C.M ANALYSE ET PROBABILITÉS	34
	France Métropolitaine Juin 2010	34
<b>III</b>	<b>PROBABILITÉS</b>	<b>35</b>
III. 1	GÉNÉRALITÉS	35
	France Métropolitaine Juin 2010	35
	France Métropolitaine Septembre 2010	35
	Polynésie Septembre 2010	36
III. 2	LOI BINOIMIALE	38
	Amérique du Sud 2010	38

Antilles-Guyane 2010	38
Asie 2010	39
Nouvelle Calédonie 2010	40
Polynésie 2010	41
III. 3 VARIABLE NUMÉRIQUE	42
Amérique du Nord 2010	42
Antilles Septembre 2010	42
Centres Étrangers 2010	43
La Réunion 2010	44
Pondichéry 2010	45
III. 4 Q.C.M	47
Liban 2010	47
<b>IV STATISTIQUES</b>	<b>48</b>
IV. 1 AJUSTEMENT AFFINE D'UN NUAGE DE POINTS	48
Centres Étrangers 2010	48
Liban 2010	49
Nouvelle Calédonie 2010	49
IV. 2 AJUSTEMENT EXPONENTIEL D'UN NUAGE DE POINTS	51
Amérique du Nord 2010	51
Amérique du Sud 2010	51
France Métropolitaine Juin 2010	53
France Métropolitaine Septembre 2010	53
La Réunion 2010	54
Polynésie 2010	56
Polynésie Septembre 2010	56
IV. 3 AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS	59
Antilles Septembre 2010	59
Asie 2010	59
Pondichéry 2010	60
<b>V SPÉCIALITÉ</b>	<b>62</b>
V. 1 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES	62
France Métropolitaine Juin 2010	62
V. 2 GRAPHERS	63
Pondichéry 2010	63
V. 3 GRAPHERS PROBABILISTES	65
Amérique du Nord 2010	65
Antilles-Guyane 2010	65
La Réunion 2010	66
Liban 2010	67
Polynésie 2010	68
V. 4 SUITES	69
Centres Étrangers 2010	69
Nouvelle Calédonie 2010	69
V. 5 Q.C.M	71
Amérique du Sud 2010	71
Asie 2010	72
France Métropolitaine Septembre 2010	73

# I ANALYSE, ÉTUDE DE FONCTIONS

## I.1 LECTURES GRAPHIQUES

### EXERCICE 1

*Antilles-Guyane 2010 (1)*

La courbe  $\mathcal{C}_f$  donnée en annexe 1 est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction  $f$  définie, dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point de coordonnées  $(3;0)$ ; on sait de plus que la droite d'équation  $y = -2$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**1<sup>re</sup> PARTIE** : Étude préliminaire de  $f$

*Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.*

1. Donner la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$ .
3. Préciser le signe de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

**2<sup>e</sup> PARTIE** : Étude d'une fonction composée

*Pour cette partie, des justifications sont attendues.*

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = \exp(f(x))$ .

1. Déterminer la limite de  $g$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. Résoudre sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  l'équation  $g(x) = 1$ .

**3<sup>e</sup> PARTIE**

La fonction  $f$  est la dérivée d'une fonction  $F$  définie sur  $[1; +\infty[$ .

1. La fonction  $F$  est représentée sur l'une des 3 courbes données en annexe 2. Préciser laquelle, en justifiant votre réponse.
2. Déterminer graphiquement  $F(2)$  et  $F(3)$  avec la précision permise par le graphique.
3. On s'intéresse au domaine du plan délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 2$  et  $x = 3$ . On notera  $A$  l'aire de ce domaine, exprimée en unités d'aire.

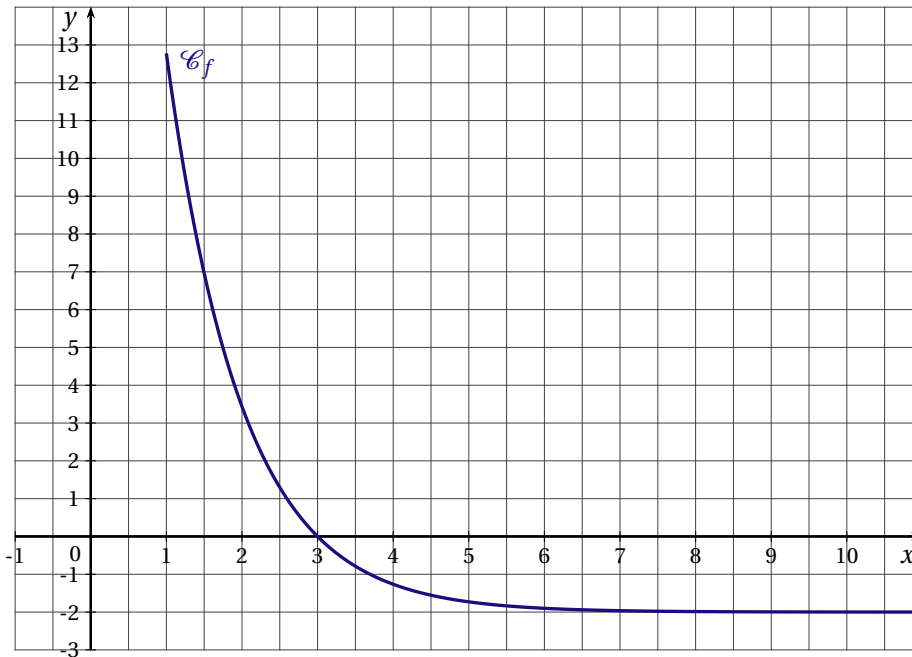
Donner une méthode permettant de déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine précédemment défini et en donner une estimation.

**4<sup>e</sup> PARTIE**

On donne l'expression de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = 2e^{-x+3} - 2$ .

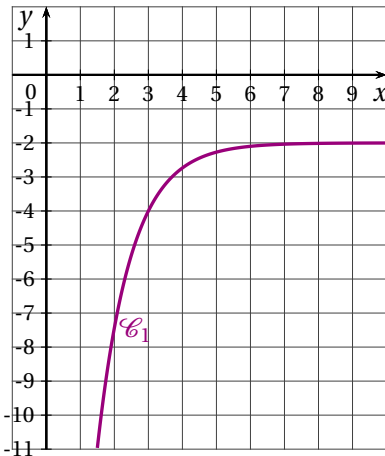
Calculer l'aire  $A$  du domaine (en unités d'aire); on donnera la valeur exacte à l'aide du réel  $e$ , puis l'arrondi au centième.

ANNEXE 1

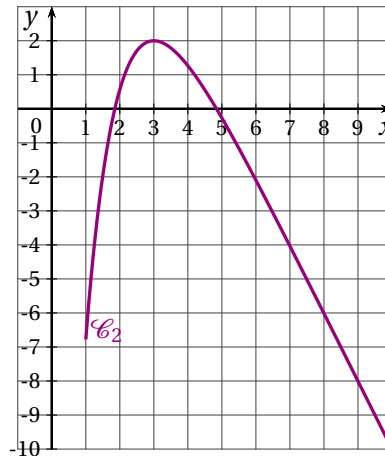


ANNEXE 2

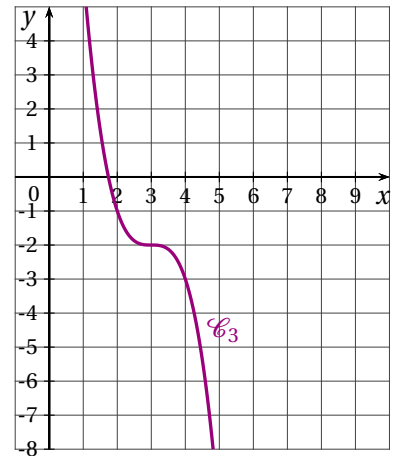
COURBE N° 1



COURBE N° 2



COURBE N° 3



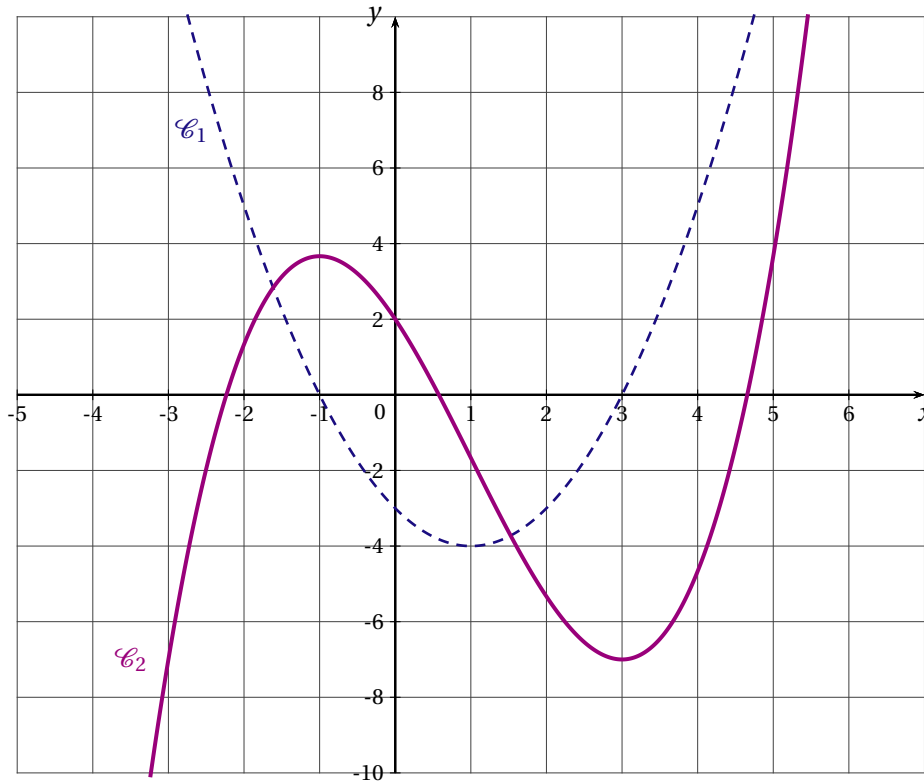
EXERCICE 2

Pondichéry 2010 (4)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A : Étude graphique

Les courbes représentatives d'une fonction  $f$  et de sa fonction dérivée  $f'$  sont données ci-dessous. Associer chaque courbe  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  à la fonction qu'elle représente. Justifier votre réponse.



**PARTIE B : Constructions**

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Chacun des tracés sera brièvement expliqué.

- a. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction  $g$  vérifiant les conditions suivantes :  
 $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[-3;3]$  et l'équation  $g'(x) = 0$  admet trois solutions sur  $[-3;3]$ .
- b. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction  $h$  définie et continue sur  $[-3;3]$  et vérifiant les conditions suivantes :

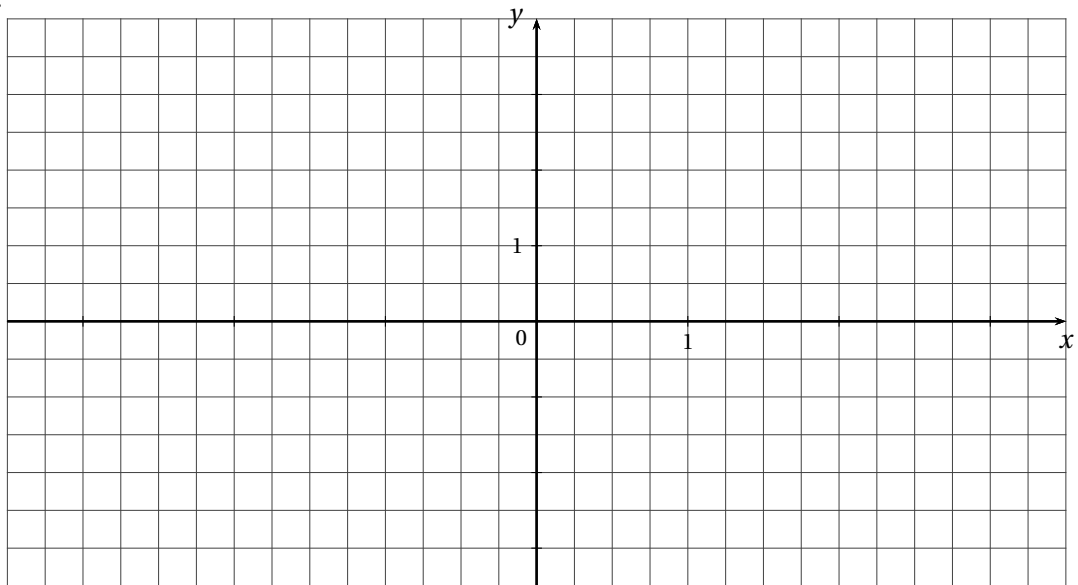
$x$	-3	0	2	3
$\ln[h(x)]$				

- c. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction  $k$  définie et continue sur  $[-3;3]$  et vérifiant les conditions suivantes :

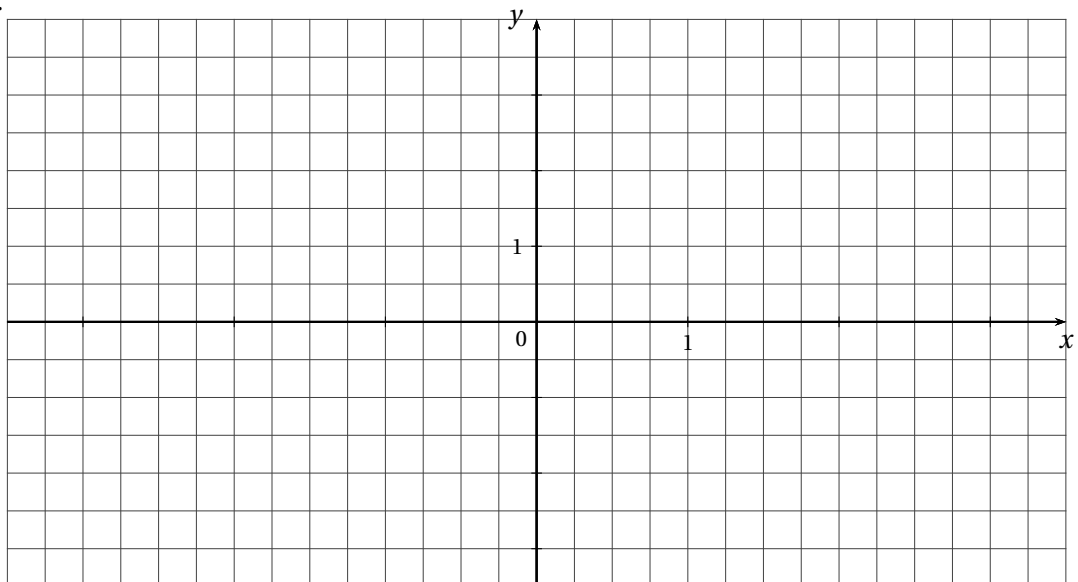
$$4 \leq \int_1^3 k(x) dx \leq 6.$$

**ANNEXE 2**  
*À rendre avec la copie*

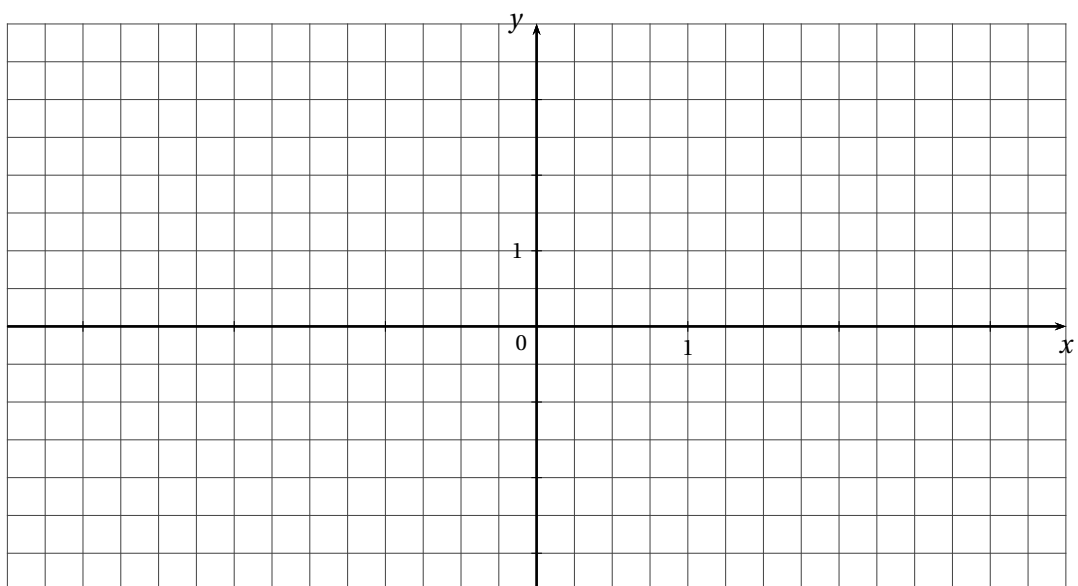
**PARTIE B : a.**



**PARTIE B : b.**



**PARTIE B : c.**



## I.2 FONCTION LOGARITHME

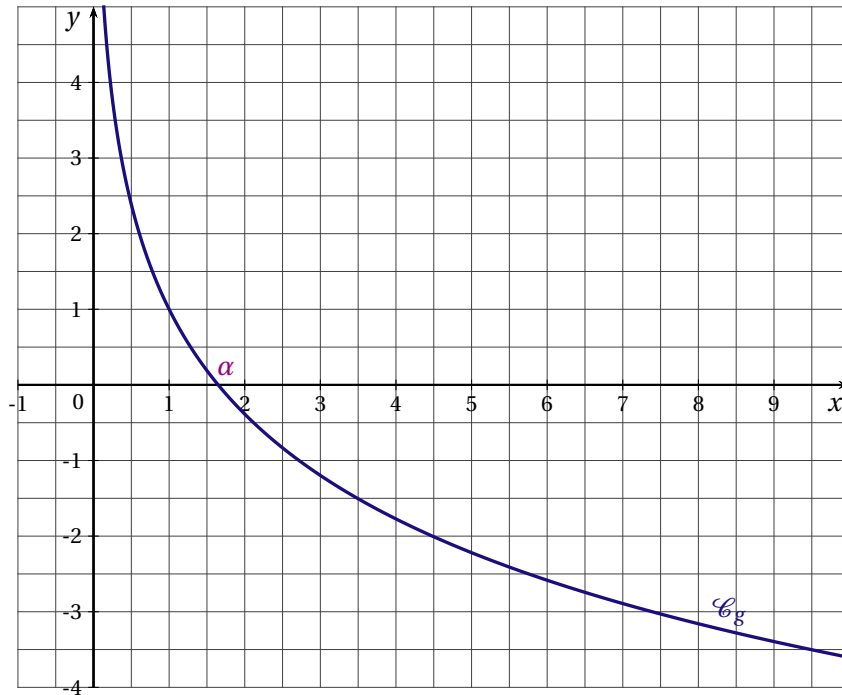
## EXERCICE 1

Amérique du Nord 2010 (3)

## PARTIE A - Étude préliminaire

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 1 - 2\ln(x)$ .

On donne ci-dessous sa courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Cette courbe  $\mathcal{C}_g$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\alpha$ .



- Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .
- On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Donner, en justifiant, le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

## PARTIE B - Étude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$ .

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ).  
On admettra que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .
- a) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b) Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- a) Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
On pourra remarquer que  $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$ .  
b) Soit  $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$ . Déterminer la valeur exacte de  $I$ , puis en donner une valeur approchée au centième près.

## PARTIE C - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.



Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie B, avec  $x$  exprimé en milliers de pièces et  $f(x)$  exprimé en euros.

- Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
- Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?

## EXERCICE 2

Centres Étrangers 2010 (4)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \ln(x)$ .

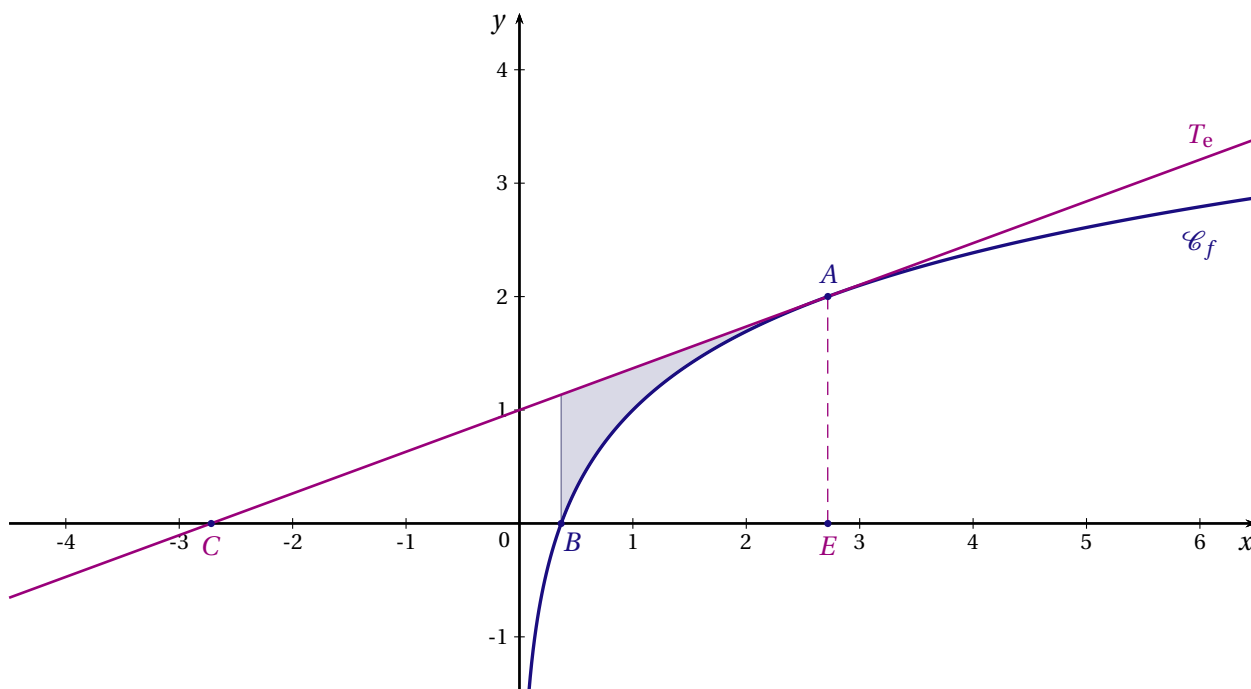
On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère du plan.

