BAC 2010

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2010

PROGRAMME OBLIGATOIRE

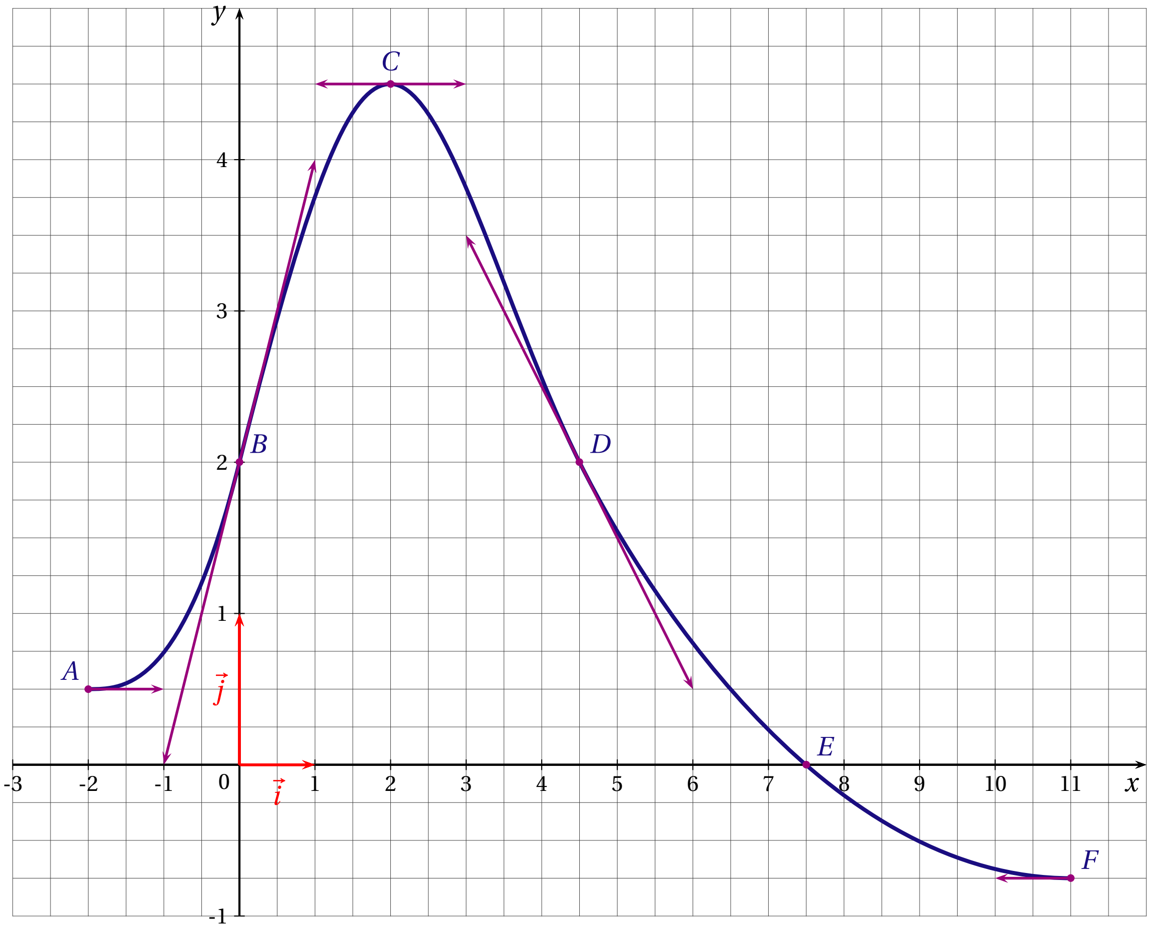
Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2010

AMÉRIQUE DU NORD 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;11]$, et on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, figure ci-dessous.



On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2;0,5)$, $B(0;2)$, $C(2;4,5)$, $D(4,5;2)$, $E(7,5;0)$ et $F(11;-0,75)$. Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses ***A, B*** *ou* ***C*** *est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à O.*

1. $f'(0)$ est égal à :

   A : $\frac{1}{2}$ **B :** 2 **C :** 4

2. $f'(x)$ est strictement positif sur l'intervalle :

   A : $]0;11[$ **B :** $]0;7,5[$ **C :** $]-2;2[$

3. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D est :

   A : $y=-x+6,5$ **B :** $y=x-6,5$ **C :** $y=-2x+11$

4. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[-2;11]$:
   A : admet un maximum en $x = 2$.
   B : est strictement croissante sur l'intervalle $[-2;7,5]$.
   C : est strictement décroissante sur l'intervalle $]2;11[$.
5. Sur l'intervalle $[-2;11]$, l'équation $\exp[f(x)] = 1$:
   A : admet une solution.
   B : admet deux solutions.
   C : n'admet aucune solution.

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Un commerçant spécialisé en photographie numérique propose en promotion un modèle d'appareil photo numérique et un modèle de carte mémoire compatible avec cet appareil.
Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

— 20 % des clients achètent l'appareil photo en promotion.

— 70 % des clients qui achètent l'appareil photo en promotion achètent la carte mémoire en promotion.

— 60 % des clients n'achètent ni l'appareil photo en promotion, ni la carte mémoire en promotion.

On suppose qu'un client achète au plus un appareil photo en promotion et au plus une carte mémoire en promotion.
Un client entre dans le magasin.
On note A l'évènement : « le client achète l'appareil photo en promotion ».
On note C l'évènement : « le client achète la carte mémoire en promotion ».

1. a) Donner les probabilités $p\left(\overline{\text{A}}\right)$ et $p\left(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{C}}\right)$.
   b) Un client n'achète pas l'appareil photo en promotion. Calculer la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion.
2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Montrer que la probabilité qu'un client achète la carte mémoire en promotion est 0,34.
4. Un client achète la carte mémoire en promotion. Déterminer la probabilité que ce client achète aussi l'appareil photo en promotion.
5. Le commerçant fait un bénéfice de 30 € sur chaque appareil photo en promotion et un bénéfice de 4 € sur chaque carte mémoire en promotion.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du bénéfice par client. Aucune justification n'est demandée.

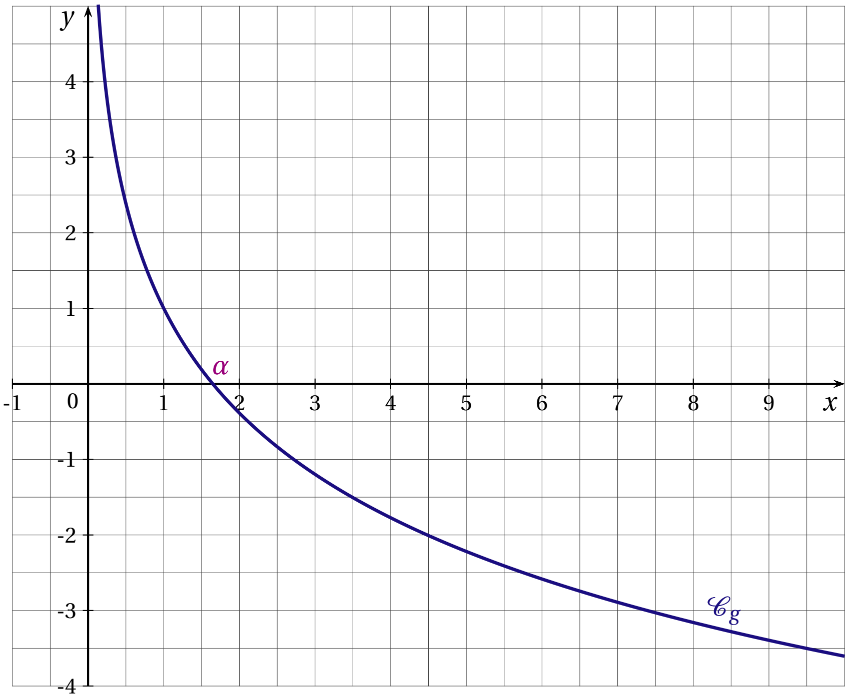
Bénéfice par client en euros	0			
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6			

   b) Pour 1000 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion ?
6. Trois clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A - Étude préliminaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1-2\ln(x)$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Cette courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α.



1. Déterminer la valeur exacte de α.
2. On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$).
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On pourra remarquer que $f(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)+\dfrac{1}{x}$.
   b) Soit $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE C - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.
Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
2. *Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 €?

EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Craignant une propagation de grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines. Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7.
On a noté x_i les rangs successifs des semaines et y_i le nombre de consultations correspondant :

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : y_i	540	720	980	1320	1800	2420	3300

1. Tracer le nuage de points sur une feuille de papier millimétré, on prendra 2 cm pour une unité en x et 1 cm pour 200 en y.

   Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi?
2. Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les $z_i = \ln(y_i)$.

   Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les z_i à 0,01 près. Il n'est pas demandé de tracer le nuage de points correspondant.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$							

3. Trouver à la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant z et x (les coefficients obtenus par la calculatrice seront donnés à 0,1 près) puis déduire y en fonction de x (on donnera le résultat sous la forme $y = \mathrm{e}^{ax+b}$, a et b étant deux réels).
4. En utilisant ce modèle, trouver par le calcul :

   a) Une estimation du nombre de consultations à la 10$^{\text{ème}}$ semaine (arrondir à l'unité).

   b) La semaine à partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   En observant les valeurs données par le modèle exponentiel grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, expliquer si ce modèle reste valable sur le long terme.

AMÉRIQUE DU SUD 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On se propose d'étudier l'évolution des productions d'électricité d'origines hydraulique et éolienne depuis 1999.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A : Production d'électricité d'origine hydraulique

Le tableau suivant donne la production d'électricité d'origine hydraulique en France pour plusieurs années entre 2000 et 2005.

Année	2000	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année : x_i	0	2	3	4	5
Production en GWh : y_i	71593	65826	64472	65393	57271

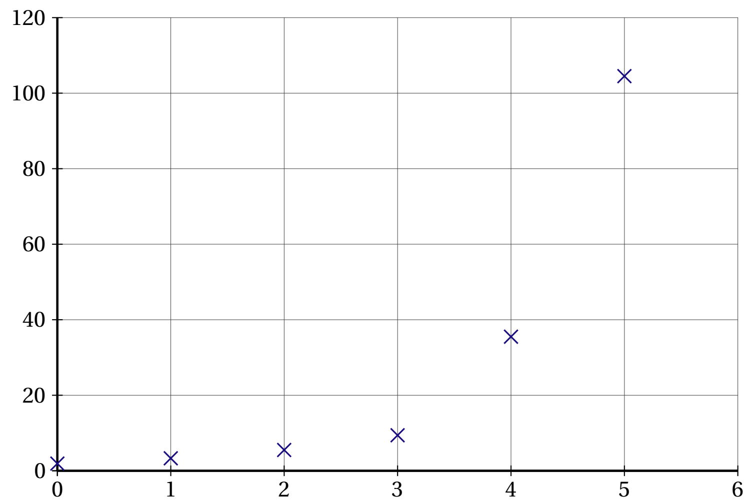
1. Représenter, dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série statistique $(x_i; y_i)$ définie ci-dessus.
   On utilisera une feuille de papier millimétré et on choisira comme unités graphiques 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 10000 GWh sur l'axe des ordonnées. On débutera la graduation sur l'axe des ordonnées à 50000.
2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
   a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation $y = mx + p$ de la droite d d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, les coefficients m et p seront arrondis au dixième.
   b) Placer le point G et tracer la droite d sur le graphique précédent.

PARTIE B : Production d'électricité d'origine éolienne

Le tableau suivant donne la capacité de production d'électricité d'origine éolienne installée en France de 2003 à 2008.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Puissance installée en MWh : y_i	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5

1. Ces données sont représentées par le nuage de points ci-après :



On considère qu'un ajustement affine n'est pas pertinent.
L'allure du nuage suggère de rechercher un ajustement exponentiel de y en x. Pour cela on pose pour tout entier naturel i compris entre 0 et 5 : $z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$
Dans les questions a et b suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice. Aucune justification n'est demandée. Les résultats seront arrondis au centième.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Puissance installée : y_i	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5
$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$						

b) Déterminer une équation de la droite d' d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

c) Sachant que $z = \ln\left(\frac{y}{100}\right)$, déterminer l'expression de y sous la forme $k\mathrm{e}^{ax}$ où k et a sont des nombres réels à calculer.

2. On suppose que l'évolution de la puissance installée se poursuit dans un avenir proche selon le modèle précédent.
Estimer, au centième de MWh près, la puissance installée prévue pour l'année 2010.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.
Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3;0]$ par $f(x) = x^2$. Sa valeur moyenne sur l'intervalle $[-3;0]$ est :

- $\mu = 4,5$
- $\mu = 3$
- $\mu = \frac{1}{3}$
- $\mu = -3$

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$, f' désigne sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$. Alors :

- $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x^2+x+1}{2x+1}$

3. La primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-x+3}{x}$ telle que $F(1) = 1$ vérifie :

- $F(x) = \dfrac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x^2} - \dfrac{17}{3}$
- $F(x) = x^2 - 1 + 3\ln x$
- $F(x) = x^2 - x + 3\ln x + 1$
- $F(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2} + 1$

4. f est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à :

- $5\ln 2$
- $\ln 10 - \ln 5$
- 3,466
- $\ln\left(\frac{2}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

5. La limite de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x - \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :

- $-\infty$
- 0
- e
- $+\infty$

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, on appellera motard tout conducteur d'une moto dont la cylindrée est supérieure à 50cm^3. Ces motards se décomposent en deux catégories :

— la catégorie A définie par le fait que les motards conduisent une moto de cylindrée 125cm^3 ou plus,

— la catégorie B définie par le fait que les motards conduisent une moto d'une cylindrée strictement inférieure à 125cm^3.

La moto peut être de type *sportive* ou *routière*.

On considère que :

— ceux de la catégorie A représentent 44 % de l'ensemble des motards

— 65 % de ceux de la catégorie B possèdent une moto de type sportive.

On interroge au hasard un motard et on note :

A : l'évènement « le motard est de la catégorie A »,

B : l'évènement « le motard est de la catégorie B »,

S : l'évènement « la moto est de type sportive »,

R : l'évènement « la moto est de type routière ».

Tous les résultats des différents calculs seront donnés sous forme décimale et arrondis au millième. On pourra utiliser un arbre de probabilité ou un tableau.

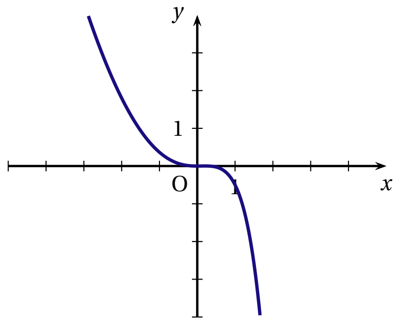
1. Montrer que la probabilité que le motard interrogé soit dans la catégorie B et conduise une moto de type routière est égale à 0,196.
2. 36,6 % des motos sont de type routière.
   Quelle est la probabilité que le motard choisi conduise une moto de type sportive et soit dans la catégorie A ?
3. Quelle est la probabilité qu'un motard soit dans la catégorie B sachant qu'il conduit une moto de type routière ?
4. On choisit au hasard et de façon indépendante trois motards. Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux soit de la catégorie B ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2\mathrm{e}^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.
Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3;2]$ en observant cette courbe ?

   Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1-(x+2)\mathrm{e}^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

   a) Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

   On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité : $g(x) = 1 - \dfrac{x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}$.

   b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x.

   c) En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.

   d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Justifier que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

   e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Sens de variation de la fonction f

   a) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f

   c) Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?

ANTILLES SEPTEMBRE 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires du commerce équitable en France, exprimé en millions d'euros.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires du commerce équitable en millions d'euros : y_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	12	21	37	70	120	166	210	256

(Source : *M. H. leader du commerce équitable mondial*)

1. a) En 2007, le commerce de détail en France a généré un chiffre d'affaires de 447 milliards d'euros. (Source : INSEE). En 2007, quelle est la part du chiffre d'affaires du commerce équitable par rapport à celui du commerce de détail ? (on donnera le résultat en pourcentage arrondi à 0,001 %).

   b) Calculer le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaires du commerce équitable en France entre 2005 et 2008 (on donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 %).

   Dans la suite de l'exercice, on souhaite estimer en quelle année le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007.

2. Ajustement affine

   a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 20 millions d'euros en ordonnée ; l'origine du repère sera prise dans le coin gauche de la feuille de papier millimétré).

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite D d'ajustement de y en x. Les coefficients seront arrondis au dixième. Tracer la droite D dans le repère précédent.

   c) En utilisant cet ajustement affine, à partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007 ?

3. Ajustement parabolique

   Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   L'allure du nuage suggère de choisir un ajustement parabolique.
   On propose d'ajuster le nuage par la parabole P d'équation $y = 3x^2 + 7x - 4$, x étant un nombre réel supérieur ou égal à 1.
   En utilisant cet ajustement, en quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires du commerce équitable en France dépassera le double de celui de 2007 ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.
Une enquête est faite auprès des 1200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

PARTIE A

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise (on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).
On note :

— F l'évènement : « l'employé est une femme » ;

— T l'évènement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculer les probabilités $p(F)$, $p(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train (on donnera les résultats sous forme décimale).
2. Expliquer ce que représente l'évènement $F \cap T$, puis calculer sa probabilité.
   Les évènements T et F sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculer la probabilité que cet employé soit une femme (on donnera le résultat arrondi au millième).

PARTIE B

Après l'étude des résultats de l'enquête, le comité d'entreprise choisit le train comme moyen de transport. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

— la formule n^{o} 1 : voyage en 1^{e} classe plus hôtel pour un coût de 150 € ;

— la formule n^{o} 2 : voyage en 2^{e} classe plus hôtel pour un coût de 100 €.