Le point  $A(e; 2)$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  et on note  $T_e$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$ .

Le point  $C$  est le point d'intersection de la tangente  $T_e$  et de l'axe des abscisses.

Le point  $E$  a pour coordonnées  $(e; 0)$ .

On admettra que sur  $]0; +\infty[$ ,  $\mathcal{C}_f$  reste en dessous de  $T_e$ .



- Le point  $B$  est le point d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et de l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées du point  $B$ .
  - Démontrer que, pour  $x \geq \frac{1}{e}$ ,  $f(x) \geq 0$ .
- Déterminer une équation de  $T_e$ .
  - En déduire les coordonnées du point  $C$ .
  - Vérifier que les points  $E$  et  $C$  sont symétriques par rapport à  $O$ , origine du repère.
- On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x \ln x$ .
  - Démontrer que la fonction  $g$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

- b) En déduire la valeur exacte de  $\int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln x) dx$ . Interpréter ce nombre.
4. Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.  
 Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par  $\mathcal{C}_f$ ,  $T_e$  et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par  $B$  et  $E$ . Ce domaine est grisé sur le graphique.  
 Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.

**EXERCICE 3**

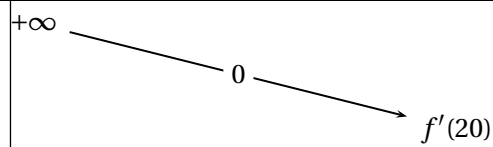
*Liban 2010 (3)*

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $]0; 20]$  par  $f(x) = (3e^2 - x) \ln x + 10$ .

1. a) Déterminer la limite de  $f$  en 0.  
 b) Calculer la valeur exacte de  $f(e^2)$ , puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0; 20]$ ,  $f'(x) = -\ln x + \frac{3e^2}{x} - 1$  où  $f'$  désigne la dérivée de la fonction  $f$ .
3. On admet que la fonction dérivée  $f'$  est strictement décroissante sur  $]0; 20]$  et que son tableau de variations est le suivant :

$x$	$0$	$e^2$		$20$
$f'(x)$	$+\infty$	$0$		$f'(20)$



- a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; 20]$ .
- b) Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; 20]$  et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
4. a) Montrer que, sur l'intervalle  $[0,6; 0,7]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution notée  $\alpha$ . À la calculatrice, donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,001 près par excès.  
 b) Démontrer que  $f(x)$  est négatif pour tout  $x \in ]0; \alpha[$  et que  $f(x)$  est positif pour tout  $x \in ]\alpha; 20]$ .

**PARTIE B**

Une entreprise produit et vend chaque semaine  $x$  milliers de DVD,  $x$  appartenant à  $]0; 20]$ .  
 Le bénéfice réalisé est égal à  $f(x)$  milliers d'euros où  $f$  est la fonction étudiée dans la partie A.  
 En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

**EXERCICE 4**

*Nouvelle Calédonie 2010 (4)*

**PARTIE A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$ .

1. Étudier les variations de  $g$  sur  $[1; +\infty[$ .

2. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$  dans  $[1; +\infty[$ .
3. En déduire que  $g(x) > 0$  si, et seulement si,  $x > \sqrt{e}$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
  - a) Montrer que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$ ,  $f'(x) = 4xg(x)$ .
  - b) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[1; +\infty[$  et en déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
3. a) Montrer que, dans l'intervalle  $[2; 3]$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique notée  $\alpha$ .
  - b) Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

**EXERCICE 5***Polynésie 2010 (4)***PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 10]$  par

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2$$

1. Calculer  $f(0)$  et  $f(1)$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 10]$ ; on note  $f'$  sa fonction dérivée sur cet intervalle. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 10]$ ,

$$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$$

3. a) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 10]$ .
  - b) Déterminer les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$ .
  - c) Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$ .
4. a) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $[5; 10]$  une solution unique  $x_0$ .
  - b) Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut à  $10^{-1}$  de  $x_0$ .
5. On admet qu'une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; 10]$  est la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \frac{-1}{12}x^3 + x^2 - (4,75 + 3\ln 2)x + 3(x+1)\ln(x+1)$$

Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de  $\frac{1}{10} \int_0^{10} f(x) dx$  est 2,8.

**PARTIE B**

À l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.

On note  $x$  le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que  $x$  est un réel compris entre 0 et 10.

Le bénéfice réalisé pour la vente de  $x$  milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  par :

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2$$

Déduire de la PARTIE A les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

1. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit?
2. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal? Quel est alors ce bénéfice maximal? (à 100 euros près).
3. Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10 000 guirlandes?

**EXERCICE 6***Polynésie Septembre 2010 (4)*

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 4]$  par :

$$f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x + 1)$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère orthogonal, donnée en annexe.

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

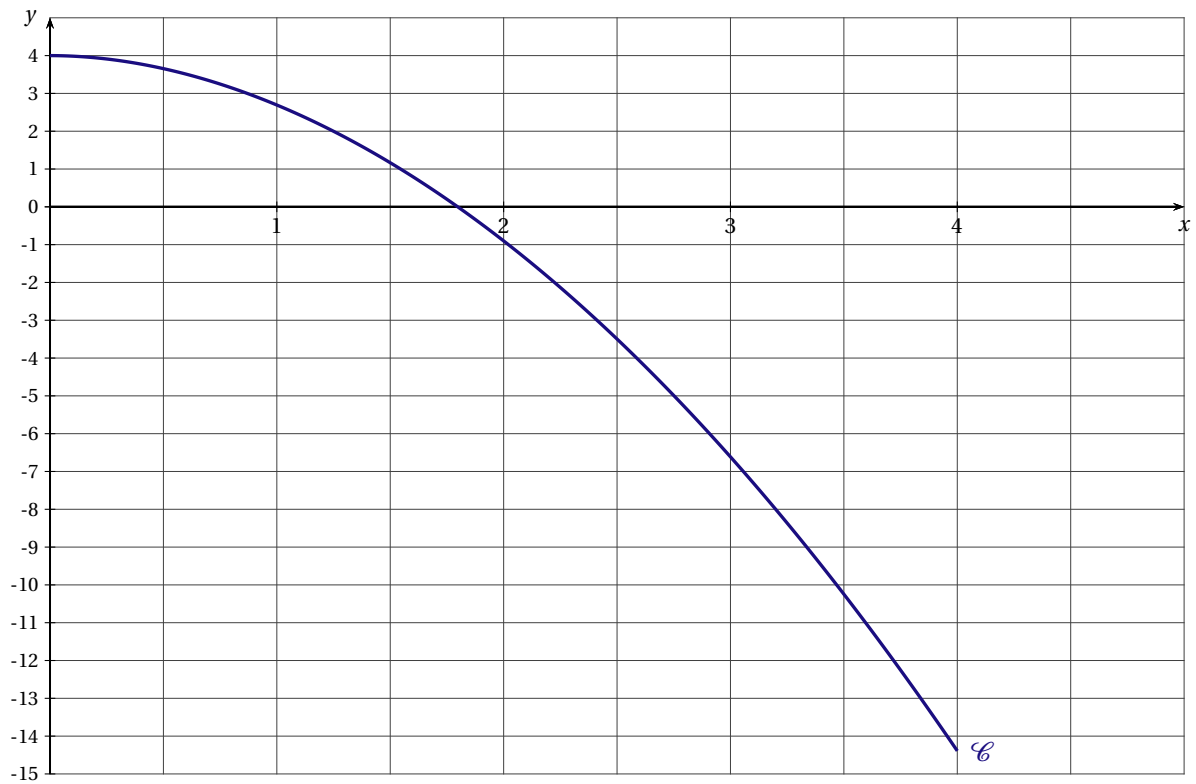
1. Calculer  $f'(x)$ .
2. Justifier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ .
3. Montrer que sur l'intervalle  $[0; 4]$ , l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$ .  
Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,01. En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ .
4. On définit la fonction  $F$  dérivable sur l'intervalle  $[0; 4]$  par :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + (x + 1)\ln(x + 1).$$

Montrer que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4]$ .

5. Soit  $\mathcal{A}$  l'aire, en unités d'aire, du domaine  $\mathcal{D}$  délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .
  - a) Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  sur la figure fournie en annexe.
  - b) Par lecture graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de  $\mathcal{A}$ .
  - c) Calculer la valeur exacte en unités d'aire de  $\mathcal{A}$ . Vérifier la cohérence de vos résultats.

## ANNEXE

*À rendre avec la copie*Courbe représentative de la fonction  $f$ .

### I.3 FONCTION EXPONENTIELLE

#### EXERCICE 1

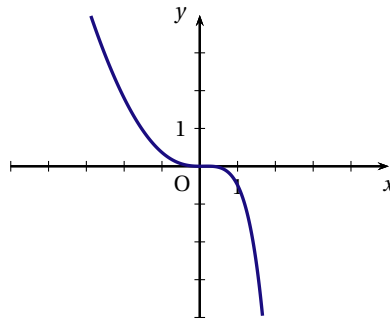
*Amérique du Sud 2010 (4)*

On considère la fonction numérique  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ , on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}.$$

On note  $f'$  sa fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$ .

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[-3; 2]$  en observant cette courbe?

Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = xg(x)$  où  $g(x) = 1 - (x+2)e^{x-1}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
Pour la suite, on admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $g'$  sa fonction dérivée.
3. Étude du signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - a) Calculer les limites respectives de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .  
On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité :  $g(x) = 1 - \frac{xe^x + 2e^x}{e}$ .
  - b) Calculer  $g'(x)$  et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel  $x$ .
  - c) En déduire le sens de variation de la fonction  $g$  puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.
  - d) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\alpha$  cette solution. Justifier que  $0,20 < \alpha < 0,21$ .
  - e) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. Sens de variation de la fonction  $f$ 
  - a) Étudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$
  - c) Que pensez-vous de la conjecture de la question 1?

**EXERCICE 2***Antilles Septembre 2010 (4)***PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1;6]$  par  $f(x) = ax + b - \frac{16}{x}$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

On admet que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[1;6]$  et on note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur cet intervalle. La courbe représentative de  $f$ , donnée en annexe, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point  $A$  de coordonnées  $(2;4)$ .

1. a) Déterminer graphiquement les valeurs de  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$  et  $f'(2)$ .  
b) En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $[1;6]$  par  $f(x) = -4x + 20 - \frac{16}{x}$ .  
a) Calculer  $f'(x)$  puis étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1;6]$ .  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1;6]$  en précisant uniquement les valeurs de  $f(1)$ ,  $f(2)$  et  $f(4)$ .  
c) En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[1;6]$ .
3. On considère la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[1;6]$  par  $F(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16 \ln x$ .  
a) Montrer que  $F$  est la primitive de la fonction  $f$  sur  $[1;6]$  telle que  $F(1) = 0$ .  
b) En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction  $F$  sur l'intervalle  $[1;6]$ , les valeurs seront arrondies au millièmè.

**PARTIE B**

Une entreprise fabrique des pièces pour assemblage de moteurs qu'elle conditionne par centaines. Sa fabrication journalière varie entre 100 et 600 pièces. L'objectif est d'étudier le bénéfice quotidien réalisé par cette entreprise.

Une étude a montré que le bénéfice marginal quotidien de cette entreprise est modélisé par la fonction  $f$  définie dans la partie A, appelée fonction « bénéfice marginal ». Pour  $x$  compris entre 1 et 6,  $x$  est exprimé en centaines de pièces fabriquées et vendues quotidiennement et  $f(x)$  est exprimé en milliers d'euros.

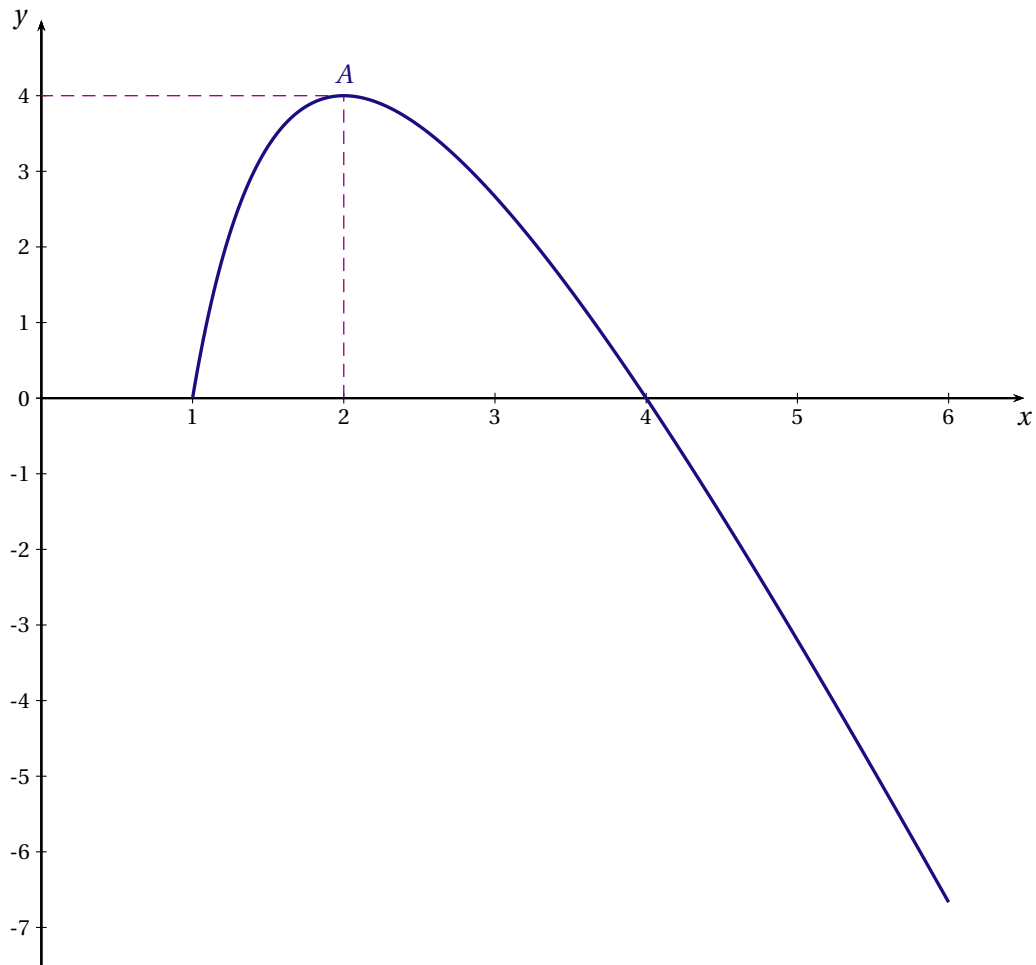
En économie, la fonction « bénéfice marginal » est considérée comme la dérivée d'une fonction appelée fonction « bénéfice ».

On sait de plus que le bénéfice de l'entreprise est nul pour la fabrication et la vente quotidienne de 100 pièces.

*Dans ces questions toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. En déduire le bénéfice maximal (on donnera ce bénéfice maximal arrondi à l'unité d'euro).
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice supérieur à 3000 € (on donnera le résultat arrondi à l'unité)

## ANNEXE



## EXERCICE 3

*Antilles-Guyane 2010 (4)*

## PARTIE A

1. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 20]$  par  $f(x) = 0,3x + 1,5 - 0,9\ln(x + 1)$ .  
On admet que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 20]$ .  
Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 20]$  et dresser son tableau de variation.
2. On donne la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 20]$  par  $g(x) = -0,05x - 1,5 + 0,9\ln(x + 1)$ .  
On admet que  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 17]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[17; 20]$ .
  - a) Justifier qu'il existe un unique réel  $x_0$  dans l'intervalle  $[0; 17]$  tel que  $g(x_0) = 0$ . Donner un encadrement de  $x_0$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0; 20]$ .

## PARTIE B

*Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A. On demande de justifier les réponses.*

Dans une petite ville, un promoteur immobilier projette de construire un lotissement dont le nombre de maisons ne pourra pas dépasser 20 maisons construites.



Le coût de production, en millions d'euros, pour  $n$  maisons construites ( $0 \leq n \leq 20$ ) est donné par :

$$C(n) = 0,3n + 1,5 - 0,9 \ln(n + 1)$$

Chaque maison est vendue 250 000 euros.

1. a) Calculer  $C(0)$ . Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
  - b) Combien de maisons le promoteur doit-il prévoir de construire pour que le coût de production soit minimal?
  2. a) Montrer que le bénéfice réalisé pour la fabrication de  $n$  maisons est, en millions d'euros, donné par  $B(n) = -0,05n - 1,5 + 0,9 \ln(n + 1)$ .
  - b) Déterminer le nombre de maisons à construire pour que le bénéfice soit maximal. Quel est alors ce bénéfice (à 100 euros près)?
  - c) Déterminer le nombre minimal de maisons à construire pour que le promoteur ne travaille pas à perte.
- Pour la question suivante, on explicitera la démarche utilisée. Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
- d) À partir de combien de maisons construites le bénéfice du promoteur est-il supérieur à 200 000 euros?

#### EXERCICE 4

Asie 2010 (3)

Suite à une étude de marché :

- l'offre d'un produit est modélisée par une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 6]$  ;
- la demande de ce même produit est modélisée par une fonction  $g$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 6]$ .

Les courbes représentatives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  de ces fonctions sont dessinées sur l'annexe (à rendre avec la copie). On désigne par  $x$  la quantité du produit exprimée en milliers d'unités, avec  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 6]$ . Les nombres  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des prix unitaires exprimés en centaines d'euros. L'expression de la fonction  $f$  est donnée par  $f(x) = 0,4e^{0,4x}$ .

1. On rappelle que le prix d'équilibre est le prix unitaire qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.
  - a) Lire sur le graphique le prix d'équilibre  $p_0$  (en centaines d'euros) et la quantité d'équilibre  $q_0$  (en milliers d'unités).
  - b) Estimer en euros le chiffre d'affaires réalisé par la vente de cette quantité  $q_0$  au prix d'équilibre  $p_0$ .
2. a) Mettre en évidence, sur le graphique joint en annexe, l'intégrale suivante :  $\int_0^5 f(x) dx$ .
- b) Calculer cette intégrale.
- c) Certains producteurs étaient disposés à proposer un prix inférieur au prix d'équilibre. Le gain supplémentaire réalisé par ces producteurs est appelé le surplus des producteurs. Le surplus des producteurs  $S_p$  est donné par la formule suivante :

$$S_p = q_0 \times p_0 - \int_0^5 f(x) dx.$$

Estimer ce surplus (en centaines de milliers d'euros).