40 % des employés inscrits choisissent la formule n^{o} 1.

Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30 €.
Indépendamment de la formule choisie, 80 % des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note :

— U l'évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n^{o} 1 » ;

— D l' évènement : « l'employé inscrit choisit la formule n^{o} 2 » ;

— E l' évènement : « l'employé inscrit choisit l'excursion facultative ».

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n^{o} 2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.
3. Soit C le coût total du voyage (excursion comprise).
   a) Déterminer les différentes valeurs possibles que peut prendre C.
   b) Déterminer la loi de probabilité de C.
   c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 (3 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,75 *point. Une réponse fausse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=2x+1+\dfrac{e^x}{e^x-1}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2+3$	↗	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'équation $f(x)=e^2$ admet :
   - aucune solution
   - une unique solution
   - deux solutions
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1,5)$ admet un coefficient directeur :
   - strictement positif
   - strictement négatif
   - nul
3. $f[-\ln(2)]$ est égal à :
   - $-2\ln(2)+3$
   - $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
   - $-2\ln(2)+1$
4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :
   - $y=2x+2$
   - $y=2x+1$
   - $x=0$

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;6]$ par $f(x)=ax+b-\dfrac{16}{x}$ où a et b sont des nombres réels.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[1;6]$ et on note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.
La courbe représentative de f, donnée en annexe, coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 4 et admet une tangente horizontale au point A de coordonnées $(2;4)$.

1. a) Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f'(2)$.
   b) En utilisant deux des quatre résultats de la question 1. a., déterminer les valeurs des réels a et b.
2. On admet que la fonction f est définie sur $[1;6]$ par $f(x)=-4x+20-\dfrac{16}{x}$.
   a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$ en précisant uniquement les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f(4)$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1;6]$.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[1;6]$ par $F(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x$.

   a) Montrer que F est la primitive de la fonction f sur $[1;6]$ telle que $F(1) = 0$.

   b) En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[1;6]$, les valeurs seront arrondies au millième.

PARTIE B

Une entreprise fabrique des pièces pour assemblage de moteurs qu'elle conditionne par centaines. Sa fabrication journalière varie entre 100 et 600 pièces. L'objectif est d'étudier le bénéfice quotidien réalisé par cette entreprise.

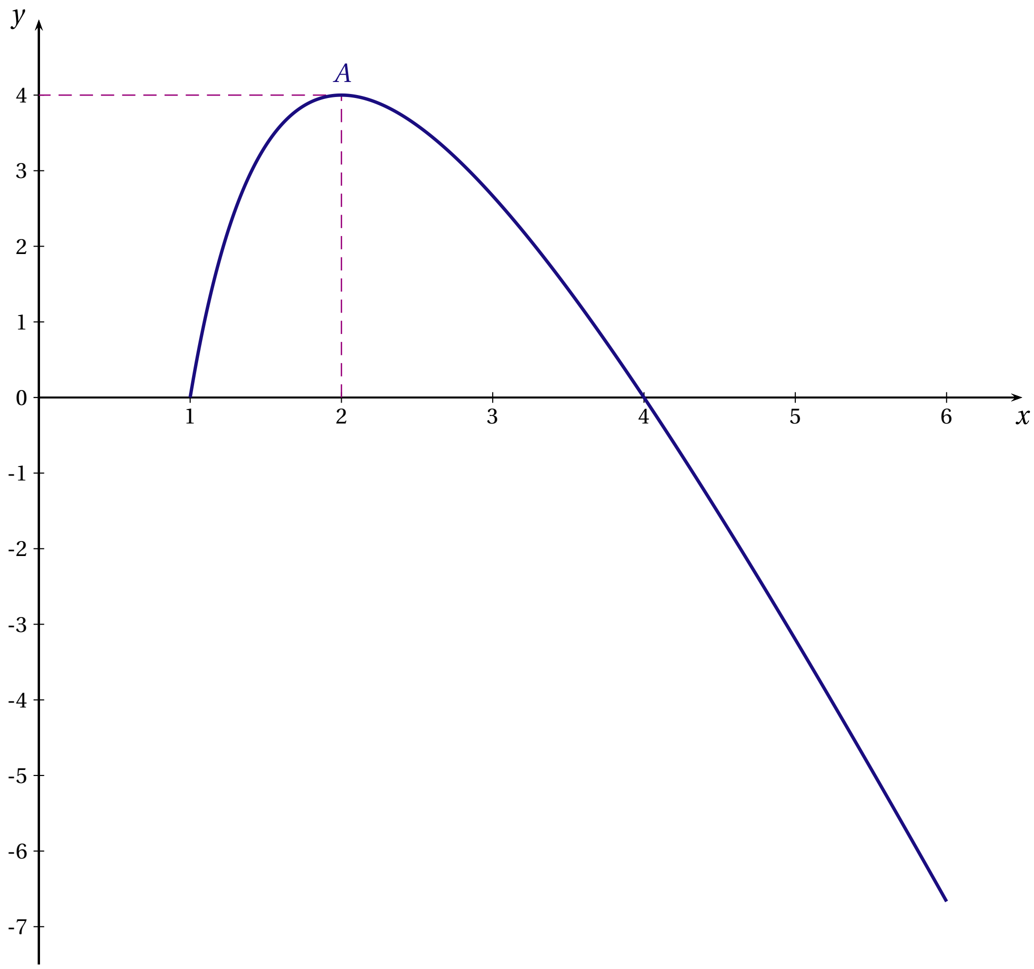
Une étude a montré que le bénéfice marginal quotidien de cette entreprise est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, appelée fonction « bénéfice marginal ». Pour x compris entre 1 et 6, x est exprimé en centaines de pièces fabriquées et vendues quotidiennement et $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros.

En économie, la fonction « bénéfice marginal » est considérée comme la dérivée d'une fonction appelée fonction « bénéfice ».
On sait de plus que le bénéfice de l'entreprise est nul pour la fabrication et la vente quotidienne de 100 pièces.

Dans ces questions toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. En déduire le bénéficie maximal (on donnera ce bénéfice maximal arrondi à l'unité d'euro).
2. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice supérieur à 3000 € (on donnera le résultat arrondi à l'unité)

ANNEXE



ANTILLES-GUYANE 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée en annexe 1 est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie, dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(3;0)$; on sait de plus que la droite d'équation $y=-2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

1re PARTIE : Étude préliminaire de f

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

1. Donner la limite de f en $+\infty$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$.
3. Préciser le signe de f sur $[1;+\infty[$.

2e PARTIE : Étude d'une fonction composée

Pour cette partie, des justifications sont attendues.
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\exp(f(x))$.

1. Déterminer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Résoudre sur l'intervalle $[1;+\infty[$ l'équation $g(x)=1$.

3e PARTIE

La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[1;+\infty[$.

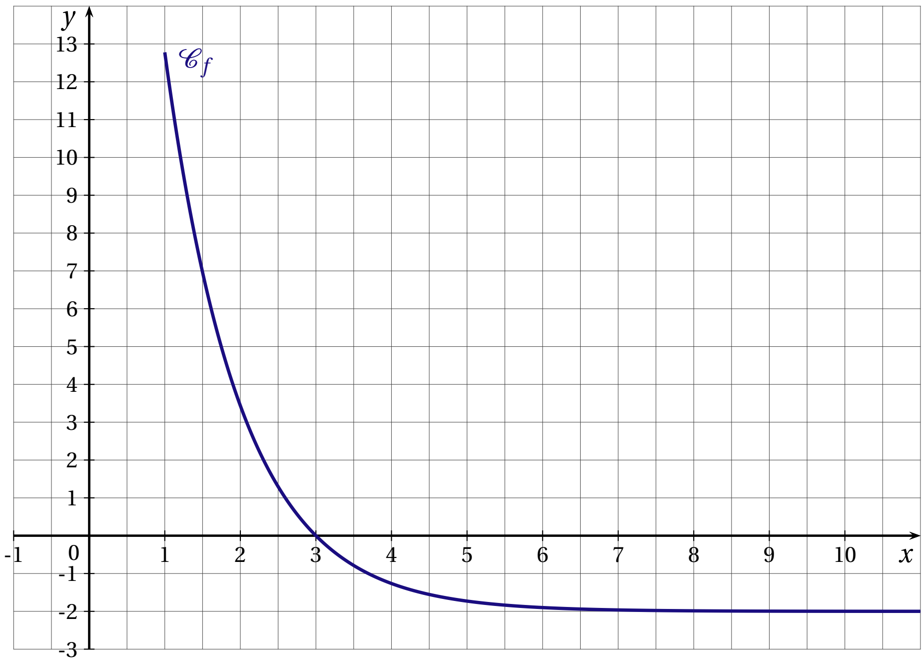
1. La fonction F est représentée sur l'une des 3 courbes données en annexe 2. Préciser laquelle, en justifiant votre réponse.
2. Déterminer graphiquement $F(2)$ et $F(3)$ avec la précision permise par le graphique.
3. On s'intéresse au domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=3$. On notera A l'aire de ce domaine, exprimée en unités d'aire.

   Donner une méthode permettant de déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine précédemment défini et en donner une estimation.

4e PARTIE

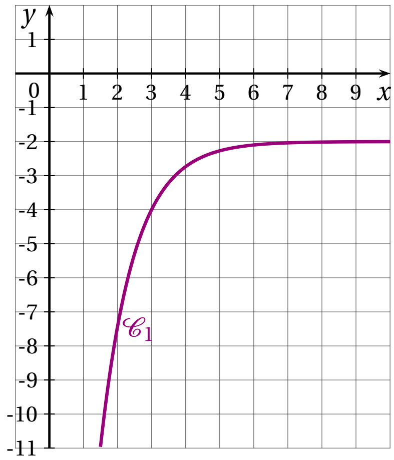
On donne l'expression de la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(x)=2\mathrm{e}^{-x+3}-2$.
Calculer l'aire A du domaine (en unités d'aire) ; on donnera la valeur exacte à l'aide du réel e, puis l'arrondi au centième.

ANNEXE 1

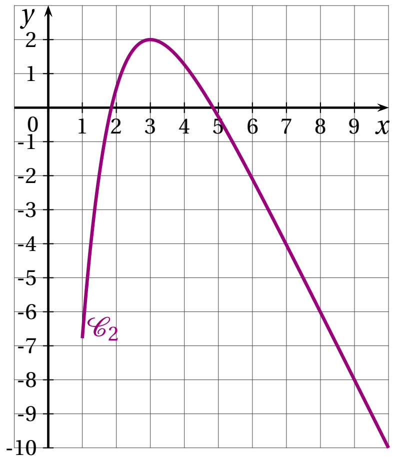


ANNEXE 2

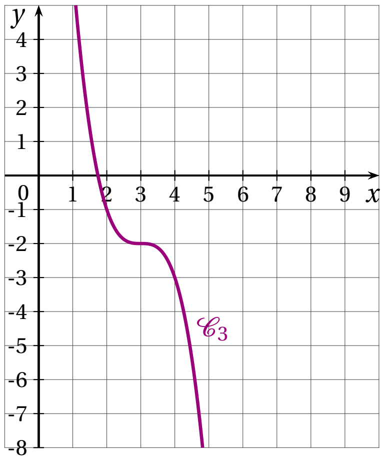
COURBE N° 1



COURBE N° 2



COURBE N° 3



EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un bijoutier propose des perles de culture pour fabriquer des bijoux. Il dispose dans son stock de deux types de couleurs : les perles argentées et les perles noires.
Chacune de ces perles a :

— soit une forme dite sphérique ;

— soit une forme dite équilibrée ;

— soit une forme dite baroque.

On sait que dans son stock, 44 % des perles sont équilibrées, deux cinquièmes sont baroques et les autres sont sphériques.
De plus, 60 % des perles sont argentées dont 15 % sont sphériques et la moitié sont baroques.

1. Recopier le tableau des pourcentages ci-dessous et le compléter à l'aide des données de l'énoncé (on ne demande pas de justification).

	Sphérique	Équilibrée	Baroque	Total
Argentée				
Noire				
Total				100 %

2. Le bijoutier choisit une perle du stock au hasard. On suppose que chaque perle a la même probabilité d'être choisie.
   On note :
   - A l'événement : « la perle est argentée »;
   - N l'événement : « la perle est noire »;
   - S l'événement : « la perle est de forme sphérique »;
   - E l'événement : « la perle est de forme équilibrée »;
   - B l'événement : « la perle est de forme baroque ».

   Toutes les probabilités seront données sous forme décimale exacte.

   a) Quelle est la probabilité que le bijoutier choisisse une perle de forme baroque ?
   b) Quelle est la probabilité que le bijoutier choisisse une perle noire de forme équilibrée ?
   c) Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$ puis interpréter ce résultat.
   d) Le bijoutier a choisi une perle de forme baroque. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas argentée ?
3. Pour une création de bijou original, le bijoutier choisit dans son stock quatre perles au hasard et de manière indépendante. On admet que le nombre de perles est suffisamment grand pour que le choix d'une perle soit assimilé à un tirage avec remise.
   a) Calculer la probabilité qu'aucune des quatre perles choisies ne soit argentée.
   b) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une perle sphérique parmi les quatre perles choisies (donner une valeur approchée de ce résultat à 10^{-3} près).

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous donne pour 6 années le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France.

Années	1997	1999	2001	2003	2005	2007
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 6$	0	2	4	6	8	10
Nombre (en millions) de spectateurs y_i $1 \leqslant i \leqslant 6$	149,3	153,6	187,5	173,5	175,5	177,9

Source : INSEE - d'après le Centre National de la Cinématographie (CNC)

PARTIE 1

Pour chacune des questions ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,25. *L'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est* 0.

1. Le taux d'augmentation du nombre de spectateurs de 1997 à 1999 est donné par le calcul suivant :
   - $\dfrac{153,6}{149,3}$
   - $\dfrac{153,6-149,3}{153,6}$
   - $\left(\dfrac{153,6}{149,3}-1\right)$
2. En supposant que le nombre de spectateurs augmente de 1 % tous les ans, à partir de 2007, le nombre de spectateurs en 2010 est donné par le calcul suivant :
   - $(1,01 \times 177,9) \times 3$
   - $1,01^3 \times 177,9$
   - $0,01^3 \times 177,9$

3. Entre 1997 et 2007 , l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage, du nombre de spectateurs est, arrondie à 0,01 % :
   • 1,77 % • 1,92 % • 3,57 %
4. Sachant que de 1998 à 1999, le nombre de spectateurs (en millions) dans les cinémas en France a diminué de 10 %, le nombre de spectateurs (en millions) en 1998 arrondi au dixième était :
   • 139,6 • 170,7 • 138,2
5. On considère un nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 6$, construit à partir des données du tableau donné en début d'exercice. Les coordonnées du point moyen de ce nuage sont :
   • (2002 ; 169,55) • (5; 169,55) • (30; 1017,3)
6. Supposons que l'on ait effectué un ajustement affine du nuage de points par la méthode des moindres carrés.
   (Dans l'équation de la droite de régression de y en x de la forme $y = ax + b$, on choisira les coefficients a et b arrondis au dixième).
   D'après cet ajustement :
   a) Le nombre de spectateurs sera d'environ 200 millions en :
      • 2015 • 2013 • 2010
   b) L'estimation (en millions) arrondi au dixième, du nombre de spectateurs en 2015 est :
      • 11439,6 • 228,4 • 206

PARTIE 2

Justifier la réponse donnée à la question 3 de la partie 1.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x) = 0{,}3x + 1{,}5 - 0{,}9\ln(x+1)$.
   On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[0;20]$.
   Étudier les variations de f sur $[0;20]$ et dresser son tableau de variation.
2. On donne la fonction g définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $g(x) = -0{,}05x - 1{,}5 + 0{,}9\ln(x+1)$.
   On admet que g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;17]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[17;20]$.
   a) Justifier qu'il existe un unique réel x_0 dans l'intervalle $[0;17]$ tel que $g(x_0) = 0$. Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;20]$.

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A. On demande de justifier les réponses.
Dans une petite ville, un promoteur immobilier projette de construire un lotissement dont le nombre de maisons ne pourra pas dépasser 20 maisons construites.
Le coût de production, en millions d'euros, pour n maisons construites $(0 \leqslant n \leqslant 20)$ est donné par :

$$C(n) = 0{,}3x + 1{,}5 - 0{,}9\ln(x+1)$$

Chaque maison est vendue 250 000 euros.

1. a) Calculer $C(0)$. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
   b) Combien de maisons le promoteur doit-il prévoir de construire pour que le coût de production soit minimal ?

2. a) Montrer que le bénéfice réalisé pour la fabrication de n maisons est, en millions d'euros, donné par $B(n) = -0{,}05x - 1{,}5 + 0{,}9\ln(x+1)$.

   b) Déterminer le nombre de maisons à construire pour que le bénéfice soit maximal.
   Quel est alors ce bénéfice (à 100 euros près) ?

   c) Déterminer le nombre minimal de maisons à construire pour que le promoteur ne travaille pas à perte.

   Pour la question suivante, on explicitera la démarche utilisée. Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   d) À partir de combien de maisons construites le bénéfice du promoteur est-il supérieur à 200 000 euros ?