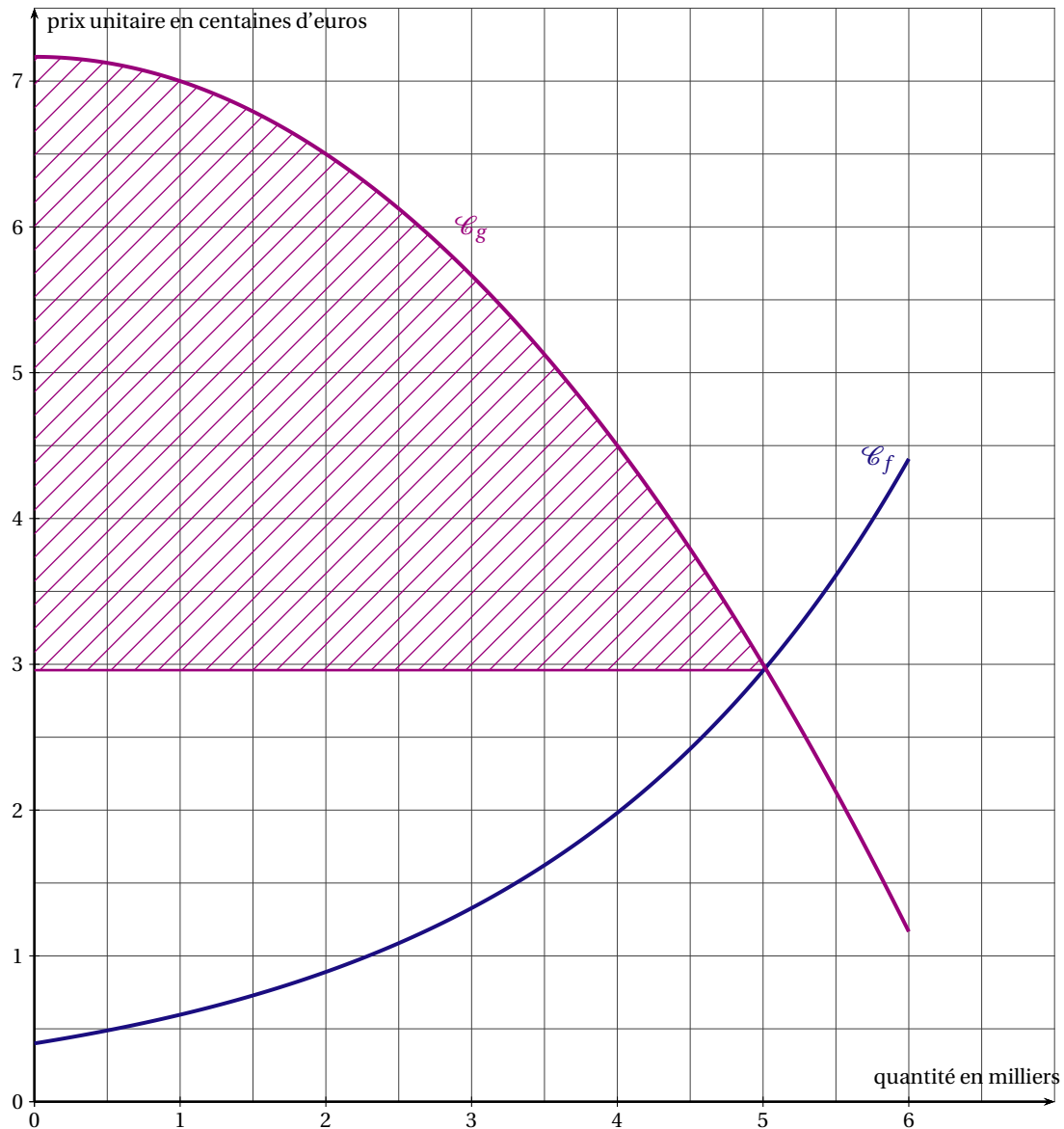
3. a) Certains consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. L'économie réalisée par ces consommateurs est appelée le surplus des consommateurs. Ce surplus est représenté par la partie hachurée du graphique. Par une lecture graphique, Paul estime à moins de 10 unités d'aire cette partie, alors que Jeanne l'estime à plus de 10. Qui a raison? Argumenter.

b) Dans cette question, toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée. Pour estimer plus précisément le surplus des consommateurs, Michel approche la courbe  $\mathcal{C}_g$  par une parabole  $P$  passant par les points de coordonnées (1;7) et (5;3). Il a fait trois essais avec un logiciel de calcul formel, dont les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	Équation de la parabole $P$	Estimation du surplus des consommateurs (en centaines de milliers d'euros)
Essai 1	$y = -\frac{40}{21}x^2 + \frac{292}{21}x - 5$	54,7
Essai 2	$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{43}{6}$	14,11
Essai 3	$y = \frac{2}{21}x^2 - \frac{44}{21}x + 9$	8,0

Quel essai est le plus pertinent? Expliquer la réponse.

**ANNEXE : à rendre avec la copie**



**EXERCICE 5***France Métropolitaine Juin 2010 (4)***L'annexe 1 est à rendre avec la copie**

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché. Soit  $x$  la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée en milliers.

La fonction d'offre de cet appareil est la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 35]$  par :

$$f(x) = 153e^{0,05x}$$

Le nombre réel  $f(x)$  désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité  $x$ , exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 35]$  par :

$$g(x) = -116\ln(x + 1) + 504$$

Le nombre réel  $g(x)$  désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité  $x$ , exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1. a) Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 35]$ .  
 b) Démontrer que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; 35]$ .  
 c) Les courbes représentatives respectives  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  des fonctions  $f$  et  $g$ , tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie**.  
 Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection  $E$ .

2. Afin de déterminer les coordonnées du point  $E$  de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle  $[0; 35]$  l'équation  $f(x) = g(x)$ .

Pour cela, on considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[0; 35]$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

- a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0; 35]$ .  
*On pourra utiliser la question 1.*
  - b) Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  dans l'intervalle  $[0; 35]$ .
  - c) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de  $x_0$  au millième.
  - d) On pose  $y_0 = f(x_0)$ . En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de  $y_0$  au centième.
  - e) Sachant que  $y_0$  représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix?
3. On prendra dans cette question  $x_0 = 8,871$  et  $y_0 = 238,41$ .
    - a) Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 35]$ .
    - b) On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel  $S$  défini par la formule :

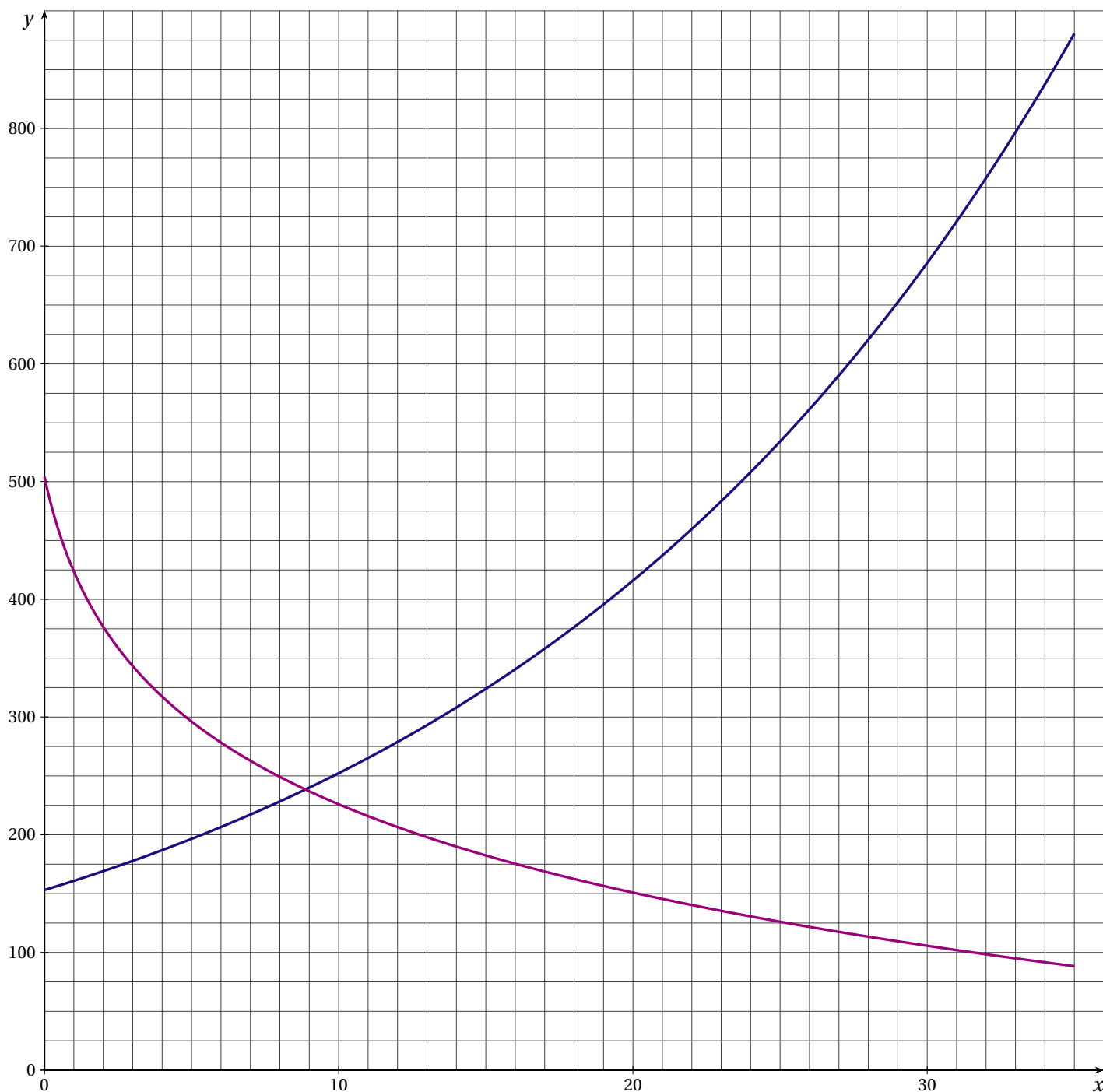
$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx$$

Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel  $S$ .

Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel  $S$ .

## ANNEXE 1

## Exercice 4 : commun à tous les candidats



## EXERCICE 6

France Métropolitaine Septembre 2010 (3)

## PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies et dérivables pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[4;6]$  par  $f(x) = 100(e^x - 45)$ ,  $g(x) = 10^6 e^{-x}$  et  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

On note  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[4;6]$ .

Résolution de l'équation  $h(x) = 0$ .

1. a) Démontrer que la fonction  $h$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[4; 6]$ .  
 b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$ .  
 c) Justifier que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[4; 6]$ .
2. a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe (*les résultats seront arrondis à la centaine la plus proche*).  
 b) Sur la figure fournie en annexe, tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.  
 c) Placer  $\alpha$  sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la valeur exacte du nombre réel  $\alpha$  est égale à  $3 \ln 5$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

**PARTIE B** : Application économique

Les fonctions  $f$  et  $g$  définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit de prix unitaire  $x$ , compris entre 4 et 6 euros :

- $f(x)$  est la quantité, exprimée en kilogrammes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire  $x$ ;
- $g(x)$  la quantité, exprimée en kilogrammes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire  $x$ .

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de  $x$  pour laquelle l'offre est égale à la demande.

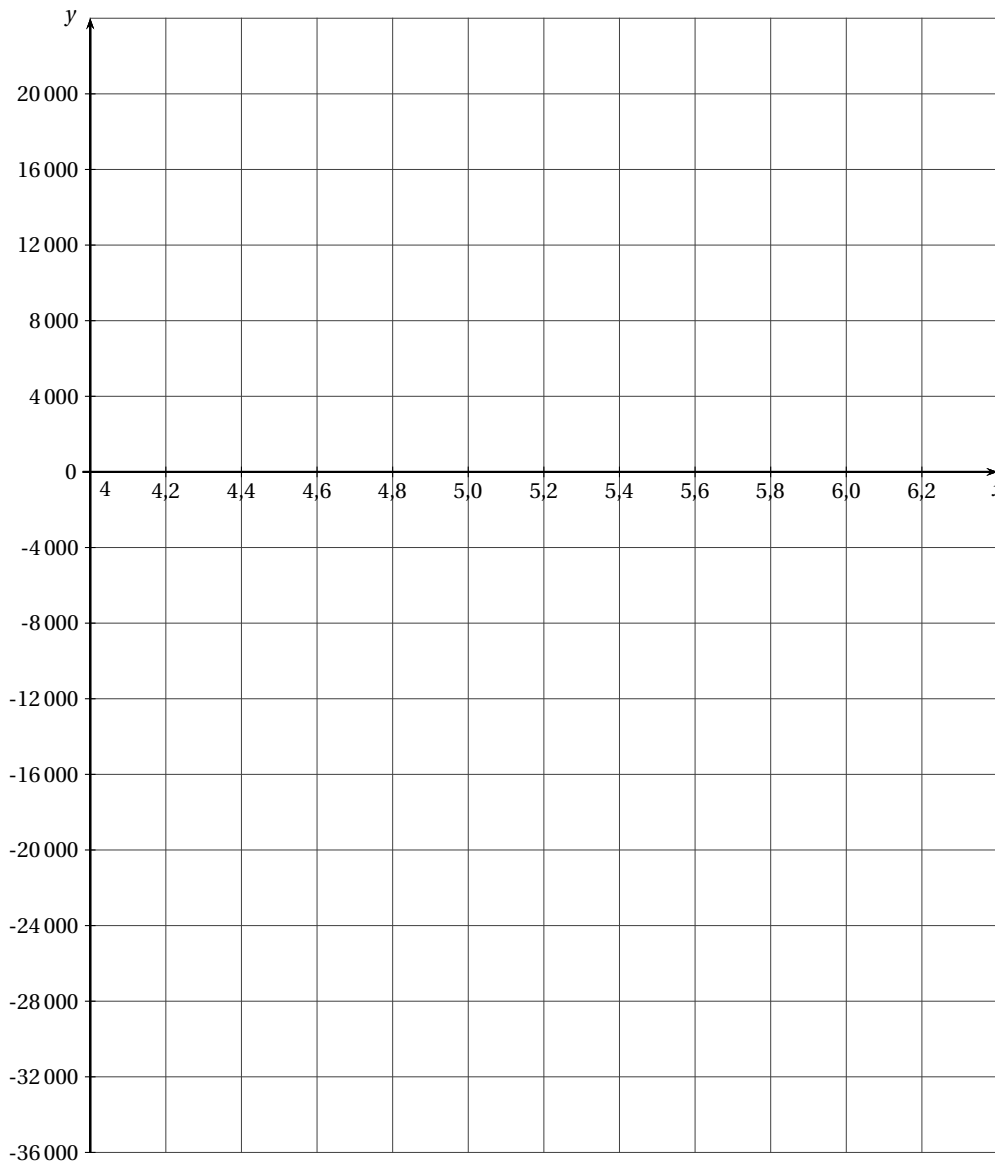
1. Quel est, exprimé au centime d'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché? Justifier.
2. Quelle quantité de produit, exprimée en kilogrammes, correspond à ce prix unitaire d'équilibre?

**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE**

Tableau à compléter

$x$	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
$h(x)$	17 400					-3600	-8100			-25500	-33400

Graphique à compléter



**EXERCICE 7**

*La Réunion 2010 (4)*

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

où  $x$  est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et  $f(x)$  le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. a) On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- b) On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée. Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe pour  $x$  élément de l'intervalle  $[0; +\infty[$ .  
Donner le tableau complet des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[0;5]$ .

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0;5]$  est donnée en annexe 2.

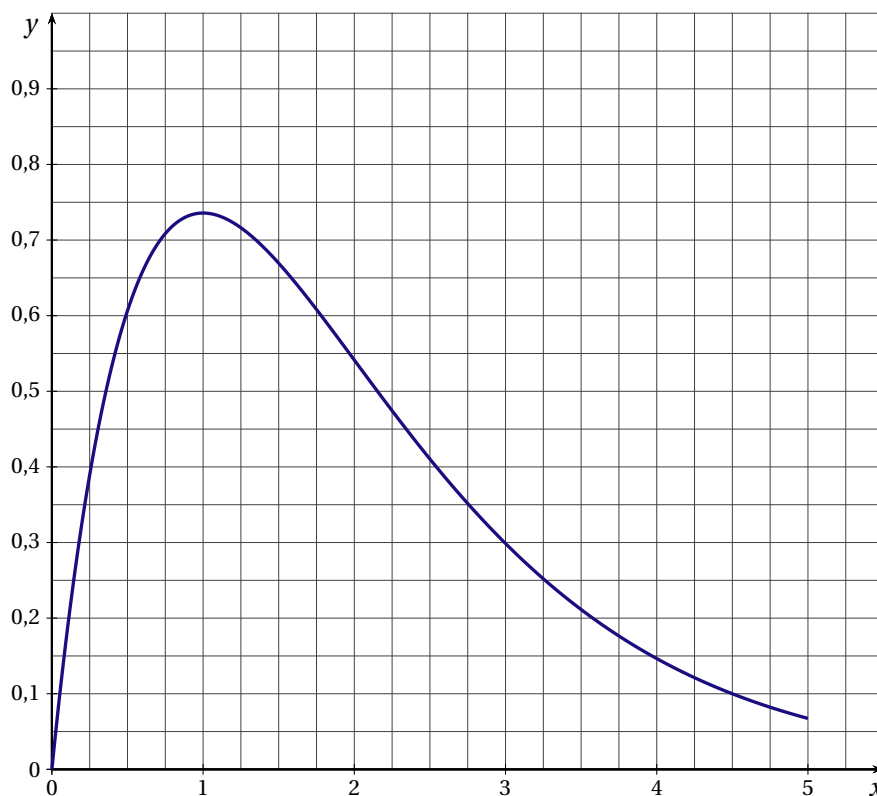
- Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[0;5]$  par  $F(x) = (-2 - 2x)e^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur cet intervalle.
  - Calculer la valeur moyenne  $m$  (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.  
On déterminera la valeur exacte de  $m$  puis on donnera sa valeur approchée arrondie à 0,01 ppm près.
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

### ANNEXE 2

#### Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Représentation graphique de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0;5]$ .



### EXERCICE 8

*Liban 2010 (2)*

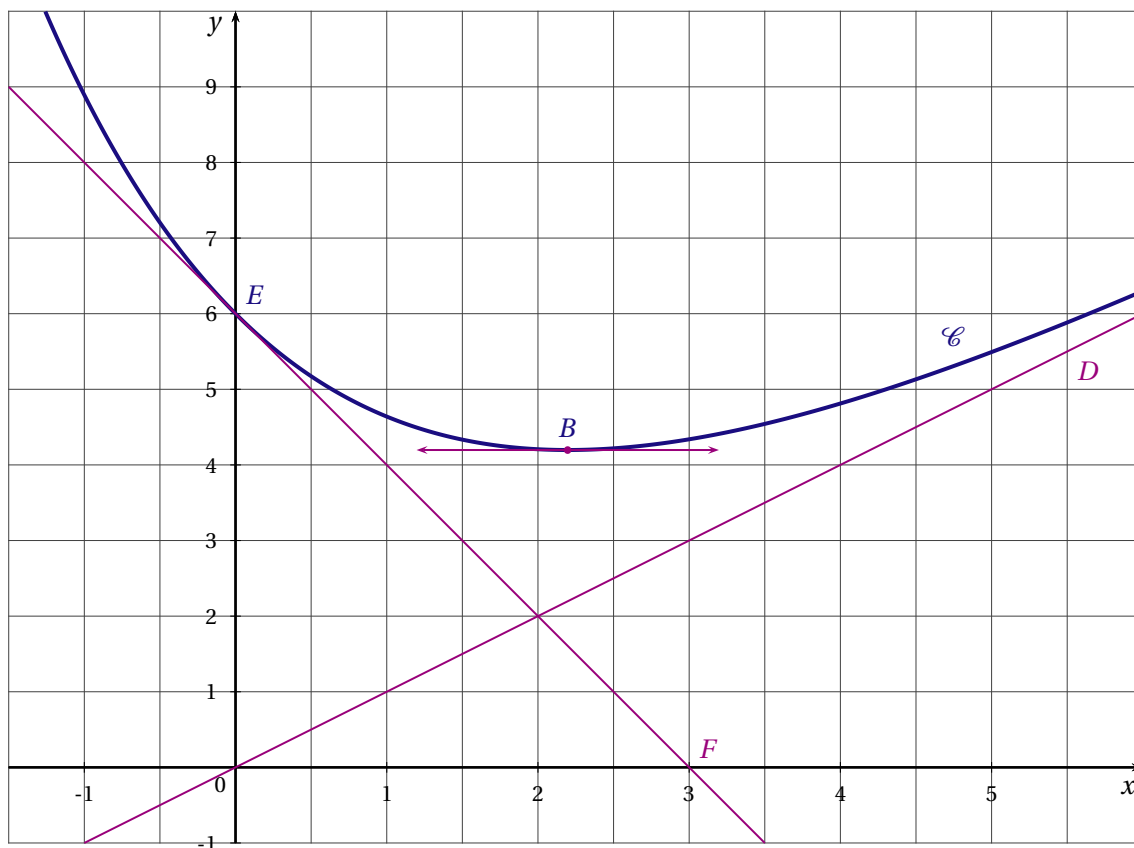
On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x + ke^{ax}$  où  $k$  et  $a$  sont des nombres fixés. Sur la figure donnée en annexe, la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $g$  et la droite  $D$  d'équation  $y = x$  sont tracées dans un repère orthogonal (unités : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées). Le point  $E$  a pour coordonnées  $(0;6)$  et le point  $F$  a pour coordonnées  $(3;0)$ . On précise que la droite  $(EF)$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $E$  et la courbe  $\mathcal{C}$  admet au point  $B$  une tangente horizontale. On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$ .

1. a) Par lecture graphique, déterminer la valeur de  $g(0)$ .
- b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de  $g'(0)$ .
- c) Exprimer  $g'(x)$  en fonction de  $a$  et  $k$ .
- d) En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de  $k$  et  $a$ . On justifiera les calculs.

Dans la suite de l'exercice, on prendra  $g(x) = x + 6e^{-0,5x}$ .

2. Démontrer que la droite  $D$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
3. On admet que la courbe  $\mathcal{C}$  est située au dessus de la droite  $D$ . Soit  $S$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $D$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 4$ .
  - a) Hachurer  $S$  sur le graphique.
  - b) Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $S$ . Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à  $0,1\text{cm}^2$  près.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point  $B$ .

## ANNEXE



## EXERCICE 9

Nouvelle Calédonie 2010 (1)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe 2 qui sera rendu avec la copie.  
On souhaite tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction  $f$  satisfaisant les conditions suivantes :
  - La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 6]$ .