ASIE 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On donne, dans le tableau ci-dessous, la dépense annuelle des ménages français en fruits, exprimée en millions d'euros, de 2000 à 2007 :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Dépense en millions d'euros y_i	6396	7207	7734	7996	8332	8399	8546	8675

1. Sur la copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans un repère orthogonal :
   — sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour une unité ;
   — sur l'axe des ordonnées, on placera 6200 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 millions d'euros.
2. Un premier groupe de statisticiens réalise un ajustement affine du nuage.
   Donner une équation de la droite (d) de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à l'entier le plus proche. Tracer la droite (d) dans le repère précédent.
3. Un deuxième groupe de statisticiens réalise un ajustement non affine du nuage, en utilisant la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 6400 + 1100\ln(1 + x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer :
      — les variations de la fonction f ;
      — la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   b) Valider par une démonstration l'une des deux conjectures précédentes.
   c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère précédent.
4. Est-il raisonnable de penser que la dépense annuelle des ménages français en fruits puisse dépasser 9200 millions d'euros ? Argumenter la réponse.

EXERCICE 2 (4 points) *commun à tous les candidats*

Kevin possède un lecteur MP3, dans lequel il a stocké 90 morceaux de jazz et 110 morceaux de musique classique. Un tiers des 90 morceaux de jazz est composé par des auteurs français. Un dixième des 110 morceaux de musique classique est composé par des auteurs français.

1. Afin d'écouter un morceau de musique, Kevin lance une lecture aléatoire sur son lecteur MP3.
   On admet que cela revient à choisir un morceau de musique de manière équiprobable. On note :
   J l'évènement « le morceau de musique écouté est un morceau de jazz » ;
   C l'évènement « le morceau de musique écouté est un morceau de musique classique » ;
   F l'évènement « l'auteur du morceau de musique écouté est français ».
   a) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz ?
   b) Sachant que Kevin a écouté un morceau de jazz, quelle est la probabilité que l'auteur soit français ?
   c) Calculer la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de jazz composé par un auteur français.
   d) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit composé par un auteur français ?
2. Afin d'écouter trois morceaux de musique, Kevin lance trois fois une lecture aléatoire sur son lecteur MP3. Calculer la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de jazz.

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

Suite à une étude de marché :

— l'offre d'un produit est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$;

— la demande de ce même produit est modélisée par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces fonctions sont dessinées sur l'annexe (à rendre avec la copie). On désigne par x la quantité du produit exprimée en milliers d'unités, avec x appartenant à l'intervalle $[0;6]$. Les nombres $f(x)$ et $g(x)$ sont des prix unitaires exprimés en centaines d'euros. L'expression de la fonction f est donnée par $f(x) = 0{,}4\mathrm{e}^{0{,}4x}$.

1. On rappelle que le prix d'équilibre est le prix unitaire qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.
   a) Lire sur le graphique le prix d'équilibre p_0 (en centaines d'euros) et la quantité d'équilibre q_0 (en milliers d'unités).
   b) Estimer en euros le chiffre d'affaires réalisé par la vente de cette quantité q_0 au prix d'équilibre p_0.
2. a) Mettre en évidence, sur le graphique joint en annexe, l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Calculer cette intégrale.
   c) Certains producteurs étaient disposés à proposer un prix inférieur au prix d'équilibre. Le gain supplémentaire réalisé par ces producteurs est appelé le surplus des producteurs. Le surplus des producteurs S_p est donné par la formule suivante :

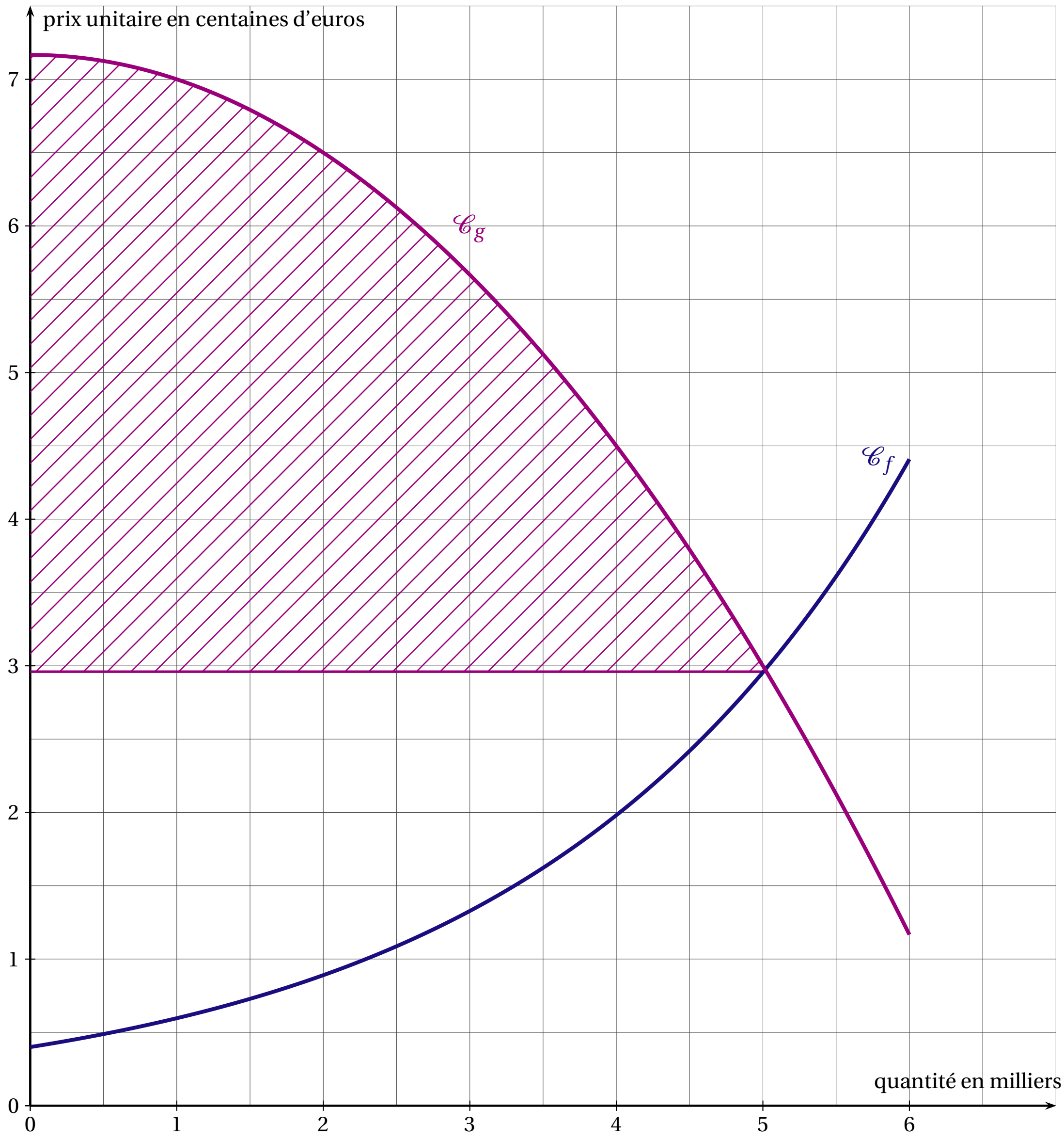
$$S_p = q_0 \times p_0 - \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Estimer ce surplus (en centaines de milliers d'euros).
3. a) Certains consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. L'économie réalisée par ces consommateurs est appelée le surplus des consommateurs. Ce surplus est représenté par la partie hachurée du graphique. Par une lecture graphique, Paul estime à moins de 10 unités d'aire cette partie, alors que Jeanne l'estime à plus de 10. Qui a raison ? Argumenter.
   b) *Dans cette question, toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.*
   Pour estimer plus précisément le surplus des consommateurs, Michel approche la courbe $\mathscr{C}_g$ par une parabole P passant par les points de coordonnées $(1;7)$ et $(5;3)$. Il a fait trois essais avec un logiciel de calcul formel, dont les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	Équation de la parabole P	Estimation du surplus des consommateurs (en centaines de milliers d'euros)
Essai 1	$y = -\dfrac{40}{21}x^2 + \dfrac{292}{21}x - 5$	54,7
Essai 2	$y = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{43}{6}$	14,11
Essai 3	$y = \dfrac{2}{21}x^2 - \dfrac{44}{21}x + 9$	8,0

   Quel essai est le plus pertinent ? Expliquer la réponse.

ANNEXE : à rendre avec la copie



EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et, en face de celui-ci, recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Dans le plan muni d'un repère, la parabole d'équation $y = x^2 - 3x - 1$ admet au point d'abscisse 3 une tangente d'équation

   - $y = -3x + 8$
   - $y = 3x$
   - $y = 3x - 10$

2. La courbe $\mathscr{H}$ représentative de la fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels par $h(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x+2}$ admet une asymptote

   • horizontale • verticale • oblique

3. La fonction k définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $k(x) = \text{e}^{1+\ln x}$

   • est croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ • est décroissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ • n'est pas monotone sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$

4. Deux baisses successives de 50 % peuvent être compensées par :

   • deux hausses successives de 50 % • une hausse de 100 % • une hausse de 300 %

5. Une zone de reforestation a été replantée de 75 % de chênes et de 25 % de charmes. On sait que 22 % des chênes et 9 % des charmes plantés sont morts la première année. Après la première année, la part des chênes encore vivants parmi les arbres encore vivants dans cette zone de reforestation est égale à :

   • 153 % • 158,5 % • 72 %

CENTRES ÉTRANGERS 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions, une seule des réponses a, b *ou* c *est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. Le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$ est égal à :

   a) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^2}$ b) $\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^2$ c) $\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)^3$

2. L'équation $\ln\left(x^2+x+1\right)=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a) Aucune solution b) Une seule solution c) Deux solutions

3. L'équation $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a) Aucune solution b) Une seule solution c) Deux solutions

4. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $x\in[1;+\infty[$, $\dfrac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.
   On peut alors affirmer que :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

5. On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que g est une primitive de la fonction f sur I. On suppose que la fonction g est croissante sur I. Alors on peut affirmer que :

   a) La fonction g est positive sur I.
   b) La fonction f est positive sur I.
   c) La fonction f est croissante sur I.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la dette en milliards d'euros de l'État français entre 1990 et 2004 :

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Dette y_i en milliards d'euros	271,7	321,4	443	540,1	613,1	683,5	773,4	872,6

Source INSEE.

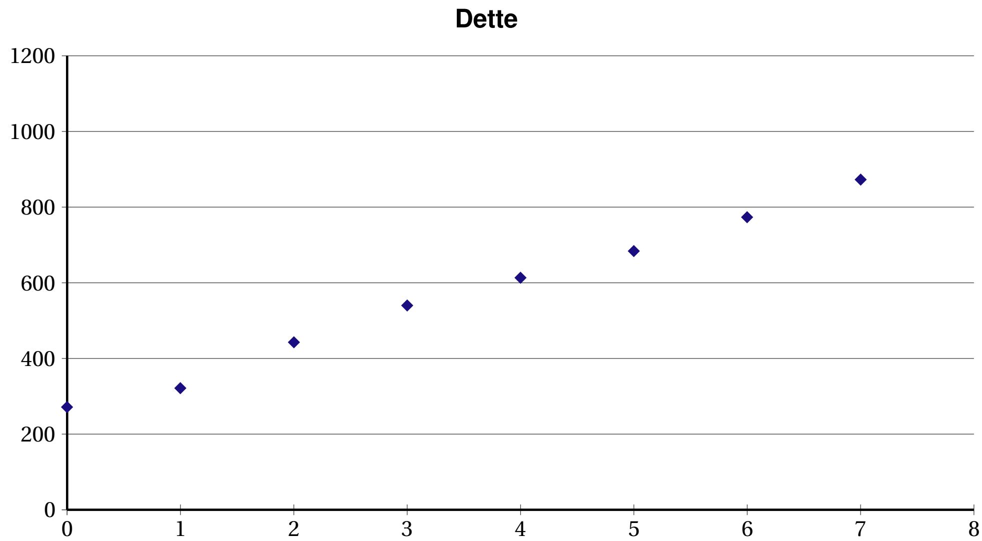
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au dixième.

PARTIE A : Étude statistique

1. Calculer la dette moyenne de l'État entre 1990 et 2004.
2. En prenant l'année 1990 comme référence (indice 100), calculer les indices correspondant à la dette de l'État de 1992 à 2004. Donner la réponse sous forme d'un tableau.
3. Déterminer le taux global d'évolution de la dette de l'État entre 1990 et 2004.
4. Déterminer le taux moyen d'évolution de la dette de l'État sur une période de deux ans.

PARTIE A : Interpolation et extrapolation de données

On donne ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.



La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

1. En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. Selon cet ajustement, à partir de quelle année peut-on estimer que l'État aurait dépassé les 1000 milliards de dette ?
3. Selon cet ajustement, déterminer l'année à partir de laquelle la dette de l'État sera le double de la dette de l'an 2000.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.
On considère les évènements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

On suppose que la probabilité de W est : $p(\mathrm{W}) = \dfrac{7}{10}$.

3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».
4. Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{W}) = \dfrac{23}{30}$. Compléter l'arbre du **2.**

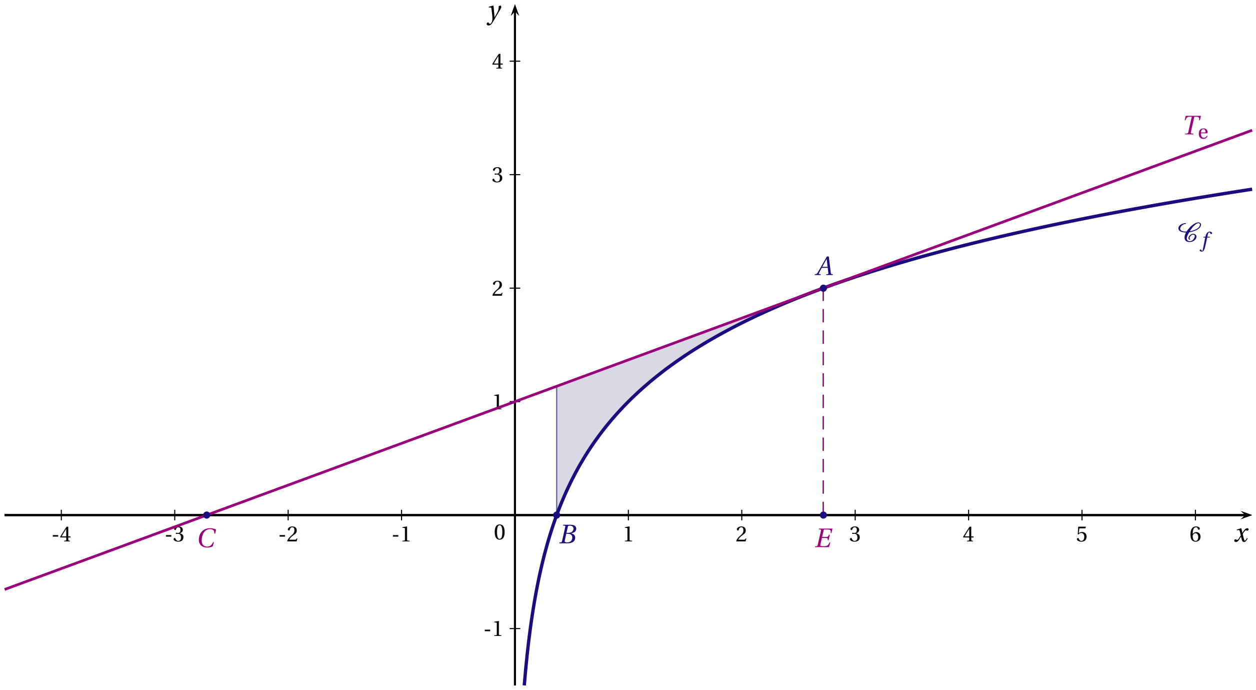
5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS?

Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

6. Déterminer la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options.
7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point $A(\mathrm{e};2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_{e} la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_{e} et de l'axe des abscisses.
Le point E a pour coordonnées $(\mathrm{e};\ 0)$.
On admettra que sur $]0;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_{e}.



1. a) Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
   Calculer les coordonnées du point B.
   b) Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x) \geqslant 0$.
2. a) Déterminer une équation de T_{e}.
   b) En déduire les coordonnées du point C.
   c) Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.
3. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.
   a) Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   b) En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} (1+\ln x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter ce nombre.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T_{e} et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique.
   Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.

FRANCE MÉTROPOLITAINE JUIN 2010

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
*Une seule réponse par question est acceptée et **aucune justification n'est demandée.***
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
***Indiquer sur la copie le numéro** de la question **et la réponse choisie.** correspondante.*

QUESTION 1

Le nombre -3 est solution de l'équation :

• $\ln x = -\ln 3$ • $\ln(e^x) = -3$ • $e^{\ln x} = -3$ • $e^x = -3$

QUESTION 2

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$ est :

• $-\infty$ • $+\infty$ • -1 • $-\dfrac{1}{4}$

QUESTION 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

• $y = x+2$ • $y = -x+4$ • $y = 3x+1$ • $y = x+3$

QUESTION 4

Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur donne 3 euros pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :

• 1 • 0 • -1 • -2

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.
Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.
Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.
Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie. On note :

- A l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'évènement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.
3. Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01 % et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

PARTIE A : Observation des données

1. Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
   - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.
2. Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009,
3. Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 *: le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de* 2,4 *% environ.*
En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points M_4, M_5, M_6, M_7 *et* M_8 *du nuage précédent.*

PARTIE B : Modélisation de la série statistique $(x_i \,;\, y_i)_{4\leqslant i\leqslant 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03\times 1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année $2005+n$, n désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1. Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
2. À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

L'annexe 1 est à rendre avec la copie

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché. Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée en milliers.
La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle $[0;35]$ par :

$$f(x)=153\mathrm{e}^{0,05x}$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.
La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle $[0;35]$ par :

$$g(x)=-116\ln(x+1)+504$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1. a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;35]$.
   b) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;35]$.
   c) Les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie.**
   Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E.
2. Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle $[0;35]$ l'équation $f(x)=g(x)$.
   Pour cela, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;35]$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.
   a) Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0;35]$.
   On pourra utiliser la question 1.
   b) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0;35]$.
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au millième.
   d) On pose $y_0=f(x_0)$. En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de y_0 au centième.
   e) Sachant que y_0 représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix ?
3. On prendra dans cette question $x_0=8{,}871$ et $y_0=238{,}41$.
   a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0;35]$.
   b) On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

   $$S=x_0\times y_0-\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel S.
   Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel S.