- Le maximum de la fonction  $f$  est 5, il est atteint pour  $x = 0$ .
- Le minimum de la fonction  $f$  est 1.
- La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; 6]$ .  
On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  et on sait que  $f'(0) = -3$ ,  $f(6) = 3$  et  $f'(6) = 2$ .
- Le signe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  est donné par le tableau suivant :

$x$	0	4	6
signe de $f'(x)$	-	0	+

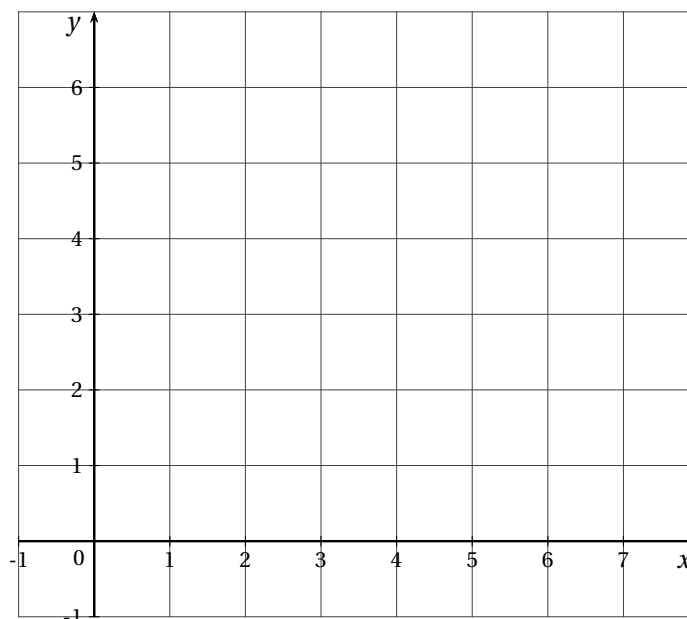
a) Compléter le tableau de variations de la fonction  $f$ , fourni en annexe 1. On fera figurer dans le tableau les images par  $f$  de 0, de 4 et de 6.

**ANNEXE 1**

$x$	0	4	6
signe de $f'(x)$	-	0	+
variations de $f$			

- b) Donner l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 6.
- c) Tracer dans le repère fourni en annexe 2 la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.  
On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

**ANNEXE 2**



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.  
On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 6]$  par  $g(x) = e^{f(x)}$ .

- a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0;6]$ .  
 Compléter le tableau de variation de la fonction  $g$  fourni en annexe 3.  
 On précisera les valeurs de  $g(0)$ ,  $g(4)$  et  $g(6)$ .

ANNEXE 3

$x$	0	4	6
variations de $g$			

- b) Déterminer  $g'(0)$ .

EXERCICE 10

Polynésie Septembre 2010 (3)

On donne le tableau de variation d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]2; +\infty[$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $]2; +\infty[$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

$x$	2	3	10	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-	0
variations de $f$				

On suppose de plus que  $f(5) = 0$  et que  $f'(5) = -2$ .

- À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*
  - Quelles sont les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition?  
Interpréter graphiquement les résultats.
  - Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 3.
  - Quel est le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 4$  sur l'intervalle  $]2; +\infty[$ ?
- Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]2; +\infty[$  par :  $g(x) = e^{f(x)}$ .
  - Calculer  $g(5)$ .
  - Calculer la limite de la fonction  $g$  en 2.
  - Déterminer le sens de variations de  $g$  sur l'intervalle  $[3; 10]$ , en justifiant la réponse.
  - Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 5.

## EXERCICE 11

Pondichéry 2010 (3)

Les parties A et B sont indépendantes

## PARTIE A

On considère la fonction  $A$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par  $A(x) = \frac{4}{1 - e^{-0,039x}}$ .

- Calculer la limite de  $A(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- On admet que la fonction  $A$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  et on note  $A'$  sa fonction dérivée sur cet intervalle.  
Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$  on a  $A'(x) = \frac{-0,156e^{-0,039x}}{(1 - e^{-0,039x})^2}$ .
- Justifier que  $A'(x) < 0$  pour tout  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$ .  
Dresser le tableau de variations de  $A$  sur  $[1; +\infty[$ .

## PARTIE B

Un particulier souhaite réaliser auprès d'une banque un emprunt d'un montant de 100 000 € à un taux annuel fixé.

On admet que, si l'on réalise cet emprunt sur une durée de  $n$  années ( $n \geq 1$ ), le montant d'une annuité (somme à rembourser chaque année, pendant  $n$  ans) est donné en milliers d'euros par

$$A(n) = \frac{4}{1 - e^{-0,039n}}$$

Pour un emprunt fait sur  $n$  années ( $n \geq 1$ ), on note :

$S(n)$  le montant total payé à la banque au bout des  $n$  années (en milliers d'euros) ;

$I(n)$  le total des intérêts payés à la banque au bout des  $n$  années (en milliers d'euros).

Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats arrondis au millième.

- Calculer  $A(1)$ ,  $A(10)$  et  $A(20)$  et interpréter ces résultats.
- Démontrer que  $I(n) = \frac{4n}{1 - e^{-0,039n}} - 100$  pour tout  $n \geq 1$ .
- Recopier et compléter le tableau suivant sur votre feuille.

Durée de l'emprunt $n$	10 ans	15 ans	20 ans
Montant d'une annuité $A(n)$			
Montant $S(n)$ des $n$ annuités payées à la banque			
Intérêts $I(n)$ versés à la banque			

- Pour faciliter l'étude des valeurs de  $A(n)$ ,  $S(n)$  et  $I(n)$ , on utilise les fonctions  $A$ ,  $S$  et  $I$  définies sur  $[1; 20]$  par :

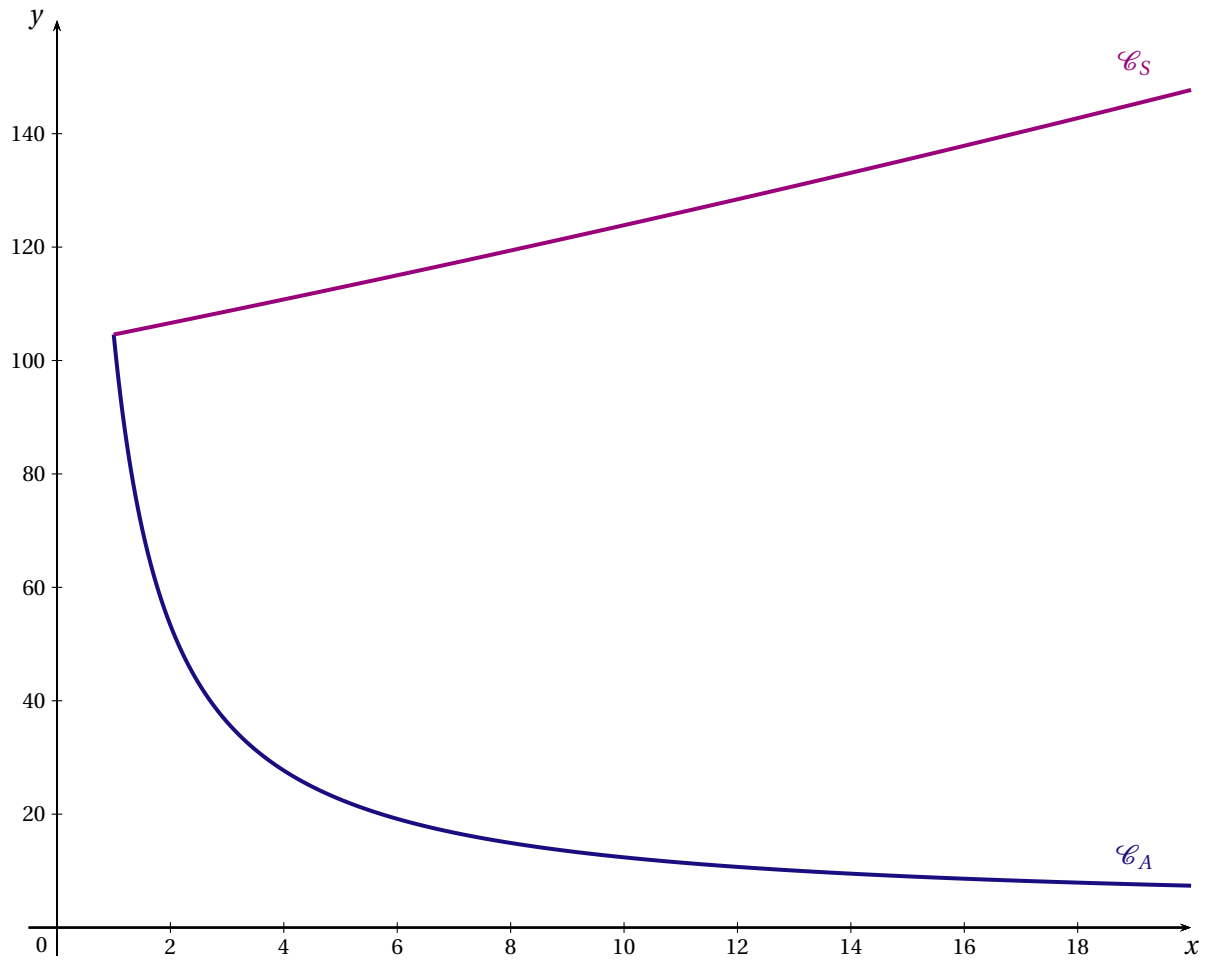
$$A(x) = \frac{4}{1 - e^{-0,039x}} \quad ; \quad S(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} \quad ; \quad I(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} - 100.$$

On a représenté respectivement en ANNEXE 1 ci-après les fonctions  $A$  et  $S$  par les courbes  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_S$  sur l'intervalle  $[1; 20]$ .

- Expliquer comment utiliser le graphique de l'ANNEXE 1 pour retrouver  $I(10)$ .
- Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Expliquer comment déterminer graphiquement sur l'ANNEXE 1 le sens de variation du montant total des intérêts à payer en fonction de la durée du remboursement de l'emprunt.

**ANNEXE 1**  
*À rendre avec la copie*

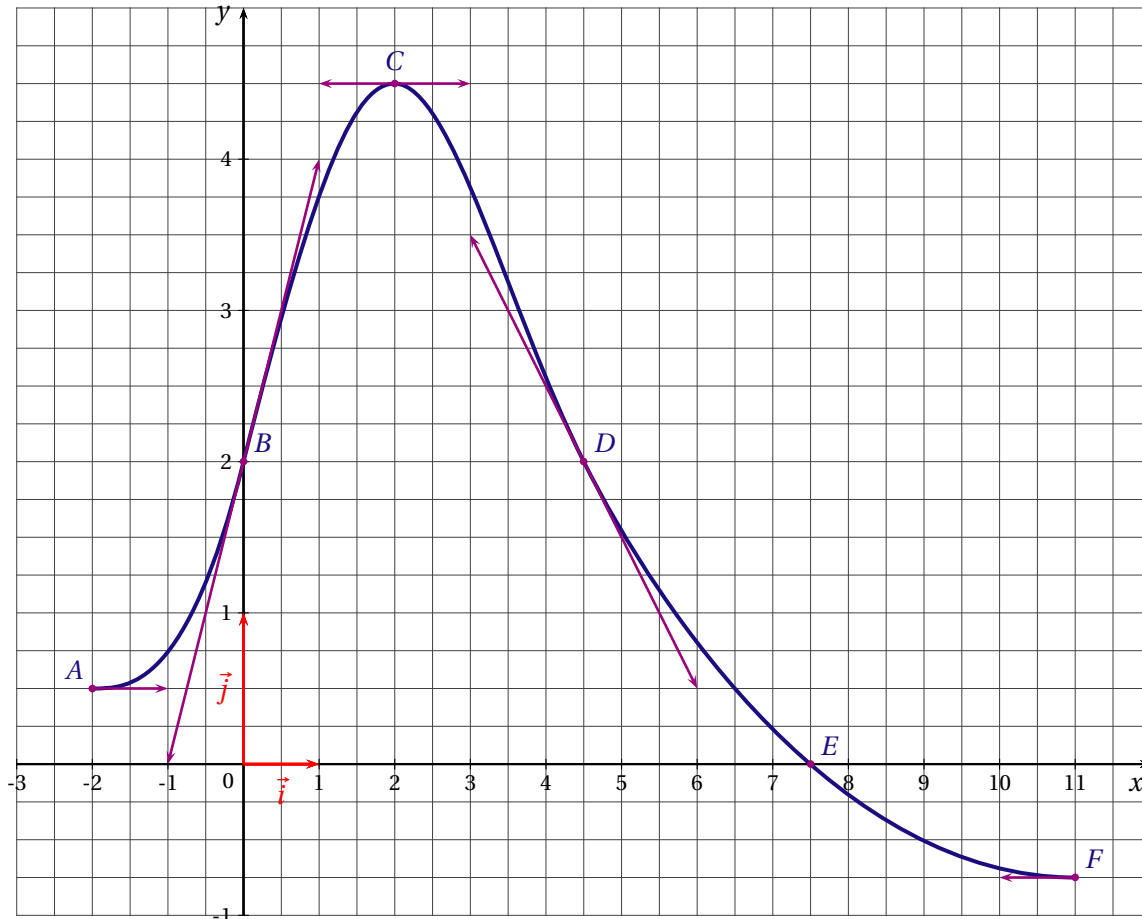


## I.4 Q.C.M

## EXERCICE 1

Amérique du Nord 2010 (1)

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2; 11]$ , et on donne sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , figure ci-dessous.



On sait que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par les points  $A(-2; 0,5)$ ,  $B(0; 2)$ ,  $C(2; 4,5)$ ,  $D(4,5; 2)$ ,  $E(7,5; 0)$  et  $F(11; -0,75)$ . Les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $F$  sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses **A**, **B** ou **C** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0.

1.  $f'(0)$  est égal à :

**A:**  $\frac{1}{2}$

**B:** 2

**C:** 4

2.  $f'(x)$  est strictement positif sur l'intervalle :

**A:**  $]0; 11[$

**B:**  $]0; 7,5[$

**C:**  $] - 2; 2[$

3. Une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $D$  est :

**A:**  $y = -x + 6,5$

**B:**  $y = x - 6,5$

**C:**  $y = -2x + 11$

4. Une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2; 11]$  :
- A** : admet un maximum en  $x = 2$ .  
**B** : est strictement croissante sur l'intervalle  $[-2; 7,5]$ .  
**C** : est strictement décroissante sur l'intervalle  $]2; 11[$ .
5. Sur l'intervalle  $[-2; 11]$ , l'équation  $\exp[f(x)] = 1$  :
- A** : admet une solution.  
**B** : admet deux solutions.  
**C** : n'admet aucune solution.

**EXERCICE 2***Amérique du Sud 2010 (2 obligatoire)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1.  $f$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[-3; 0]$  par  $f(x) = x^2$ . Sa valeur moyenne sur l'intervalle  $[-3; 0]$  est :
- $\mu = 4,5$
  - $\mu = 3$
  - $\mu = \frac{1}{3}$
  - $\mu = -3$
2.  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ ,  $f'$  désigne sa fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$ . Alors :
- $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$
  - $f'(x) = \frac{1}{2x + 1}$
  - $f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$
  - $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$
3. La primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x}$  telle que  $F(1) = 1$  vérifie :
- $F(x) = \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x^2} - \frac{17}{3}$
  - $F(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x$
  - $F(x) = x^2 - x + 3 \ln x + 1$
  - $F(x) = 2 - \frac{3}{x^2} + 1$
4.  $f$  est la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{5}{x}$ , on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère donné du plan. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$  est égale à :
- $5 \ln 2$
  - $\ln 10 - \ln 5$
  - $3,466$
  - $\ln\left(\frac{2}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)$
5. La limite de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - x - \ln x$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est :
- $-\infty$
  - $0$
  - $e$
  - $+\infty$

**EXERCICE 3**

*Antilles Septembre 2010 (3)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point. Une réponse fausse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$  par  $f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ .

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

Le tableau de variations de la fonction  $f$  est donné ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$0$	$\ln 2$	$+\infty$
Variations de $f$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$2\ln 2 + 3$	$+\infty$

1. Dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = e^2$  admet :
  - aucune solution
  - une unique solution
  - deux solutions
2. La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\ln(1,5)$  admet un coefficient directeur :
  - strictement positif
  - strictement négatif
  - nul
3.  $f[-\ln(2)]$  est égal à :
  - $-2\ln(2) + 3$
  - $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
  - $-2\ln(2) + 1$
4. La courbe  $\mathcal{C}$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote d'équation :
  - $y = 2x + 2$
  - $y = 2x + 1$
  - $x = 0$

**EXERCICE 4**

*Antilles-Guyane 2010 (3)*

Le tableau ci-dessous donne pour 6 années le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France.

Années	1997	1999	2001	2003	2005	2007
Rang de l'année $x_i \ 1 \leq i \leq 6$	0	2	4	6	8	10
Nombre (en millions) de spectateurs $y_i \ 1 \leq i \leq 6$	149,3	153,6	187,5	173,5	175,5	177,9

Source : INSEE - d'après le Centre National de la Cinématographie (CNC)

**PARTIE 1**

Pour chacune des questions ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25. L'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

- Le taux d'augmentation du nombre de spectateurs de 1997 à 1999 est donné par le calcul suivant :
  - $\frac{153,6}{149,3}$
  - $\frac{153,6 - 149,3}{153,6}$
  - $\left(\frac{153,6}{149,3} - 1\right)$
- En supposant que le nombre de spectateurs augmente de 1 % tous les ans, à partir de 2007, le nombre de spectateurs en 2010 est donné par le calcul suivant :
  - $(1,01 \times 177,9) \times 3$
  - $1,01^3 \times 177,9$
  - $0,01^3 \times 177,9$
- Entre 1997 et 2007, l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du nombre de spectateurs est, arrondie à 0,01 % :
  - 1,77 %
  - 1,92 %
  - 3,57 %
- Sachant que de 1998 à 1999, le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France a diminué de 10 %, le nombre de spectateurs (en millions) en 1998 arrondi au dixième était :
  - 139,6
  - 170,7
  - 138,2
- On considère un nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$ , pour  $1 \leq i \leq 6$ , construit à partir des données du tableau donné en début d'exercice. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont :
  - (2002 ; 169,55)
  - (5; 169,55)
  - (30; 1017,3)
- Supposons que l'on ait effectué un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés.  
(Dans l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  de la forme  $y = ax + b$ , on choisira les coefficients  $a$  et  $b$  arrondis au dixième).  
D'après cet ajustement :
  - Le nombre de spectateurs sera d'environ 200 millions en :
    - 2015
    - 2013
    - 2010
  - L'estimation (en millions) arrondi au dixième, du nombre de spectateurs en 2015 est :
    - 11439,6
    - 228,4
    - 206

**PARTIE 2**

Justifier la réponse donnée à la question 3 de la partie 1.

**EXERCICE 5**

*Asie 2010 (4 obligatoire)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et, en face de celui-ci, recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

- Dans le plan muni d'un repère, la parabole d'équation  $y = x^2 - 3x - 1$  admet au point d'abscisse 3 une tangente d'équation
  - $y = -3x + 8$
  - $y = 3x$
  - $y = 3x - 10$
- La courbe  $\mathcal{H}$  représentative de la fonction  $h$  définie sur l'ensemble des nombres réels par  $h(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + x + 2}$  admet une asymptote
  - horizontale
  - verticale
  - oblique





**EXERCICE 7***France Métropolitaine Septembre 2010 (2 obligatoire)*

Cet exercice est composé de deux parties :

- la partie I est un « vrai-faux » sans justification,
- la partie II est un questionnaire à choix multiples avec justification.

**PARTIE I**

Pour chacune des affirmations, recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer sans justifier si elle est vraie ou fausse.

*Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.*

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x - 4} = +\infty$

2. Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $] -\infty; 3[$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

La tangente à la courbe  $C$  au point d'abscisse 2 a pour équation  $y = -6x + 9$ .

3. Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(x^2 + 5)$ .

Le nombre dérivé de la fonction  $f$  en 1 est  $\frac{1}{3}$ .

4. Soit  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1$ .

On définit la fonction  $g$  par  $g(x) = \ln[f(x)]$ .

On affirme que la fonction  $g$  est définie sur l'intervalle  $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ .

**PARTIE II**

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse.

*Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 point.*

*Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Si pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $e^{-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$ , alors la limite en  $+\infty$  de  $f(x)$  est :

- $-\infty$
- 0
- $+\infty$

2.  $\frac{\ln(e^2)}{\ln 16}$  est égal à :

- $2 \ln\left(\frac{e}{4}\right)$
- $\frac{1}{2 \ln 2}$
- $2 \ln e - \ln 16$

3.  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$  est égale à :

- $-\frac{1}{12}$
- $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$
- $\frac{1}{12}$

**EXERCICE 8**

*La Réunion 2010 (1)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

Le barème sera établi comme suit :

- pour une réponse exacte aux questions 1, 2, 3 et 4 : 0,5 point,
- pour une réponse exacte aux questions 5 et 6 : 1 point,
- pour une réponse fausse ou l'absence de réponse : 0 point.

Pour toutes les questions, on considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] - 1; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. On a :

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

2. La courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote d'équation :

- $y = 2$
- $y = -1$
- $x = 2$

3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] - 1; +\infty[$ ,  $f(x)$  peut s'écrire :

- $f(x) = \frac{2x}{x+1}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x+1}$

4. Le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $] - 1; +\infty[$  est donné par le tableau :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$		- 0 +	

$x$	-1	$+\infty$
$f(x)$		+

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		- 0 +	

5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1 est :

- $\frac{3}{2}$
- $\frac{1}{4}$
- $-\frac{1}{2}$

6. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ , est égale à :

- $-2 + \ln 2$
- $2 - \ln 2$
- $\frac{3}{2}$

**EXERCICE 9**

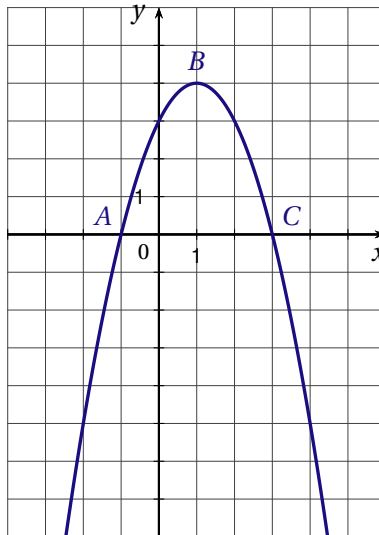
*Polynésie 2010 (1)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

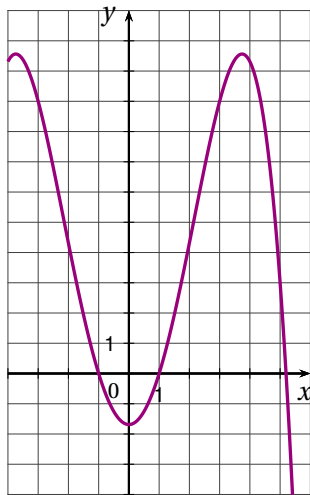
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

1. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-4;6]$  dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.

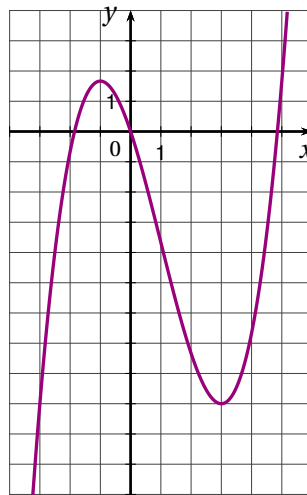
Les points  $A(-1;0)$ ,  $B(1;4)$ , et  $C(3;0)$  appartiennent à la représentation graphique de  $f$ .



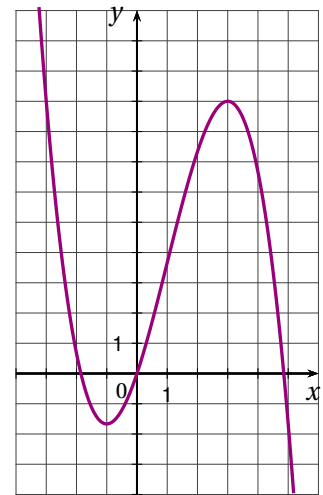
Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction  $f$  ?



Courbe  $\mathcal{C}_1$



Courbe  $\mathcal{C}_2$



Courbe  $\mathcal{C}_3$

2. Une primitive de la fonction  $g$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^x$  est la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

•  $G(x) = \frac{x^2}{2}e^x$

•  $G(x) = (x + 1)e^x$

•  $G(x) = (x - 1)e^x$

3. La fonction  $h$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 0,8^x$  est égale à la fonction  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

•  $k(x) = e^{x \ln(0,8)}$

•  $k(x) = e^{0,8 \ln(x)}$

•  $k(x) = 0,8e^x$

## II Q.C.M DIVERS

### II.1 Q.C.M ANALYSE ET PROBABILITÉS

#### EXERCICE 1

France Métropolitaine Juin 2010 (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une seule réponse par question est acceptée et **aucune justification n'est demandée**.

Une bonne réponse rapporte un point.

Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

**Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.** correspondante.

#### QUESTION 1

Le nombre  $-3$  est solution de l'équation :

- $\ln x = -\ln 3$                       •  $\ln(e^x) = -3$                       •  $e^{\ln x} = -3$                       •  $e^x = -3$

#### QUESTION 2

La limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  par  $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$  est :

- $-\infty$                       •  $+\infty$                       •  $-1$                       •  $-\frac{1}{4}$

#### QUESTION 3

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$ .

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

- $y = x + 2$                       •  $y = -x + 4$                       •  $y = 3x + 1$                       •  $y = x + 3$

#### QUESTION 4

Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

**Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.

Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :

- 1                      • 0                      •  $-1$                       •  $-2$

# III PROBABILITÉS

## III.1 GÉNÉRALITÉS

### EXERCICE 1

*France Métropolitaine Juin 2010 (2 obligatoire)*

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.

Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.

Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.

Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

On note :

- $A$  l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- $B$  l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- $C$  l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- $S$  l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.
3. Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.

*Le résultat sera arrondi à  $10^{-3}$ .*

### EXERCICE 2

*France Métropolitaine Septembre 2010 (1)*

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.

Dans cette population :

- 58 % sont des femmes;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie  $\mathcal{A}$  et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note :

- $F$  l'évènement : « la personne choisie est une femme »;

- $H$  l'évènement : « la personne choisie est un homme »;
- $A$  l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie  $\mathcal{A}$  »;
- $\bar{A}$  l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie  $\mathcal{A}$  ».

Les résultats seront arrondis au millième.

1. a) Donner la probabilité de l'évènement  $F$  et celle de l'évènement  $A$ .  
Donner la probabilité de l'évènement  $F$  sachant que l'évènement  $A$  est réalisé, notée  $p_A(F)$ .  
b) Définir par une phrase l'évènement  $A \cap F$  puis calculer sa probabilité.  
c) Montrer que la probabilité de l'évènement  $A$  sachant que  $F$  est réalisé est égale à  $0,057$  à  $10^{-3}$  près.
2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie  $\mathcal{A}$  est égale à  $0,040$  à  $10^{-3}$  près.
3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie  $\mathcal{A}$  qu'un homme? Justifier.

### EXERCICE 3

Polynésie Septembre 2010 (2 obligatoire)

« Un geste qui sauve : en France, chaque année, 55 000 personnes sont victimes d'un accident cardio-vasculaire. Sept fois sur dix, ces accidents surviennent devant témoin. » (Source : TNS / Fédération Française de Cardiologie, 2009).

En 2009, environ 36 % de la population française a appris à accomplir les gestes qui sauvent.

#### PARTIE 1

Lors d'un accident cardio-vasculaire devant témoins, on admet que la proportion de témoins formés aux gestes qui sauvent suit la proportion nationale.

La probabilité qu'un accident cardio-vasculaire se produise devant un témoin formé aux gestes qui sauvent est de  $0,25$ .

Lorsque l'accident cardio-vasculaire s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent, la probabilité que le malade survive est  $0,1$ .

Sinon, la probabilité que le malade survive est de  $0,007$ .

On appelle  $T$  l'évènement : « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent ».

On appelle  $S$  l'évènement : « Le malade survit à l'arrêt cardiaque ».

On appelle  $\bar{T}$  et  $\bar{S}$  les évènements contraires à  $T$  et à  $S$ .

RAPPEL DE NOTATION : Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements donnés,  $p(A)$  désigne la probabilité que l'évènement  $A$  se réalise et  $p_B(A)$  désigne la probabilité de l'évènement  $A$  sachant que l'évènement  $B$  est réalisé.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré. Les résultats seront arrondis au centième.

1. Déterminer, d'après l'énoncé,  $p(T)$ ,  $p_T(S)$  et  $p_{\bar{T}}(S)$ .
2. En déduire  $p(T \cap S)$ .
3. Vérifier que la valeur arrondie au centième de  $p(S)$  est  $0,03$ .
4. Interpréter ces deux derniers résultats.
5. Justifier que le nombre de victimes d'accidents cardiaques survivant à cet accident peut s'estimer à environ 1 650.

#### PARTIE 2

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En 2015 tous les lieux publics (stades, centres commerciaux, ...) seront équipés en défibrillateurs. Par ailleurs, un sondage montre qu'environ 71 % de la population souhaite se former à accomplir les gestes qui sauvent. Si ce taux de formation est atteint :

- la probabilité que l'accident cardiaque survienne devant un témoin formé aux gestes qui sauvent serait de 0,5;
- la probabilité de survie en cas d'intervention d'un témoin formé aux gestes qui sauvent serait augmentée à 0,25, et 0,046 sinon.

Déterminer combien de vies supplémentaires pourraient être sauvées si ces conditions étaient satisfaites.



### III. 2 LOI BINOIMIALE

#### EXERCICE 1

*Amérique du Sud 2010 (3)*

Dans cet exercice, on appellera motard tout conducteur d'une moto dont la cylindrée est supérieure à  $50\text{cm}^3$ . Ces motards se décomposent en deux catégories :

- la catégorie A définie par le fait que les motards conduisent une moto de cylindrée  $125\text{cm}^3$  ou plus,
- la catégorie B définie par le fait que les motards conduisent une moto d'une cylindrée strictement inférieure à  $125\text{cm}^3$ .

La moto peut être de type *sportive* ou *routière*.

On considère que :

- ceux de la catégorie A représentent 44 % de l'ensemble des motards
- 65 % de ceux de la catégorie B possèdent une moto de type sportive.

On interroge au hasard un motard et on note :

- $A$  : l'évènement « le motard est de la catégorie A »,
- $B$  : l'évènement « le motard est de la catégorie B »,
- $S$  : l'évènement « la moto est de type sportive »,
- $R$  : l'évènement « la moto est de type routière ».

Tous les résultats des différents calculs seront donnés sous forme décimale et arrondis au millième. On pourra utiliser un arbre de probabilité ou un tableau.

1. Montrer que la probabilité que le motard interrogé soit dans la catégorie B et conduise une moto de type routière est égale à 0,196.
2. 36,6 % des motos sont de type routière.  
Quelle est la probabilité que le motard choisi conduise une moto de type sportive et soit dans la catégorie A?
3. Quelle est la probabilité qu'un motard soit dans la catégorie B sachant qu'il conduit une moto de type routière?
4. On choisit au hasard et de façon indépendante trois motards. Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux soit de la catégorie B?

#### EXERCICE 2

*Antilles-Guyane 2010 (2 obligatoire)*

Un bijoutier propose des perles de culture pour fabriquer des bijoux. Il dispose dans son stock de deux types de couleurs : les perles argentées et les perles noires.

Chacune de ces perles a :

- soit une forme dite sphérique;
- soit une forme dite équilibrée;
- soit une forme dite baroque.

On sait que dans son stock, 44 % des perles sont équilibrées, deux cinquièmes sont baroques et les autres sont sphériques.

De plus, 60 % des perles sont argentées dont 15 % sont sphériques et la moitié sont baroques.

1. Recopier le tableau des pourcentages ci-dessous et le compléter à l'aide des données de l'énoncé (on ne demande pas de justification).

	Sphérique	Équilibrée	Baroque	Total
Argentée				
Noire				
Total				100 %

2. Le bijoutier choisit une perle du stock au hasard. On suppose que chaque perle a la même probabilité d'être choisie.

On note :

- $A$  l'événement : « la perle est argentée »;
- $N$  l'événement : « la perle est noire »;
- $S$  l'événement : « la perle est de forme sphérique »;
- $E$  l'événement : « la perle est de forme équilibrée »;
- $B$  l'événement : « la perle est de forme baroque ».

Toutes les probabilités seront données sous forme décimale exacte.

- a) Quelle est la probabilité que le bijoutier choisisse une perle de forme baroque?
  - b) Quelle est la probabilité que le bijoutier choisisse une perle noire de forme équilibrée?
  - c) Déterminer la probabilité de l'événement  $A \cup B$  puis interpréter ce résultat.
  - d) Le bijoutier a choisi une perle de forme baroque. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas argentée?
3. Pour une création de bijou original, le bijoutier choisit dans son stock quatre perles au hasard et de manière indépendante. On admet que le nombre de perles est suffisamment grand pour que le choix d'une perle soit assimilé à un tirage avec remise.
- a) Calculer la probabilité qu'aucune des quatre perles choisies ne soit argentée.
  - b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une perle sphérique parmi les quatre perles choisies (donner une valeur approchée de ce résultat à  $10^{-3}$  près).

### EXERCICE 3

Asie 2010 (2)

Kevin possède un lecteur MP3, dans lequel il a stocké 90 morceaux de jazz et 110 morceaux de musique classique. Un tiers des 90 morceaux de jazz est composé par des auteurs français. Un dixième des 110 morceaux de musique classique est composé par des auteurs français.

1. Afin d'écouter un morceau de musique, Kevin lance une lecture aléatoire sur son lecteur MP3.

On admet que cela revient à choisir un morceau de musique de manière équiprobable. On note :

$J$  l'évènement « le morceau de musique écouté est un morceau de jazz »;

$C$  l'évènement « le morceau de musique écouté est un morceau de musique classique »;

$F$  l'évènement « l'auteur du morceau de musique écouté est français ».

- a) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz?
  - b) Sachant que Kevin a écouté un morceau de jazz, quelle est la probabilité que l'auteur soit français?
  - c) Calculer la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz composé par un auteur français.
  - d) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit composé par un auteur français?
2. Afin d'écouter trois morceaux de musique, Kevin lance trois fois une lecture aléatoire sur son lecteur MP3. Calculer la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de jazz.

**EXERCICE 4***Nouvelle Calédonie 2010 (3)*

Une université fait passer un test à ses étudiants. A l'issue du test chaque étudiant est classé dans l'un des trois profils A, B et C définis ci-dessous.

50 % des étudiants ont le profil A : ils mémorisent mieux une information qu'ils voient (image, diagramme, courbe, film ...).

20 % des étudiants ont le profil B : ils mémorisent mieux une information qu'ils entendent.

30 % des étudiants ont le profil C : ils mémorisent aussi bien l'information dans les deux situations.

À la fin de la session d'examen de janvier on constate que :

70 % des étudiants ayant le profil A ont une note supérieure ou égale à 10 ;

75 % des étudiants ayant le profil B ont une note supérieure ou égale à 10 ;

85 % des étudiants ayant le profil C ont une note supérieure ou égale à 10.

On choisit de manière aléatoire un étudiant de cette université. On note :

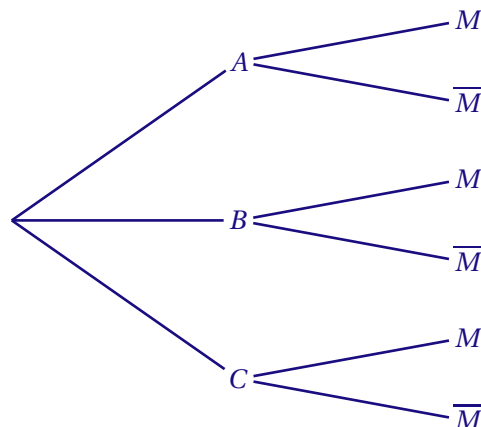
$A$  l'évènement « l'étudiant a le profil A » ;

$B$  l'évènement « l'étudiant a le profil B » ;

$C$  l'évènement « l'étudiant a le profil C » ;

$M$  l'évènement « l'étudiant a une note supérieure ou égale à 10 » et  $\overline{M}$  l'évènement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



*Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondie au millième.*

- Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit de profil C et qu'il ait obtenu une note supérieure ou égale à 10.
- Démontrer  $P(M) = 0,755$ .
- Calculer la probabilité que l'étudiant soit de profil B sachant qu'il a obtenu une note strictement inférieure à 10.
- On choisit quatre étudiants au hasard. On admet que le nombre d'étudiants est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à quatre tirages successifs indépendants avec remise. Calculer la probabilité qu'exactement trois de ces étudiants soient du profil C.

**EXERCICE 5***Polynésie 2010 (2 obligatoire)*

Dans le service informatique d'une société, chaque informaticien a le choix entre deux logiciels de gestion : d'une part le logiciel Bestmath, leader du marché, et d'autre part le logiciel Aurora, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.

Lors de l'enquête de janvier 2009, la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora est 0,32.

Lors de l'enquête suivante en janvier 2010, il a été constaté que 20 % des utilisateurs d'Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs de Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

On interroge un informaticien au hasard et on définit les évènements suivants :

- $A_1$  : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la première année » ;
- $B_1$  : « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la première année » ;
- $A_2$  : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la deuxième année » ;
- $B_2$  : « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la deuxième année ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un informaticien utilise le logiciel Bestmath la première et la deuxième année.
3. Vérifier que la probabilité de l'évènement  $B_2$  est  $p(B_2) = 0,574$ .
4. Calculer la probabilité qu'un informaticien ait utilisé le logiciel Bestmath la première année, sachant qu'il l'utilise la deuxième année (on donnera le résultat arrondi au millième).
5. On interroge au hasard et de façon indépendante trois informaticiens du service.
  - a) Calculer la probabilité qu'au moins un des trois informaticiens ait utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée du résultat à  $10^{-3}$  près).
  - b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois informaticiens aient utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée à  $10^{-3}$  près).

### III. 3 VARIABLE NUMÉRIQUE

#### EXERCICE 1

*Amérique du Nord 2010 (2)*

Un commerçant spécialisé en photographie numérique propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil.

Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion.
- 70 % des clients qui achètent l'appareil photo en promotion achètent la carte mémoire en promotion.
- 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion.

On suppose qu'un client achète au plus un appareil photo en promotion et au plus une carte mémoire en promotion.

Un client entre dans le magasin.

On note A l'évènement : « le client achète l'appareil photo en promotion ».

On note C l'évènement : « le client achète la carte mémoire en promotion ».

1. a) Donner les probabilités  $p(\bar{A})$  et  $p(\bar{A} \cap \bar{C})$ .  
b) Un client n'achète pas l'appareil photo en promotion. Calculer la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion.
2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Montrer que la probabilité qu'un client achète la carte mémoire en promotion est 0,34.
4. Un client achète la carte mémoire en promotion. Déterminer la probabilité que ce client achète aussi l'appareil photo en promotion.
5. Le commerçant fait un bénéfice de 30 € sur chaque appareil photo en promotion et un bénéfice de 4 € sur chaque carte mémoire en promotion.
  - a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du bénéfice par client. Aucune justification n'est demandée.

Bénéfice par client en euros	0			
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6			

- b) Pour 1000 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion ?
6. Trois clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion.

#### EXERCICE 2

*Antilles Septembre 2010 (2 obligatoire)*

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.

Une enquête est faite auprès des 1200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

#### PARTIE A

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).

On note :

—  $F$  l'évènement : « l'employé est une femme » ;

—  $T$  l'évènement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités  $p(F)$ ,  $p(T)$  puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
2. Expliquer ce que représente l'évènement  $F \cap T$ , puis calculer sa probabilité.  
Les évènements  $T$  et  $F$  sont-ils indépendants? Justifier la réponse.
3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme (on donnera le résultat arrondi au millième).

#### PARTIE B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

— la formule n° 1 : voyage en 1<sup>e</sup> classe plus hôtel pour un coût de 150 € ;

— la formule n° 2 : voyage en 2<sup>e</sup> classe plus hôtel pour un coût de 100 €.

40 % des employés inscrits choisissent la formule n° 1.

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 €.

Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note :

—  $U$  l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 1 » ;

—  $D$  l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n° 2 » ;

—  $E$  l'évènement : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n° 2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.
3. Soit  $C$  le coût total du voyage (excursion comprise).
  - a) Déterminer les différentes valeurs possibles que peut prendre  $C$ .
  - b) Déterminer la loi de probabilité de  $C$ .
  - c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

#### EXERCICE 3

*Centres Étrangers 2010 (3)*

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les évènements suivants :

$G$  : « le téléphone possède l'option GPS ».

$W$  : « le téléphone possède l'option Wifi ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

On suppose que la probabilité de  $W$  est :  $p(W) = \frac{7}{10}$ .

3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».
4. Démontrer que  $p_{\overline{G}}(W) = \frac{23}{30}$ . Compléter l'arbre du 2.
5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS?

Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

6. Déterminer la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options.
7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.

#### EXERCICE 4

*La Réunion 2010 (2 obligatoire)*

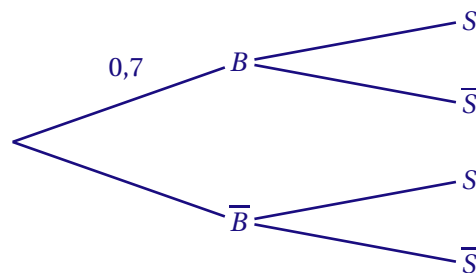
Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.

On note :

$B$  l'évènement : « il y a un banc de poissons sur zone » et  $\overline{B}$  l'évènement contraire de  $B$ ,

$S$  l'évènement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et  $\overline{S}$  l'évènement contraire de  $S$ .

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant. Le détail des calculs n'est pas demandé.



2. Déterminer la probabilité  $p(B \cap S)$  qu'il y ait un banc de poissons sur la zone et que le sonar le détecte.
3. Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.
4. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve toujours dans l'une des trois situations suivantes :

*Situation 1* : un banc de poissons est présent sur la zone et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas le pêcheur gagne 2000 euros.

*Situation 2* : il n'y a pas de banc de poissons sur zone mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas le pêcheur perd 500 euros.

*Situation 3* : le sonar ne détecte aucun banc de poisson (qu'il y en ait ou pas). Le filet n'est pas lancé et le bateau rentre au port à vide. Dans ce cas le pêcheur perd 300 euros.

- a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du « gain » (positif ou négatif) réalisé.

Gain : $x_i$	2000	-500	-300
Probabilité : $p_i$			

- b) Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?
5. Le pêcheur prévoit d'effectuer trois sorties successives sur la zone de pêche. Déterminer la probabilité que, pour les trois sorties, le sonar reste muet, c'est-à-dire n'indique pas la présence d'un banc de poissons. On donnera la valeur approchée arrondie au millième de ce résultat.