ANNEXE 1

Exercice 4 : commun à tous les candidats

FRANCE MÉTROPOLITAINE SEPTEMBRE 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :

— 58 % sont des femmes ;

— 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie $\mathscr{A}$ et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.
On note :

— F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;

— H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;

— A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie $\mathscr{A}$ » ;

— $\overline{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie $\mathscr{A}$ ».

Les résultats seront arrondis au millième.

1. a) Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
   Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$.
   b) Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.
   c) Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à 0,057 à 10^{-3} près.
2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie $\mathscr{A}$ est égale à 0,040 à 10^{-3} près.
3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie $\mathscr{A}$ qu'un homme ? Justifier.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Cet exercice est composé de deux parties :

— la partie I est un « vrai-faux » sans justification,

— la partie II est un questionnaire à choix multiples avec justification.

PARTIE I

Pour chacune des affirmations, recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer sans justifier si elle est vraie ou fausse.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point, une réponse fausse enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3}{x-4} = +\infty$
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty;3[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
   La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -6x+9$.
3. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$.
   Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est $\dfrac{1}{3}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
   On définit la fonction g par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$.
   On affirme que la fonction g est définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

PARTIE II

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse.
Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 *point.*
Toute trace de recherche. même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Si pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$, alors la limite en $+\infty$ de $f(x)$ est :
   - $-\infty$
   - 0
   - $+\infty$
2. $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\ln 16}$ est égal à :
   - $2\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)$
   - $\dfrac{1}{2\ln 2}$
   - $2\ln \mathrm{e} - \ln 16$
3. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$ est égale à :
   - $-\dfrac{1}{12}$
   - $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
   - $\dfrac{1}{12}$

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère les fonctions f, g et h définies et dérivables pour tout nombre réel x de l'intervalle $[4\,;6]$ par $f(x) = 100\left(\mathrm{e}^x - 45\right)$, $g(x) = 10^6\mathrm{e}^{-x}$ et $h(x) = g(x) - f(x)$.
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[4\,;6]$.

Résolution de l'équation $h(x) = 0$.

1. a) Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;6]$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction h.
   c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;6]$.
2. a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe (*les résultats seront arrondis à la centaine la plus proche*).
   b) Sur la figure fournie en annexe, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.
   c) Placer α sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la valeur exacte du nombre réel α est égale à $3\ln 5$ *où* $\ln$ *désigne la fonction logarithme népérien.*

PARTIE B : Application économique

Les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit de prix unitaire x, compris entre 4 et 6 euros :

— $f(x)$ est la quantité, exprimée en kilogrammes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire x ;

— $g(x)$ la quantité, exprimée en kilogrammes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire x.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

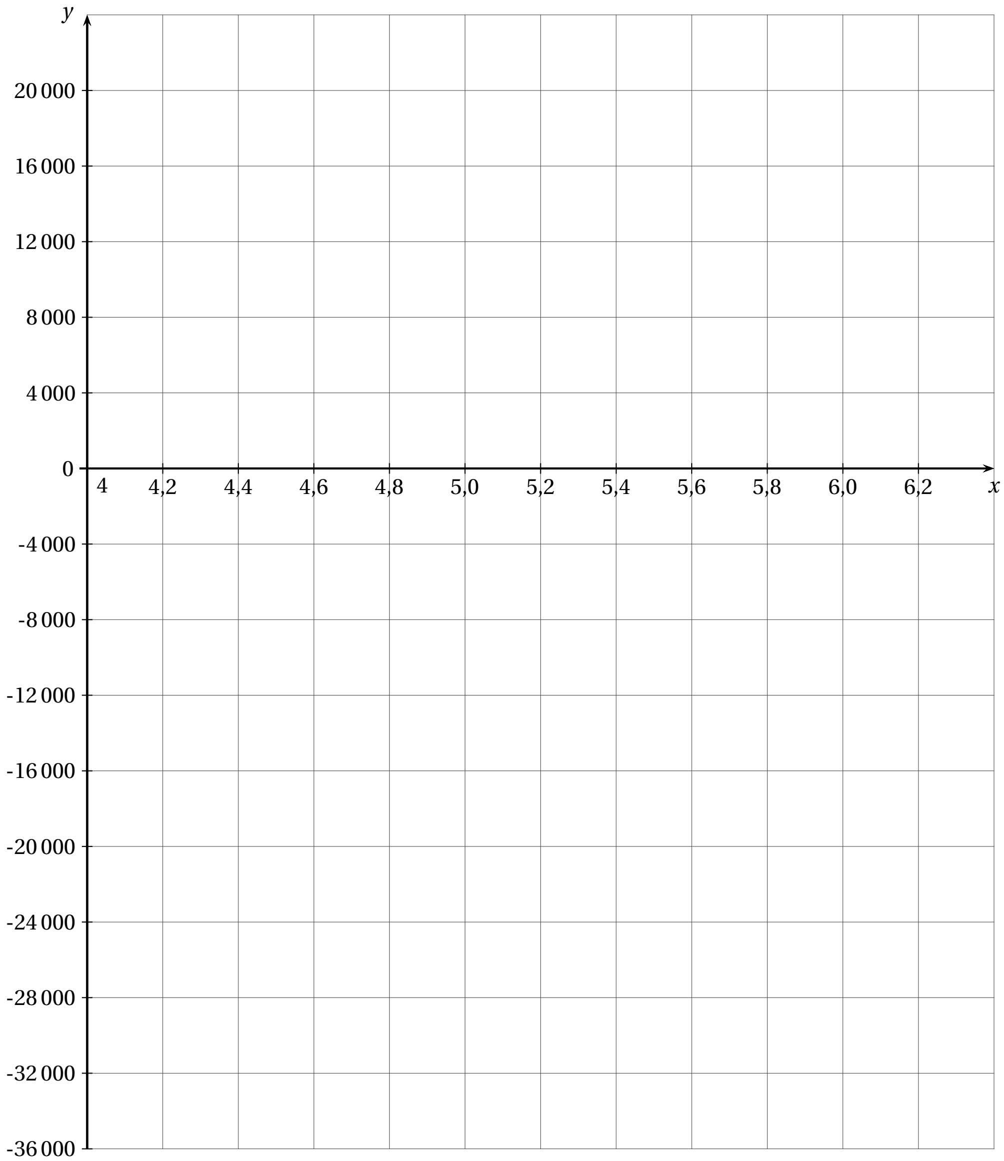
1. Quel est, exprimé au centime d'euro près, le prix unitaire d'équilibre du marché ? Justifier.
2. Quelle quantité de produit, exprimée en kilogrammes, correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Tableau à compléter

x	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
$h(x)$	17 400					-3600	-8100			-25500	-33400

Graphique à compléter



EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

L'évolution de la population de bouquetins des Alpes, dans le Parc National de la Vanoise depuis sa création, est donnée par le tableau suivant :
On note X_i l'année, l'indice i étant un nombre entier variant de 1 à 8.
On note x_i le rang de l'année par rapport à 1960 : $x_i = X_i - 1960$.
On désigne par y_i le nombre de bouquetins l'année X_i.

Année X_i	1963	1976	1986	1993	1997	1998	2003	2005
Rang de l'année x_i	3	16	26	33	37	38	43	45
Nombre de bouquetins y_i	65	500	700	1 250	1 453	1 800	2 066	2 568

(*Source : http ://www.bouquetin-des-alpes.org/populations/vanoiselvanoise.htm*)

On se place dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :

— 5 cm pour 10 années sur l'axe des abscisses,

— 1 cm pour 200 bouquetins sur l'axe des ordonnées.

On note M_i le point de coordonnées $\left(x_i ; y_i\right)$.
Ainsi M_1 a pour coordonnées (3;65) et M_3 a pour coordonnées (26 ; 700).

1. En disposant la feuille de papier millimétrée dans le sens de la longueur pour les abscisses, représenter le nuage des huit points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8.
2. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage formé par les six points M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8.
   On admet qu'un ajustement affine de ce sous-nuage est justifié et que la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés pour ce sous-nuage a pour équation $y = 92{,}6x - 1787$.
   a) Tracer cette droite D sur le graphique précédent.
   b) Estimer, avec cet ajustement affine, le nombre de bouquetins que l'on peut prévoir dans le Parc National de la Vanoise en 2010.
3. Dans cette question, on s'intéresse au nuage constitué des huit points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8.
   L'allure de ce nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel de la série.
   a) On pose $z_i = \ln y_i$.
   Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.
   b) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$, A étant arrondi à l'unité et B au centième.
   c) En utilisant cette modélisation, calculer le nombre de bouquetins que l'on peut prévoir en 2010 dans le Parc.
   d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   En utilisant cette modélisation, à partir de quelle année la population de bouquetins dépassera-t-elle 5000 unités ?