### EXERCICE 5

Pondichéry 2010 (1)

Lors des journées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée.

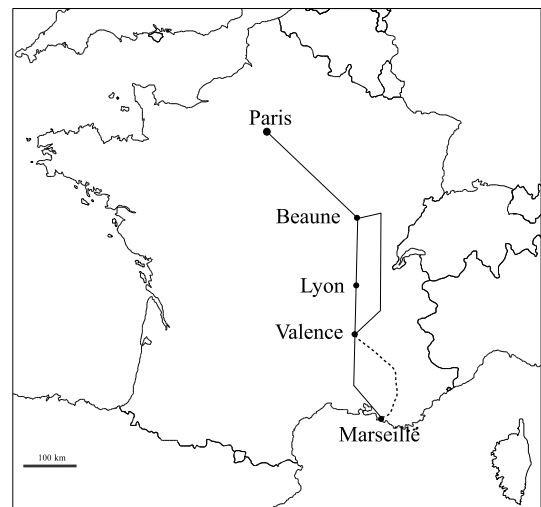
Il est donc conseillé de prendre un itinéraire de délestage entre Beaune et Valence (qui ne passe pas par Lyon) afin d'éviter les éventuels « bouchons » autoroutiers.

Entre Valence et Marseille il est également conseillé de prendre la route départementale représentée par des pointillés sur la carte.

Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet entre Paris et Marseille lors de ces journées « rouges ».

Il s'avère que :

- 40 % des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence ;
- parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30 % prennent la route départementale de Valence à Marseille ;
- parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60 % prennent la route départementale de Valence à Marseille.



On note :

$B$  l'évènement « l'automobiliste prend l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence » et  $\bar{B}$  l'évènement contraire ;

$V$  l'évènement « l'automobiliste prend la route départementale entre Valence et Marseille » et  $\bar{V}$  l'évènement contraire.

1. a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
  - b) Montrer que la probabilité de l'évènement  $\bar{B} \cap \bar{V}$  est  $p(\bar{B} \cap \bar{V}) = 0,24$  et interpréter ce résultat.
  - c) Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille.
2. On donne les temps de parcours suivants :
  - Paris – Beaune (par autoroute) : 4 heures ;
  - Beaune – Valence (par autoroute, en passant par Lyon) : 5 heures ;
  - Beaune – Valence (par itinéraire de délestage, en ne passant pas par Lyon) : 4 heures ;
  - Valence – Marseille (par autoroute) : 5 heures ;
  - Valence – Marseille (par la route départementale) : 3 heures.



a) Calculer les temps de parcours entre Paris et Marseille, selon l'itinéraire choisi.

Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la durée du trajet pour se rendre de Paris à Marseille selon l'itinéraire choisi.

Temps en heures	11			14
Probabilité				0,24

b) Calculer l'espérance de cette loi en heures et en donner une interprétation (la conversion en heure minute seconde n'est pas attendue).

## III. 4 Q.C.M

## EXERCICE 1

Liban 2010 (1)

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à 0.

1. A et B sont deux évènements indépendants et on sait que  $p(A) = 0,5$  et  $p(B) = 0,2$ .

La probabilité de l'évènement  $A \cup B$  est égale à :

Réponse A : 0,1  
Réponse C : 0,6

Réponse B : 0,7  
Réponse D : on ne peut pas savoir

2. Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.

Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

Réponse A : 0,3  
Réponse C : 0,6

Réponse B : 0,5  
Réponse D : 0,75

Dans les questions 3. et 4., on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

3. La probabilité, arrondie à  $10^{-3}$  près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :

Réponse A : 0,250  
Réponse C : 0,578

Réponse B : 0,422  
Réponse D : 0,984

4. La probabilité, arrondie à  $10^{-3}$  près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :

Réponse A : 0,047  
Réponse C : 0,141

Réponse B : 0,063  
Réponse D : 0,500

# IV STATISTIQUES

## IV.1 AJUSTEMENT AFFINE D'UN NUAGE DE POINTS

### EXERCICE 1

*Centres Étrangers 2010 (2 obligatoire)*

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la dette en milliards d'euros de l'État français entre 1990 et 2004 :

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
Dette $y_i$ en milliards d'euros	271,7	321,4	443	540,1	613,1	683,5	773,4	872,6

Source INSEE.

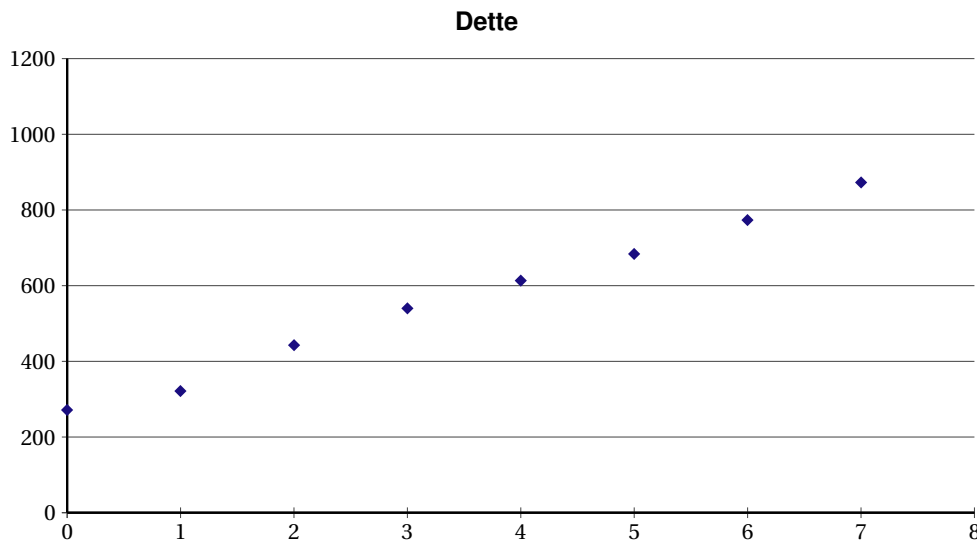
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au dixième.

#### PARTIE A : Étude statistique

- Calculer la dette moyenne de l'État entre 1990 et 2004.
- En prenant l'année 1990 comme référence (indice 100), calculer les indices correspondant à la dette de l'État de 1992 à 2004. Donner la réponse sous forme d'un tableau.
- Déterminer le taux global d'évolution de la dette de l'État entre 1990 et 2004.
- Déterminer le taux moyen d'évolution de la dette de l'État sur une période de deux ans.

#### PARTIE A : Interpolation et extrapolation de données

On donne ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$ .



La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

- En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.
- Selon cet ajustement, à partir de quelle année peut-on estimer que l'État aurait dépassé les 1000 milliards de dette ?
- Selon cet ajustement, déterminer l'année à partir de laquelle la dette de l'État sera le double de la dette de l'an 2000.

**EXERCICE 2***Liban 2010 (4 obligatoire)*

1. L'évolution du chiffre d'affaires du groupe de distribution Enville pour la période 2004-2008 est donnée dans le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1 :

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Progression du chiffre d'affaires par rapport à l'année précédente	4,7 %	10,6 %	4,1 %	5,8 %	7,5 %

Par exemple, le chiffre d'affaires du groupe a augmenté de 10,6 % entre le 31 décembre 2004 et le 31 décembre 2005.

- Montrer qu'une valeur approchée à 0,1 près du pourcentage annuel moyen d'augmentation, est 6,5.
  - En 2008, ce groupe a réalisé un chiffre d'affaires de 59,5 milliards d'euros. La direction prévoit une croissance annuelle de 6,5 % pour les années suivantes. Donner une estimation à 0,1 milliard d'euros près du chiffre d'affaires du groupe pour l'année 2010.
2. L'évolution, sur 8 ans, du chiffre d'affaires du groupe Aupré, concurrent du groupe Enville, est donnée par le tableau 2 ci-dessous :

Tableau 2 :

Année	2001	2003	2005	2007	2008
Rang de l'année $x_i$	1	3	5	7	8
Chiffre d'affaires exprimé en milliards d'euros $y_i$	64,8	68,7	72,7	77,1	82,1

Pour cette question tous les résultats seront arrondis au dixième près.

- Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série  $(x_i ; y_i)$  en prenant comme origine le point de coordonnées (0; 60) (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
  - En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$ . Tracer cette droite sur le graphique.
  - À l'aide de l'ajustement précédent, déterminer graphiquement une estimation du chiffre d'affaires du groupe Aupré pour l'année 2010. On laissera apparents les traits de construction.
3. Dans cette question, on suppose qu'à partir de 2008 le chiffre d'affaires du groupe Enville progresse chaque année de 6,5 % et celui du groupe Aupré de 3 %.
- Résoudre l'inéquation  $59,5 \times 1,065^n > 82,1 \times 1,03^n$ .
  - Déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré.

**EXERCICE 3***Nouvelle Calédonie 2010 (2 obligatoire)*

Le tableau ci-dessous donne la répartition des contributions au financement des soins et des biens médicaux sur la période 2004-2008. Les valeurs sont données en pourcentage.

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4
Sécurité sociale et autres financements	91,7	91,6	91,1	91	90,6
Ménages $y_i$	8,3	8,4	8,9	9,0	9,4
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Source : DREES, Comptes de la santé. ÉTUDES et RÉSULTATS n° 701 - septembre 2009

Par exemple en 2004, la contribution de la sécurité sociale et des autres organismes financeurs s'est élevée à 91,7 % du financement des soins et des biens médicaux et les ménages ont financé 8,3 % de ces soins et biens médicaux.

**PARTIE A : Étude en pourcentages**

$y_i$  désigne la part en pourcentage financée par les ménages lors de l'année de rang  $x_i$ .

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i; y_i)$  pour  $i$  entier variant de 0 à 4.  
On placera l'origine du repère à 0 en abscisse et 8 en ordonnée. On prendra pour unités : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 5 cm pour 1 % en ordonnées.
2. La forme du nuage de points permet de considérer qu'un ajustement affine est justifié.
  - a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite  $D$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés.
  - b) Représenter la droite  $D$  dans le repère précédent.
3. On suppose que l'évolution constatée sur la période 2004-2008 se poursuit en 2009 et en 2010. Justifier par un calcul qu'avec cet ajustement affine, on peut prévoir une part des ménages dans le financement des soins et des biens médicaux de 9,92 % en 2010.

**PARTIE B : Étude en valeurs**

1. La dépense de soins et de biens médicaux était de 140 milliards d'euros en 2004.  
Calculer la somme versée par les ménages pour financer les soins et les biens médicaux en 2004.
2. La dépense de soins et de biens médicaux était de 170,5 milliards d'euros en 2008. On fait l'hypothèse d'une croissance de la dépense de soins et de biens médicaux de 3 % en 2009 et à nouveau de 3 % en 2010.
  - a) Déterminer la dépense de soins et de biens médicaux en 2010. (On arrondira le résultat au milliard d'euros.)
  - b) Quelle somme versée par les ménages pour le financement des soins et des biens médicaux peut-on prévoir pour l'année 2010? (On arrondira le résultat au milliard d'euros. )

## IV. 2 AJUSTEMENT EXPONENTIEL D'UN NUAGE DE POINTS

### EXERCICE 1

*Amérique du Nord 2010 (4 obligatoire)*

Craignant une propagation de grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines. Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7.

On a noté  $x_i$  les rangs successifs des semaines et  $y_i$  le nombre de consultations correspondant :

Rang de la semaine : $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : $y_i$	540	720	980	1320	1800	2420	3300

- Tracer le nuage de points sur une feuille de papier millimétré, on prendra 2 cm pour une unité en  $x$  et 1 cm pour 200 en  $y$ .

Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi?

- Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les  $z_i = \ln(y_i)$ .

Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les  $z_i$  à 0,01 près. Il n'est pas demandé de tracer le nuage de points correspondant.

Rang de la semaine : $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$							

- Trouver à la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant  $z$  et  $x$  (les coefficients obtenus par la calculatrice seront donnés à 0,1 près) puis déduire  $y$  en fonction de  $x$  (on donnera le résultat sous la forme  $y = e^{ax+b}$ ,  $a$  et  $b$  étant deux réels).
- En utilisant ce modèle, trouver par le calcul :
  - Une estimation du nombre de consultations à la 10<sup>ème</sup> semaine (arrondir à l'unité).
  - La semaine à partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.
- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En observant les valeurs données par le modèle exponentiel grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, expliquer si ce modèle reste valable sur le long terme.

### EXERCICE 2

*Amérique du Sud 2010 (1)*

On se propose d'étudier l'évolution des productions d'électricité d'origines hydraulique et éolienne depuis 1999.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

#### PARTIE A : Production d'électricité d'origine hydraulique

Le tableau suivant donne la production d'électricité d'origine hydraulique en France pour plusieurs années entre 2000 et 2005.

Année	2000	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : $x_i$	0	2	3	4	5
Production en GWh : $y_i$	71593	65826	64472	65393	57271

- Représenter, dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série statistique  $(x_i; y_i)$  définie ci-dessus.

On utilisera une feuille de papier millimétré et on choisira comme unités graphiques 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 10000 GWh sur l'axe des ordonnées. On débutera la graduation sur l'axe des ordonnées à 50000.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

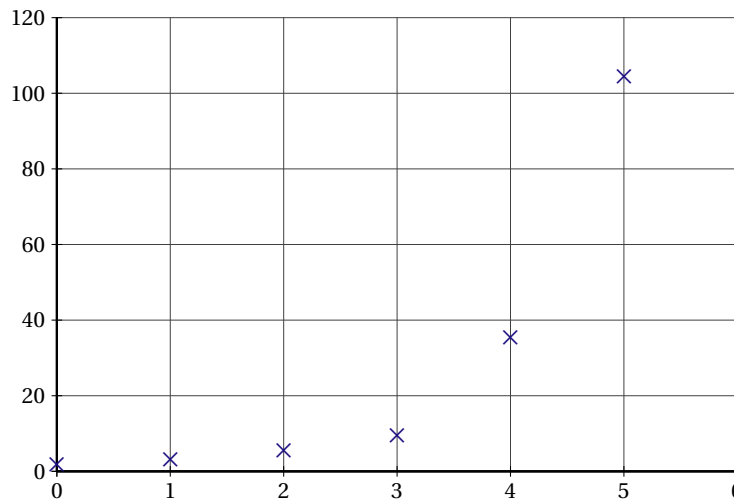
- a) Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  de ce nuage. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation  $y = mx + p$  de la droite  $d$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés, les coefficients  $m$  et  $p$  seront arrondis au dixième.
- b) Placer le point  $G$  et tracer la droite  $d$  sur le graphique précédent.

**PARTIE B : Production d'électricité d'origine éolienne**

Le tableau suivant donne la capacité de production d'électricité d'origine éolienne installée en France de 2003 à 2008.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5
Puissance installée en MWh : $y_i$	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5

1. Ces données sont représentées par le nuage de points ci-après :



On considère qu'un ajustement affine n'est pas pertinent.

L'allure du nuage suggère de rechercher un ajustement exponentiel de  $y$  en  $x$ . Pour cela on pose pour tout entier naturel  $i$  compris entre 0 et 5 :  $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$

Dans les questions a et b suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice. Aucune justification n'est demandée. Les résultats seront arrondis au centième.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5
Puissance installée : $y_i$	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5
$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$						

- b) Déterminer une équation de la droite  $d'$  d'ajustement de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés.
- c) Sachant que  $z = \ln\left(\frac{y}{100}\right)$ , déterminer l'expression de  $y$  sous la forme  $ke^{ax}$  où  $k$  et  $a$  sont des nombres réels à calculer.

2. On suppose que l'évolution de la puissance installée se poursuit dans un avenir proche selon le modèle précédent.

Estimer, au centième de MWh près, la puissance installée prévue pour l'année 2010.

**EXERCICE 3***France Métropolitaine Juin 2010 (3)*

Pour  $i$  nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), $y_i$	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01 % et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

**PARTIE A : Observation des données**

- Pour  $i$  entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
  - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
  - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.
- Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009,
- Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4 % environ.

En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points  $M_4, M_5, M_6, M_7$  et  $M_8$  du nuage précédent.

**PARTIE B : Modélisation de la série statistique  $(x_i ; y_i)_{4 \leq i \leq 8}$  par un ajustement exponentiel**

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à  $8,03 \times 1,024^n$  la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005 +  $n$ ,  $n$  désignant un entier naturel.

On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

- Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
- À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros?

**EXERCICE 4***France Métropolitaine Septembre 2010 (4)*

L'évolution de la population de bouquetins des Alpes, dans le Parc National de la Vanoise depuis sa création, est donnée par le tableau suivant :

On note  $X_i$  l'année, l'indice  $i$  étant un nombre entier variant de 1 à 8.

On note  $x_i$  le rang de l'année par rapport à 1960 :  $x_i = X_i - 1960$ .

On désigne par  $y_i$  le nombre de bouquetins l'année  $X_i$ .

Année $X_i$	1963	1976	1986	1993	1997	1998	2003	2005
Rang de l'année $x_i$	3	16	26	33	37	38	43	45
Nombre de bouquetins $y_i$	65	500	700	1 250	1 453	1 800	2 066	2 568

(Source : <http://www.bouquetin-des-alpes.org/populations/vanoiselvanoise.htm>)

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :



- 5 cm pour 10 années sur l'axe des abscisses,
- 1 cm pour 200 bouquetins sur l'axe des ordonnées.

On note  $M_i$  le point de coordonnées  $(x_i; y_i)$ .

Ainsi  $M_1$  a pour coordonnées (3;65) et  $M_3$  a pour coordonnées (26 ; 700).

1. En disposant la feuille de papier millimétrée dans le sens de la longueur pour les abscisses, représenter le nuage des huit points  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$  et  $M_8$ .
2. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage formé par les six points  $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$  et  $M_8$ .

On admet qu'un ajustement affine de ce sous-nuage est justifié et que la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés pour ce sous-nuage a pour équation  $y = 92,6x - 1787$ .

- a) Tracer cette droite  $D$  sur le graphique précédent.
  - b) Estimer, avec cet ajustement affine, le nombre de bouquetins que l'on peut prévoir dans le Parc National de la Vanoise en 2010.
3. Dans cette question, on s'intéresse au nuage constitué des huit points  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$  et  $M_8$ .

L'allure de ce nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel de la série.

- a) On pose  $z_i = \ln y_i$ .  
Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.
- b) En déduire une relation entre  $y$  et  $x$  de la forme  $y = Ae^{Bx}$ ,  $A$  étant arrondi à l'unité et  $B$  au centième.
- c) En utilisant cette modélisation, calculer le nombre de bouquetins que l'on peut prévoir en 2010 dans le Parc.
- d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
En utilisant cette modélisation, à partir de quelle année la population de bouquetins dépassera-t-elle 5000 unités?

## EXERCICE 5

*La Réunion 2010 (3)*

L'Organisation des Nations Unies (ONU) a établi en 2008 des statistiques et des prévisions sur la population mondiale.

Le tableau suivant donne la population recensée par l'ONU. (*La population en 2010 est considérée par l'ONU comme très proche de la réalité compte tenu de la date à laquelle l'étude a été effectuée.*)

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année : $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Population (en millions de personnes) : $y_i$	2529	3023	3686	4438	5290	6115	6908

1. a) Calculer l'augmentation de population entre les années 1950 et 1960, puis entre les années 1970 et 1980, puis entre les années 1990 et 2000.  
Un ajustement affine est-il pertinent?
  - b) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre les années 1990 et 2000. On donnera la valeur arrondie à 0,1 % près.
2. On envisage un ajustement exponentiel.

- a) Pour chaque année  $x_i$ , calculer  $\ln y_i$  et compléter le tableau suivant avec les valeurs approchées arrondies à 0,01 près.

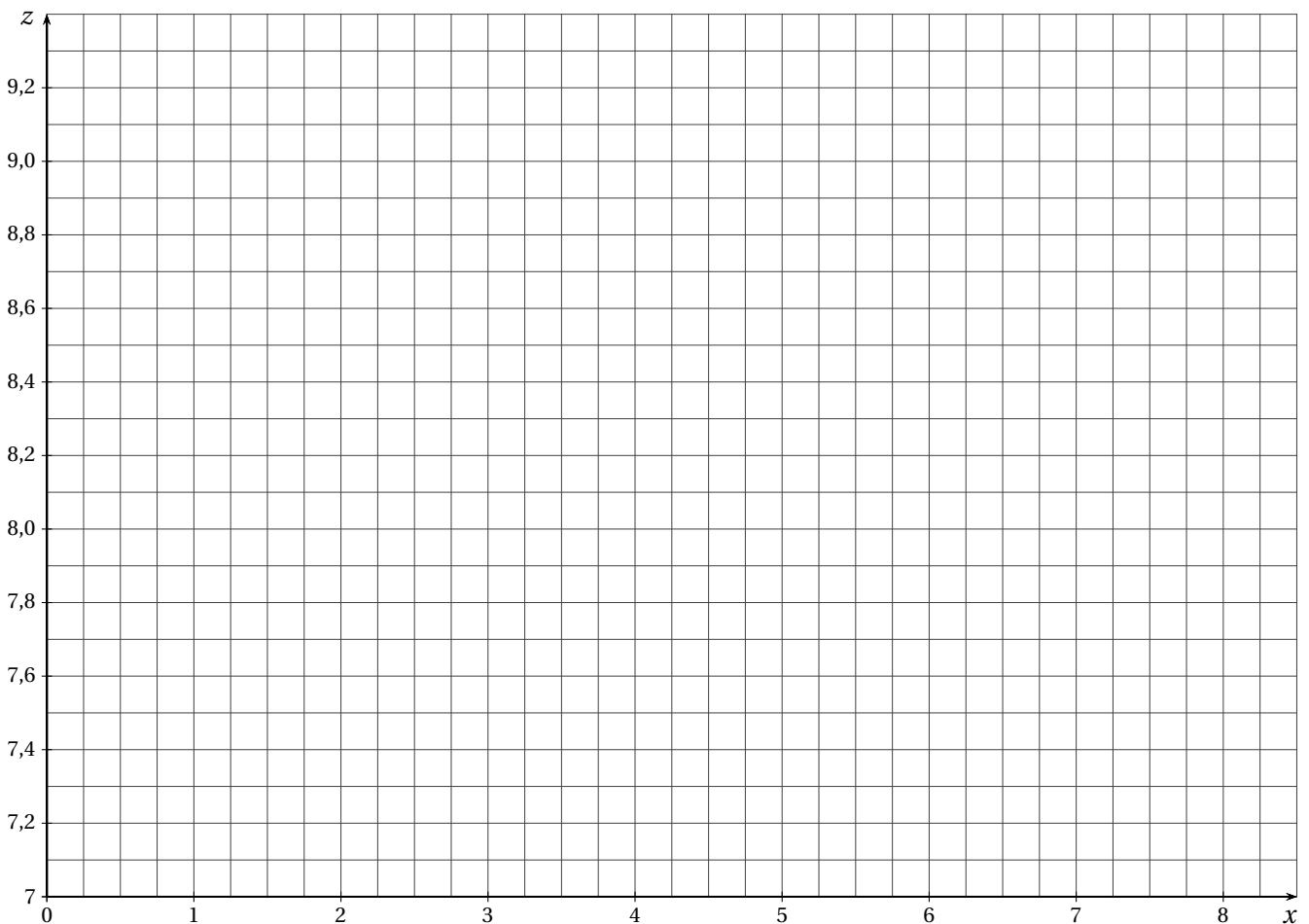
Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

- b) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i; z_i)$  sur la feuille donnée en annexe 1.
3. a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés. Aucune justification n'est demandée, les calculs seront effectués avec la calculatrice et les coefficients arrondis au millièème.
- b) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique de la question 2.
4. Déduire de l'ajustement précédent l'expression de la population  $y$  donnée en fonction du rang  $x$  de l'année, sous la forme :  $y = Ae^{Bx}$  où  $A$  et  $B$  sont des nombres réels à déterminer.  
On arrondira  $A$  à l'unité et  $B$  au millièème.
5. On suppose que  $y = 2180e^{0,171x}$ . Quelle estimation peut-on alors donner pour la population mondiale en 2030?  
*On donnera les valeurs approchées arrondies au million près.*

**ANNEXE 1**

Exercice 3 (commun à tous les candidats)

Représentation du nuage de points  $M_i(x_i; z_i)$ .



**EXERCICE 6***Polynésie 2010 (3)*

Dans le cadre de son action en faveur du développement durable, le conseil Régional d'une région A de France métropolitaine rassemble et analyse des données sur la circulation des déchets valorisables par le recyclage. Depuis 2000, le ministère de l'Environnement fournit des données statistiques sur les quantités de déchets exportés de la région A en vue de leur valorisation.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année $x_i$ $1 \leq i \leq 7$	1	2	3	4	5	6	7
Déchets exportés $y_i$ (en tonnes) $1 \leq i \leq 7$	797	816	1140	1921	2199	3165	4195

*Source : Ministère de l'Environnement (MEEDDAT)*

- Sur la feuille de papier millimétré jointe, représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i; y_i)$  ( $1 \leq i \leq 7$ ), le plan étant rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 200 tonnes sur l'axe des ordonnées.
- On considère qu'un ajustement exponentiel est adapté à l'analyse. Pour  $1 \leq i \leq 7$  on pose alors  $z_i = \ln y_i$ .
  - Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter avec les valeurs de  $z_i$  arrondies au centième :

Rang $x_i$ de l'année $1 \leq i \leq 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$ $1 \leq i \leq 7$							

- À l'aide de la calculatrice, et en utilisant les données du tableau ci-dessus, donner une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés, sous la forme  $z = ax + b$  (les coefficients seront arrondis au millième).
- En déduire une approximation de la quantité de déchets exportés  $y_i$ , exprimée en tonnes, en fonction du rang de l'année  $x$  sous la forme

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

où le coefficient  $\alpha$  est arrondi à l'unité et le coefficient  $\beta$  est arrondi au centième.

- Selon cet ajustement, quelle quantité de déchets, arrondie à une centaine de tonnes, peut être exportée de la région A en vue d'une valorisation à l'horizon 2011?

**EXERCICE 7***Polynésie Septembre 2010 (1)*

Un nom de domaine, sur Internet, est constitué de deux éléments :

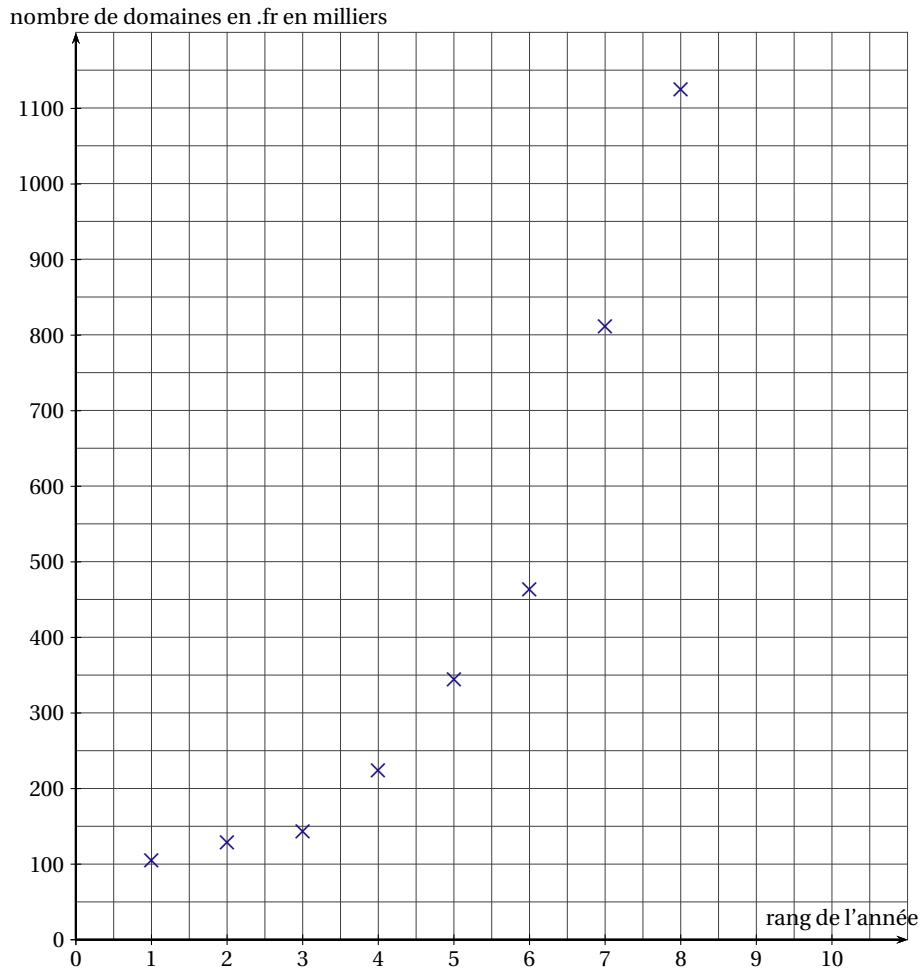
- un nom (celui d'une société, d'une marque, d'une association, d'un particulier. ...);
- une extension (appelée aussi suffixe) : .fr, .de, .ca, .jp, .net, .com, .org, etc.

Le tableau ci-dessous donne, en milliers, le nombre de domaines en « .fr » gérés par l'AFNIC (*Association Française pour le Nommage Internet en Coopération*), organisme qui centralise les noms de domaine Internet, pour les mois de juin des années 2001 à 2008 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang $x_i$ de l'année $1 \leq i \leq 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre $y_i$ des domaines en « .fr », en milliers, $1 \leq i \leq 8$	105,045	128,927	143,741	224,452	344,465	463,729	811,674	1125,161

*(Source : AFNIC, 2009)*

Le nuage de points associé à cette série statistique est donné ci-dessous.



1. Calculer, en pourcentage, l'augmentation du nombre de domaines en « .fr » entre juin 2001 et juin 2002, arrondi à 1 %.
2. a) Expliquer pourquoi un ajustement affine de  $y$  en  $x$  ne semble pas justifié.

On cherche alors un ajustement exponentiel.

- b) Pour tout  $1 \leq i \leq 8$ , on pose  $z_i = \ln y_i$ .

Recopier sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs de  $z_i$  arrondies au centième :

Rang de l'année $x_i$ $1 \leq i \leq 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$ $1 \leq i \leq 8$								

- c) À l'aide de la calculatrice et en utilisant les données du tableau précédent, donner une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés sous la forme  $z = ax + b$  (les coefficients seront arrondis au centième).
- d) En déduire que  $y = 60,34e^{0,35x}$  où les coefficients sont arrondis au centième, est un ajustement exponentiel possible.
3. a) En utilisant le modèle trouvé à la question 2. d., quel est le nombre estimé de domaines en « .fr » en juin 2009? (le résultat sera arrondi au millier).
- b) Si l'erreur commise en utilisant le modèle proposé est inférieure à 1 %, on considère que le modèle est pertinent.  
En réalité, le relevé de juin 2009 de l'AFNIC indiquait 1 412 652 domaines en « .fr ». Le modèle proposé est-il pertinent?

4. a) Résoudre dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  l'inéquation  $60,34e^{0,35x} \geq 10000$  (le résultat sera arrondi au dixième).
- b) En déduire, en utilisant le modèle trouvé à la question 2. d., à partir du mois de juin de quelle année le nombre de « domaines en .fr » dépassera 10 millions.

### IV. 3 AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS

#### EXERCICE 1

*Antilles Septembre 2010 (1)*

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires du commerce équitable en France, exprimé en millions d'euros.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année $x_i$ $1 \leq i \leq 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires du commerce équitable en millions d'euros : $y_i$ $1 \leq i \leq 8$	12	21	37	70	120	166	210	256

(Source : M. H. leader du commerce équitable mondial)

1. a) En 2007, le commerce de détail en France a généré un chiffre d'affaires de 447 milliards d'euros. (Source : INSEE). En 2007, quelle est la part du chiffre d'affaires du commerce équitable par rapport à celui du commerce de détail? (on donnera le résultat en pourcentage arrondi à 0,001 %).
- b) Calculer le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires du commerce équitable en France entre 2005 et 2008 (on donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 %).

*Dans la suite de l'exercice, on souhaite estimer en quelle année le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007.*

#### 2. Ajustement affine

- a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i; y_i)$  ( $1 \leq i \leq 8$ ) dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 20 millions d'euros en ordonnée; l'origine du repère sera prise dans le coin gauche de la feuille de papier millimétré).
- b) À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite  $D$  d'ajustement de  $y$  en  $x$ . Les coefficients seront arrondis au dixième. Tracer la droite  $D$  dans le repère précédent.
- c) En utilisant cet ajustement affine, à partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007?

#### 3. Ajustement parabolique

*Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

L'allure du nuage suggère de choisir un ajustement parabolique.

On propose d'ajuster le nuage par la parabole  $P$  d'équation  $y = 3x^2 + 7x - 4$ ,  $x$  étant un nombre réel supérieur ou égal à 1.

En utilisant cet ajustement, en quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007?

#### EXERCICE 2

*Asie 2010 (1)*

On donne, dans le tableau ci-dessous, la dépense annuelle des ménages français en fruits, exprimée en millions d'euros, de 2000 à 2007 :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
Dépense en millions d'euros $y_i$	6396	7207	7734	7996	8332	8399	8546	8675

1. Sur la copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i; y_i)$  dans un repère orthogonal :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour une unité;
  - sur l'axe des ordonnées, on placera 6200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 millions d'euros.
2. Un premier groupe de statisticiens réalise un ajustement affine du nuage.
 

Donner une équation de la droite ( $d$ ) de régression de  $y$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à l'entier le plus proche. Tracer la droite ( $d$ ) dans le repère précédent.
  3. Un deuxième groupe de statisticiens réalise un ajustement non affine du nuage, en utilisant la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 6400 + 1100\ln(1 + x)$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.
    - a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer :
      - les variations de la fonction  $f$ ;
      - la limite de la fonction  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
    - b) Valider par une démonstration l'une des deux conjectures précédentes.
    - c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  dans le repère précédent.
  4. Est-il raisonnable de penser que la dépense annuelle des ménages français en fruits puisse dépasser 9200 millions d'euros? Argumenter la réponse.

**EXERCICE 3**

*Pondichéry 2010 (2 obligatoire)*

*Les parties A et B sont indépendantes*

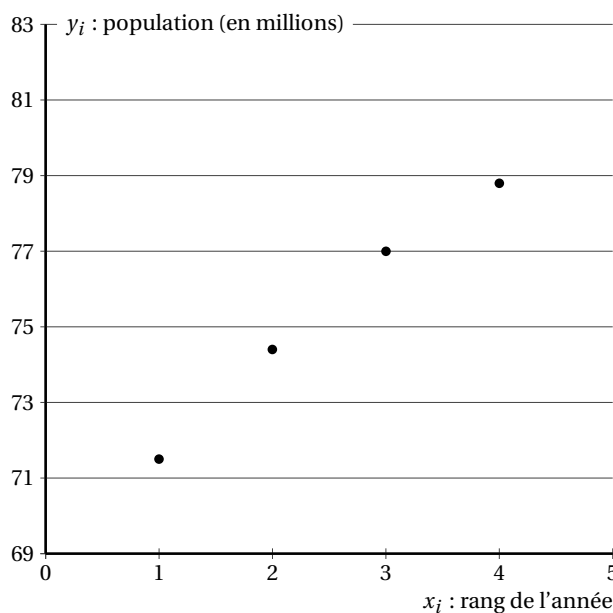
**PARTIE A**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par période de cinq ans, de la population globale des deux Allemagnes (R. F. A. et R. D. A.) de 1958 à 1973.

Année	1958	1963	1968	1973
Rang de l'année $x_i \quad 1 \leq i \leq 4$	1	2	3	4
Population des deux Allemagnes $y_i$ en millions d'habitants $1 \leq i \leq 4$	71,5	74,4	77	78,8

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.

- Déterminer, en utilisant une calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
- En 1993, la population globale de l'Allemagne réunifiée s'élevait à 81 millions d'habitants. L'ajustement proposé est-il adapté?

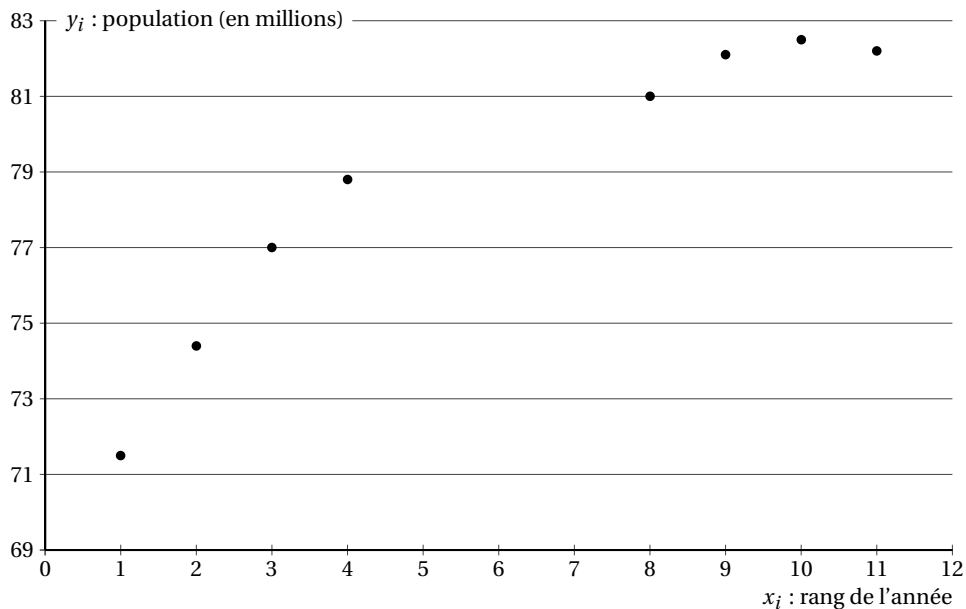
**PARTIE B**

On étudie ci-dessous l'évolution de la population de l'Allemagne sur une période plus étendue (à partir de 1990, il s'agit de la population de l'Allemagne réunifiée).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année $x_i, 1 \leq i \leq 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
Population de l'Allemagne $y_i$ en millions d'habitants $1 \leq i \leq 11$	71,5	74,4	77	78,8	81	82,1	82,5	82,2

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



Au vu de l'allure du nuage, un ajustement logarithmique semble plus approprié.

Pour cela on pose  $z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$ , pour  $1 \leq i \leq 11$ .

- Recopier sur la copie et compléter la dernière ligne du tableau ci-dessous (les résultats seront arrondis au centième).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année $x_i, 1 \leq i \leq 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
$z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$ (arrondi au centième) $1 \leq i \leq 11$								

- En déduire, en utilisant la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés. On donnera la réponse sous la forme  $z = ax + b$ , les coefficients  $a$  et  $b$  seront arrondis au centième.
- En déduire que l'ajustement logarithmique recherché est donné par l'équation  $y = 100 \ln(0,02x + 2,07)$ .
- À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation de la population de l'Allemagne en 2013.



# V SPÉCIALITÉ

## V.1 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

### EXERCICE 1

*France Métropolitaine Juin 2010 (2)*

Un équipementier fabrique pour une usine de l'industrie automobile deux types de sièges : un modèle "luxe" et un modèle "confort".

Soit  $x$  le nombre, exprimé en centaines, de sièges "luxe" et  $y$  le nombre, exprimé en centaines, de sièges "confort" produits chaque mois.

La fonction coût mensuel de production est la fonction  $F$  définie pour  $x$  et  $y$  appartenant à l'intervalle  $[0;3]$  par :

$$F(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6.$$

$F(x, y)$  désigne le coût mensuel de production, exprimé en **dizaines de milliers** d'euros, pour  $x$  **centaines** de sièges "luxe" et pour  $y$  **centaines** de sièges "confort".

1. Au mois de janvier 2010, l'équipementier a produit 120 sièges "luxe" et 160 sièges "confort". Justifier que le coût de production mensuel a été 12 000 euros.
2. Vérifier que,  $x$  et  $y$  étant deux nombres réels,  $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1$ .  
En déduire que le coût de production mensuel minimal est 10 000 euros.  
Préciser pour quelles quantités mensuelles respectives de sièges "luxe" et "confort" produites ce coût de production est obtenu.
3. À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges est exactement 250.
  - a) Justifier que  $y = 2,5 - x$ .  
Démontrer que, sous cette condition, le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est égal à  $2x^2 - 3x + 2,25$ .
  - b) On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 2,5]$  par  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$ .  
Dresser en le justifiant le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2,5]$ .
  - c) En déduire les quantités mensuelles respectives de sièges "luxe" et "confort" que l'équipementier doit produire à partir du mois de juillet 2010 pour minimiser le coût mensuel de production. Préciser ce coût minimal.

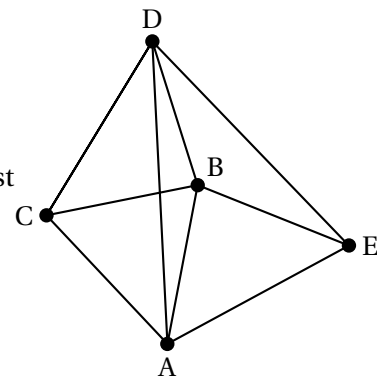
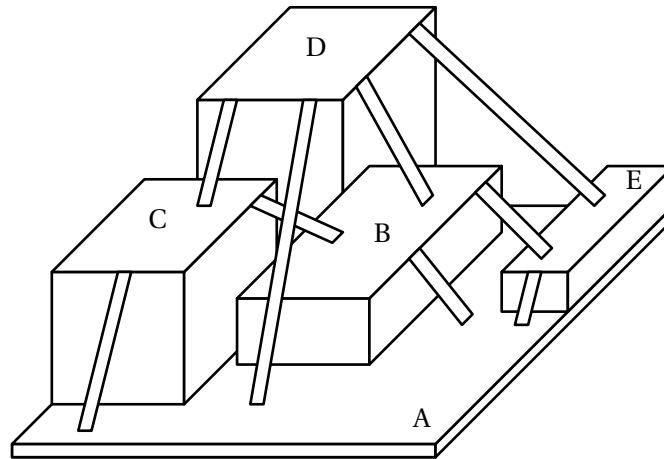
**V. 2 GRAPHES**

**EXERCICE 1**

*Pondichéry 2010 (2)*

On considère un espace de jeu réservé à des enfants.

Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E. Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-dessous :



On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-contre :

Une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.

**PARTIE A**

1. Donner un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe G.
2. En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe G, Justifier la réponse.
3. Proposer une coloration du graphe G en expliquant la méthode utilisée.
4. En déduire la valeur du nombre chromatique du graphe G.

**PARTIE B**

1. Ce graphe est-il connexe? Est-il complet? Justifier les réponses.
2. Ce graphe contient-il une chaîne eulérienne? Justifier la réponse.
3. Si on rajoute une arête à ce graphe, quels sommets peut-on alors relier pour que le graphe obtenu contienne un cycle eulérien? Justifier la réponse.

**PARTIE C**

1. On décide de peindre les surfaces des cinq plates-formes en attribuant des couleurs différentes à deux plates-formes reliées par une rampe.  
 Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire? Justifier la réponse.
2. On propose aux enfants le jeu suivant : il s'agit de partir de la plateforme C et de rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe.  
 Proposer un chemin remplissant les conditions exposées ci-dessus.

3. Pour faciliter le déplacement des enfants dans cet espace de jeu, on décide d'installer une nouvelle rampe. Où peut-on placer cette rampe pour obtenir l'existence d'un chemin qui, partant d'une plate-forme donnée, emprunte une et une seule fois chaque rampe pour revenir à la plate-forme initiale? Justifier la réponse.

### V. 3 GRAPHES PROBABILISTES

#### EXERCICE 1

*Amérique du Nord 2010 (4)*

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,7.

S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de 0,9.

Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

$n$  étant un entier naturel non nul, on note :

- $a_n$  la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le  $n$ -ième jour.
  - $b_n$  la probabilité qu'Alex aille se baigner le  $n$ -ième jour.
  - $P_n = (a_n \quad b_n)$  la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le  $n$ -ième jour.
- On a donc  $P_1 = (0 \quad 1)$

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).
- b) Soit  $M$  la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter  $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$
2. Calculer  $P_3$ ,  $P_{10}$  et  $P_{20}$ . Quelle conjecture peut-on faire?
3. a) Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $b_{n+1} = 0,9a_n + 0,7b_n$ .
- b) En déduire que :  $b_{n+1} = -0,2b_n + 0,9$ .
4. On considère la suite  $u$  définie pour tout entier  $n$  non nul par  $u_n = b_n - 0,75$ .
  - a) Montrer que  $u$  est une suite géométrique de raison  $-0,2$ ; on précisera son premier terme.
  - b) Déterminer la limite de la suite  $u$ .
  - c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .
5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner. Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20<sup>e</sup> jour de ses vacances?

#### EXERCICE 2

*Antilles-Guyane 2010 (2)*

M. et M<sup>me</sup> Martin, qui habitent une grande ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.

S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.

Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7.

En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P_n$  la matrice ligne  $(a_n \quad b_n)$  traduisant l'état probabiliste l'année  $(2009 + n)$ , où  $a_n$  désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année  $(2009 + n)$  et  $b_n$  la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année  $(2009 + n)$ .

#### PARTIE A

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés  $F$  et  $E$  ( $F$  pour France et  $E$  pour étranger).
- b) En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord  $F$  puis  $E$  pour l'ordre des sommets. On notera  $M$  cette matrice.
2. a) Donner  $P_0$ , l'état probabiliste initial, l'année 2009.

- b) On donne les résultats suivants :  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$ ;  $M^3 = \begin{pmatrix} 0,444 & 0,556 \\ 0,417 & 0,583 \end{pmatrix}$ ;  $M^4 = \begin{pmatrix} 0,4332 & 0,5668 \\ 0,4251 & 0,5749 \end{pmatrix}$ . En choisissant la bonne matrice, calculer  $P_3$ . En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 (On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).
3. Soit  $P$  la matrice ligne  $(x \ y)$  donnant l'état stable où  $x$  et  $y$  sont deux réels positifs tels que  $x + y = 1$ . Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

**PARTIE B**

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,3$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = a_n - \frac{3}{7}$ .
  - Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - En déduire l'expression de  $u_n$ , puis celle de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Que retrouve-t-on ?

**EXERCICE 3***La Réunion 2010 (2)**Les parties A et B sont indépendantes***PARTIE A**

Une étude statistique est réalisée chaque trimestre sur une population composée initialement de fumeurs. Certains d'entre eux s'arrêtent de fumer, d'autres qui ont arrêté, redeviennent fumeur.

On estime que :

- si un individu est fumeur, la probabilité qu'il arrête de fumer (qu'il devienne non fumeur) le trimestre suivant est 0,2;
- si un individu a arrêté de fumer (il est considéré alors comme non fumeur), la probabilité qu'il redevienne fumeur le trimestre suivant est 0,3.

On notera  $X$  l'évènement « l'individu est fumeur » et  $Y$  l'évènement « l'individu est non fumeur ».

- Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition que l'on notera  $M$  (aucune justification n'est demandée, on respectera l'ordre alphabétique des sommets).
- Pour un entier naturel  $n$  donné, on note  $x_n$  la proportion de fumeurs dans la population et  $y_n$  la proportion de non fumeurs au trimestre de rang  $n$ . On note  $E_n = (x_n \ y_n)$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système au trimestre de rang  $n$ .

On étudie une population initiale où tous les individus sont fumeurs. On a donc :  $E_0 = (1 \ 0)$ .

- Vérifier que la proportion de fumeurs à l'issue de deux trimestres est 0,7.
  - Déterminer l'état  $E_4$  de la population à l'issue d'une année.
3. La répartition fumeurs/non fumeurs de la population converge vers un état stable :  $E = (x \ y)$ . Déterminer cet état.

**PARTIE B**

Le chiffre d'affaires d'un débitant de tabac sur une période donnée est fonction de deux variables : le nombre de consommateurs, c'est-à-dire de fumeurs, et le prix moyen du paquet de tabac.

On appelle  $z$  le chiffre d'affaire en milliers d'euros,  $x$  le nombre de consommateurs en milliers et  $y$  le prix du paquet de tabac en euros. On admettra que  $z = xy$ .

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on désigne par  $S$  la surface d'équation  $z = xy$ .

1. Le débitant a pour clients 1000 consommateurs réguliers et le prix moyen du paquet de tabac est de 5 euros.
- Quel est le chiffre d'affaires réalisé par le débitant?
  - Soit, dans un plan  $P$  parallèle au plan de base  $xOy$ , la ligne de niveau  $z = 5$  de la surface  $S$ .  
On a tracé cette ligne de niveau sur la figure 1 donnée en annexe 1.  
Donner son équation de la forme  $y = f(x)$ .  
Le nombre de consommateurs passe de 1000 à 600. Quel devrait être, au centime d'euros près, le nouveau prix du paquet de tabac pour que le chiffre d'affaires du débitant reste égal à 5000 €?

## ANNEXE 1

Exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Ligne de niveau  $z = 5$  de la surface  $S$ .

## EXERCICE 4

Liban 2010 (4)

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.

La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :

15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.

10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante.

On note respectivement  $a_n$  et  $b_n$  les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la  $n$ -ième semaine et  $P_n$  la matrice ligne  $(a_n \quad b_n)$ . On a donc  $P_1 = (0,7 \quad 0,3)$ .

1. a) Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.  
b) Donner la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe.
2. Calculer  $M^3$  à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à  $10^{-3}$  près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine?
3. On considère la matrice ligne  $P = (a \quad b)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a + b = 1$ .  
a) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $P = PM$ .  
b) Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel  $n > 0$ , on a :  $a_n = 0,4 + 0,3 \times (0,75^{n-1})$ .  
a) Résoudre l'inéquation  $a_n < 0,5$ .  
b) À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A?

**EXERCICE 5***Polynésie 2010 (2)*

Dans une société, le service informatique utilise deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Aurora, leader du marché, et d'autre part le logiciel Bestmath, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier et en juillet, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.

Lors de l'enquête de janvier 2009, le chef de réseau a constaté que 32 % des informaticiens utilisaient le logiciel Aurora, les autres informaticiens utilisaient le logiciel Bestmath.

Lors de chaque relevé suivant (juillet 2009, janvier 2010, ...), le chef du réseau informatique a constaté que 20 % des utilisateurs du logiciel Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais le logiciel Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs du logiciel Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

Les semestres sont comptés à partir de janvier 2009, que l'on appellera semestre 0 (juillet 2009 est donc le semestre 1).

Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par :

- $a_n$  la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora le semestre  $n$ ;
- $b_n$  la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Bestmath le semestre  $n$ .

1. a) Traduire les données l'énoncé par un graphe probabiliste.  
b) Écrire la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
2. a) On note  $P_0 = (a_0 \quad b_0)$  l'état initial de ce graphe en janvier 2009. Déterminer  $P_0$ .  
b) On appelle  $P_1$  l'état de la société en juillet 2009. Vérifier que  $P_1 = (0,426 \quad 0,574)$ .  
c) On appelle  $P_2$  l'état en janvier 2010. Déterminer  $P_2$  (les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$ ).
3. Dans cette partie on étudie la suite  $(a_n)$ .  
a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,25$ .  
b) On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $U_n = \frac{5}{9} - a_n$ .  
Démontrer que la suite  $(U_n)$  est géométrique, déterminer sa raison ainsi que le premier terme.  
c) En déduire l'expression de  $U_n$  puis de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
4. Soit  $P = (x \quad y)$  l'état probabiliste stable.  
a) Déterminer  $x$  et  $y$ .  
b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
On suppose que l'utilisation du logiciel Aurora dans l'entreprise progresse régulièrement de la même façon. Le distributeur du logiciel Aurora peut-il espérer que son logiciel soit utilisé un jour par plus de 60 % des informaticiens de l'entreprise?

## V. 4 SUITES

## EXERCICE 1

*Centres Étrangers 2010 (2)*

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite  $(u_n)$  où  $u_n$  désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année  $(2010 + n)$ . En 2010, la forêt possède 50000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :

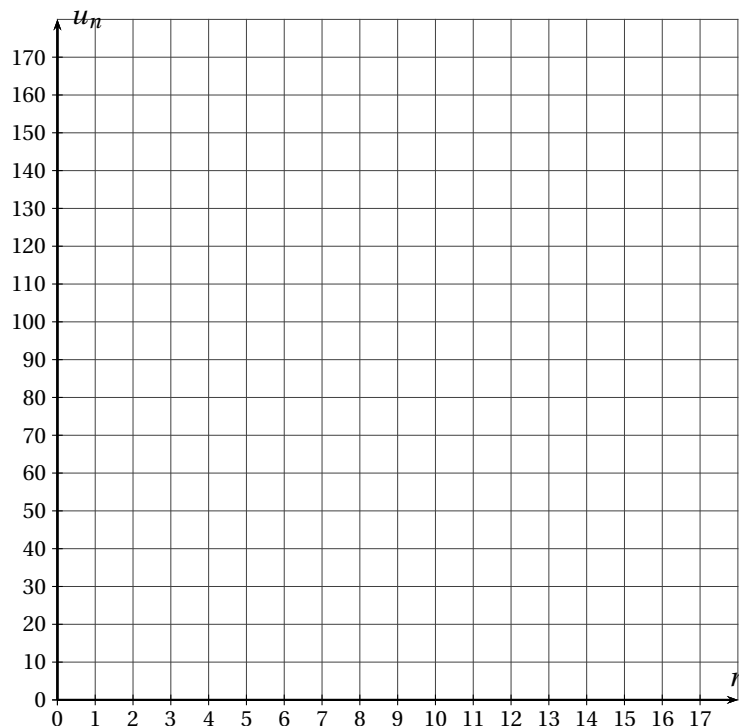
$$u_0 = 50 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ par la relation : } u_{n+1} = 0,95u_n + 3.$$

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 60 - u_n$ .
- Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95.
  - Calculer  $v_0$ . Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$ .
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. a) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité  $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$ .  
b) En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . Interpréter.

## EXERCICE 2

*Nouvelle Calédonie 2010 (2)*

## A - Observation d'une suite de nombres



1. On donne ci-dessus la représentation graphique des 16 premiers termes d'une suite  $(u_n)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.  
Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .



2. Les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$  ont été calculés avec un tableur :

$n$	0	1	2	3
$u_n$	161	104,6	70,76	50,456

La suite  $(u_n)$  peut-elle être une suite géométrique? On justifiera la réponse donnée.

**B- Étude de la suite**

La suite  $(u_n)$  observée dans la partie A est définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 0,6u_n + 8$  et  $u_0 = 161$ .

1. Calculer  $u_4$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 20$ . Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.
3. Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  et en déduire celle de la suite  $(u_n)$ .

**V.5 Q.C.M**

**EXERCICE 1**

*Amérique du Sud 2010 (2)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

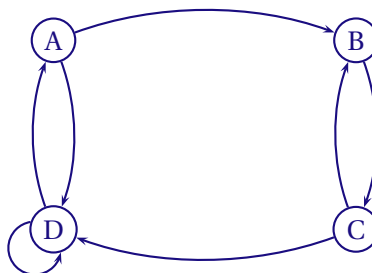
1. Les points  $A(1;2;3)$ ,  $B(3;2;1)$  et  $C(1;1;1)$  sont trois points de l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le plan  $(ABC)$  est parallèle au plan  $P$  d'équation :

- $x + y - z = 0$
- $y = \frac{1}{2}$
- $x + y + z - 1 = 0$
- $x - 2y + z + 3 = 0$

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + n}$ . Cette suite :

- a pour limite  $\frac{1}{n}$
- a pour limite 0
- a pour limite 1
- n'a pas de limite

3. Le graphe ci-dessous admet exactement  $n$  chaînes de longueur 4 allant de A vers B avec :

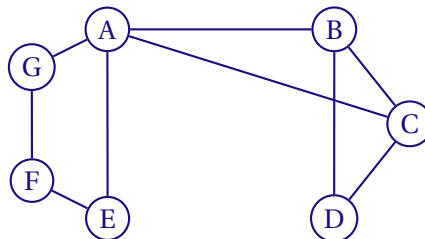


- $n = 1$
- $n = 3$
- $n = 5$
- $n = 8$

4. La suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$  :

- n'est pas monotone
- n'admet pas de limite
- est croissante
- est majorée par 0

5. Le graphe ci-dessous a un nombre chromatique  $\kappa$  égal à :



- 2
- 3
- 4
- 5

## EXERCICE 2

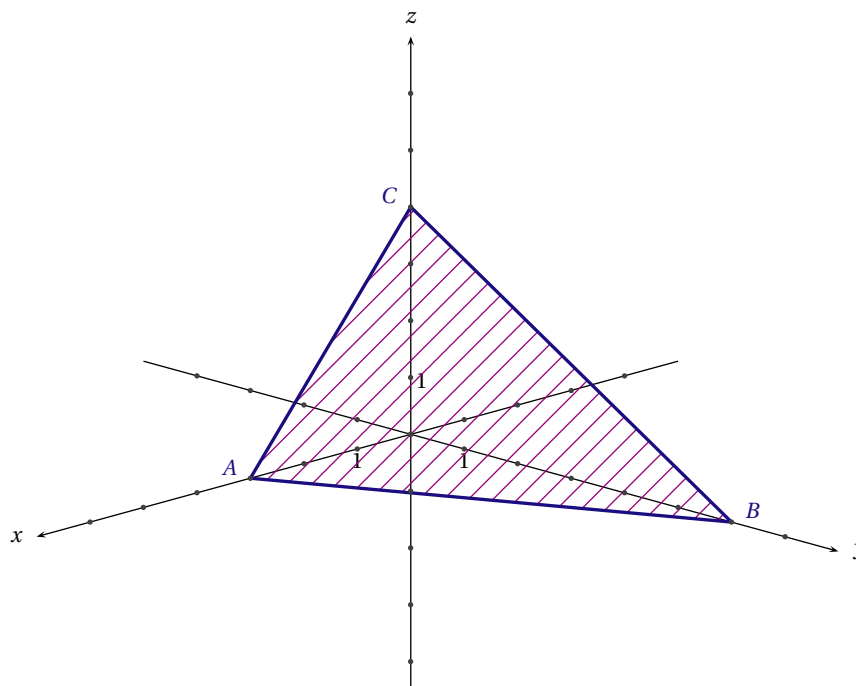
Asie 2010 (4)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et, en face de celui-ci, recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

- Une forêt, exploitée depuis le premier janvier 2005, voit sa population d'arbres diminuer de 10 % chaque année. En supposant que la déforestation se poursuive à ce rythme, la population d'arbres aura diminué le premier janvier 2010 d'environ :
  - 41 %
  - 50 %
  - 59 %
- Soit la suite  $(V_n)$  définie par  $V_0 = 5$ ,  $V_1 = 7$  et  $V_{n+2} = 3V_{n+1} - 2V_n$ .
  - $V_3 = -2$
  - $V_3 = 19$
  - $V_3 = 23$
- Dans un repère de l'espace, le plan  $(P)$  d'équation  $5x - z + 7 = 0$  est parallèle à l'axe
  - des abscisses
  - des ordonnées
  - des cotes
- Dans un repère de l'espace, l'intersection de la surface  $\mathcal{S}$  d'équation  $z = x^2 - y + 3$  et du plan  $(Q)$  d'équation  $z = 7$  est
  - une droite
  - une parabole
  - un point
- Le plan  $(ABC)$ , dessiné ci-dessous dans un repère de l'espace, a pour équation
  - $3x + 6y + 4z = 9$
  - $2x + y - z = 6$
  - $4x + 2y + 3z = 12$



**EXERCICE 3**

*France Métropolitaine Septembre 2010 (2)*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses parmi les trois proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la question choisie.

**PARTIE I :** Aucune justification n'est demandée

Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on désigne par  $(S)$  l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  tels que  $z = 2x - y^2 + 1$  et par  $(P)$  le plan d'équation  $2x + 3y - 5 = 0$ .

a) La surface  $(S)$  passe par le point de coordonnées :

RÉPONSE A :  $(1; -1; 4)$

RÉPONSE B :  $(-1; -1; 0)$

RÉPONSE C :  $(1; -1; 2)$

b) La courbe de niveau de cote 3 de la surface  $(S)$  est :

RÉPONSE A : une droite

RÉPONSE B : une parabole

RÉPONSE C : une hyperbole

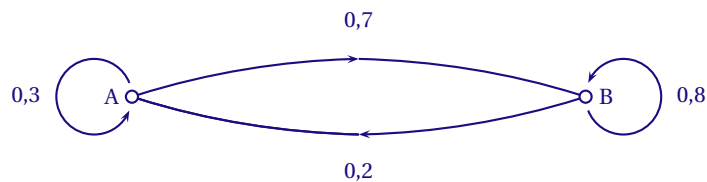
c) Le plan  $(P)$  :

RÉPONSE A : contient le point de coordonnées  $(0; 0; -5)$

RÉPONSE B : est parallèle au plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

RÉPONSE C : est parallèle à l'axe  $(O; \vec{k})$

2. Soient  $G$  le graphe probabiliste ci-dessous et  $M$  la matrice de transition associée à ce graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.



RÉPONSE A :  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,23 & 0,77 \\ 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}$

RÉPONSE B :  $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

RÉPONSE C :  $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

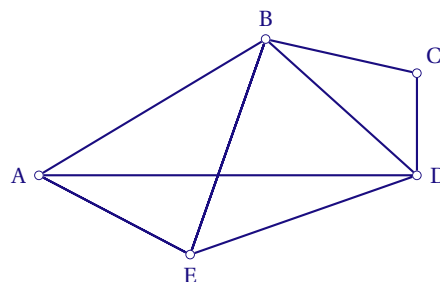
**PARTIE II**

Recopier pour chaque question la réponse exacte et justifier celle-ci.

Chaque réponse exacte et bien justifiée rapportera 1 point.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère le graphe  $H$  :



On peut affirmer que :

a) • Le graphe  $H$  admet une chaîne eulérienne.

- Le graphe  $H$  admet un cycle eulérien.
  - Le graphe  $H$  est complet.
- b) • Le nombre chromatique du graphe est 3.
- Le graphe admet un sous-graphe complet d'ordre 4.
  - Le graphe n'est pas connexe.
2. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 4$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = -0,4u_n + 1750$ .  
On définit la suite  $(v_n)$  pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 1250$ .

Alors :

- La suite  $(v_n)$  est arithmétique.
- La suite  $(v_n)$  est géométrique.
- La suite  $(u_n)$  est géométrique.

# BACCALAURÉAT 2010

## SÉRIE ES : INDEX DES DIFFÉRENTS SUJETS

---

Amérique du Nord 2010 .....	5, 26, 42, 51, 65
Amérique du Sud 2010 .....	11, 27, 38, 51, 71
Antilles Septembre 2010 .....	12, 28, 42, 59
Antilles-Guyane 2010 .....	1, 13, 28, 38, 65
Asie 2010 .....	14, 29, 39, 59, 72
Centres Étrangers 2010 .....	6, 30, 43, 48, 69
France Métropolitaine Juin 2010 .....	16, 34, 35, 53, 62
France Métropolitaine Septembre 2010 .....	17, 30, 35, 53, 73
La Réunion 2010 .....	19, 31, 44, 54, 66
Liban 2010 .....	7, 20, 47, 49, 67
Nouvelle Calédonie 2010 .....	8, 21, 40, 49, 69
Polynésie 2010 .....	8, 32, 41, 55, 68
Polynésie Septembre 2010 .....	9, 23, 36, 56
Pondichéry 2010 .....	2, 24, 45, 60, 63

---