LA RÉUNION 2010

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte. Le candidat notera à chaque fois sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

Le barème sera établi comme suit :

pour une réponse exacte aux questions 1, 2, 3 et 4 : 0,5 point,

pour une réponse exacte aux questions 5 et 6 : 1 point,

pour une réponse fausse ou l'absence de réponse : 0 point.

Pour toutes les questions, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2-\frac{1}{x+1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. On a :
   - $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$
   - $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$
   - $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$
2. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation :
   - $y=2$
   - $y=-1$
   - $x=2$
3. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire :
   - $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$
   - $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$
   - $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$
4. Le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ est donné par le tableau :
   -
x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
   -
x	-1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	
   -
x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	
5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :
   - $\dfrac{3}{2}$
   - $\dfrac{1}{4}$
   - $-\dfrac{1}{2}$
6. L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, est égale à :
   - $-2+\ln 2$
   - $2-\ln 2$
   - $\dfrac{3}{2}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

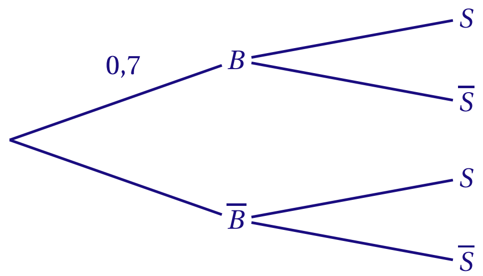
Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.

On note :

B l'évènement : « il y a un banc de poissons sur zone » et $\overline{B}$ l'évènement contraire de B,

S l'évènement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et $\overline{S}$ l'évènement contraire de S.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant. Le détail des calculs n'est pas demandé.



2. Déterminer la probabilité $p(B \cap S)$ qu'il y ait un banc de poissons sur la zone et que le sonar le détecte.
3. Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.
4. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve toujours dans l'une des trois situations suivantes :

   Situation 1 : un banc de poissons est présent sur la zone et le sonar le détecte. Le filet est lancé et la pêche est fructueuse. Dans ce cas le pêcheur gagne 2000 euros.

   Situation 2 : il n'y a pas de banc de poissons sur zone mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas le pêcheur perd 500 euros.

   Situation 3 : le sonar ne détecte aucun banc de poisson (qu'il y en ait ou pas). Le filet n'est pas lancé et le bateau rentre au port à vide. Dans ce cas le pêcheur perd 300 euros.

   a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du « gain » (positif ou négatif) réalisé.

Gain : x_i	2000	-500	-300
Probabilité : p_i			

   b) Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?

5. Le pêcheur prévoit d'effectuer trois sorties successives sur la zone de pêche. Déterminer la probabilité que, pour les trois sorties, le sonar reste muet, c'est-à-dire n'indique pas la présence d'un banc de poissons.
   On donnera la valeur approchée arrondie au millième de ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

L'Organisation des Nations Unies (ONU) a établi en 2008 des statistiques et des prévisions sur la population mondiale.
Le tableau suivant donne la population recensée par l'ONU. (*La population en* 2010 *est considérée par l'ONU comme très proche de la réalité compte tenu de la date à laquelle l'étude a été effectuée.*)

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population (en millions de personnes) : y_i	2529	3023	3686	4438	5290	6115	6908

1. a) Calculer l'augmentation de population entre les années 1950 et 1960, puis entre les années 1970 et 1980, puis entre les années 1990 et 2000.
   Un ajustement affine est-il pertinent ?

   b) Calculer le pourcentage d'augmentation de la population mondiale entre les années 1990 et 2000. On donnera la valeur arrondie à 0,1 % près.
2. On envisage un ajustement exponentiel.

a) Pour chaque année x_i, calculer $\ln y_i$ et compléter le tableau suivant avec les valeurs approchées arrondies à 0,01 près.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

b) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; z_i)$ sur la feuille donnée en annexe 1.

3. a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Aucune justification n'est demandée, les calculs seront effectués avec la calculatrice et les coefficients arrondis au millième.

   b) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique de la question 2.

4. Déduire de l'ajustement précédent l'expression de la population y donnée en fonction du rang x de l'année, sous la forme : $y = Ae^{Bx}$ où A et B sont des nombres réels à déterminer.

   On arrondira A à l'unité et B au millième.

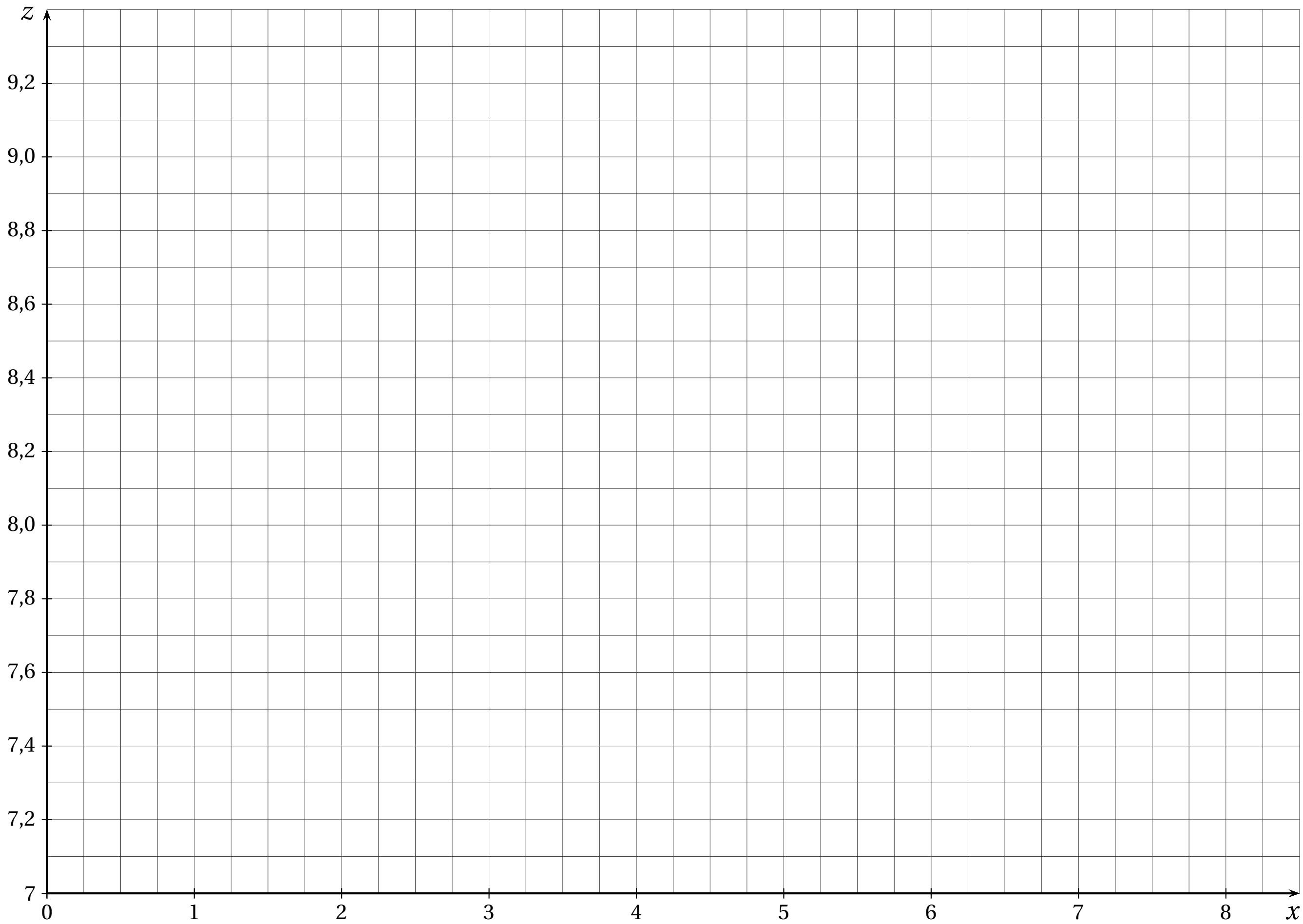
5. On suppose que $y = 2180e^{0,171x}$. Quelle estimation peut-on alors donner pour la population mondiale en 2030 ?

   On donnera les valeurs approchées arrondies au million près.

ANNEXE 1

Exercice 3 (commun à tous les candidats)

Représentation du nuage de points $M_i(x_i ; z_i)$.



EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.
L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$$

où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. a) On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$.

   Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0;5]$.

   Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$ est donnée en annexe 2.

   a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $F(x) = (-2-2x)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.

   b) Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.

   On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à 0,01 ppm près.

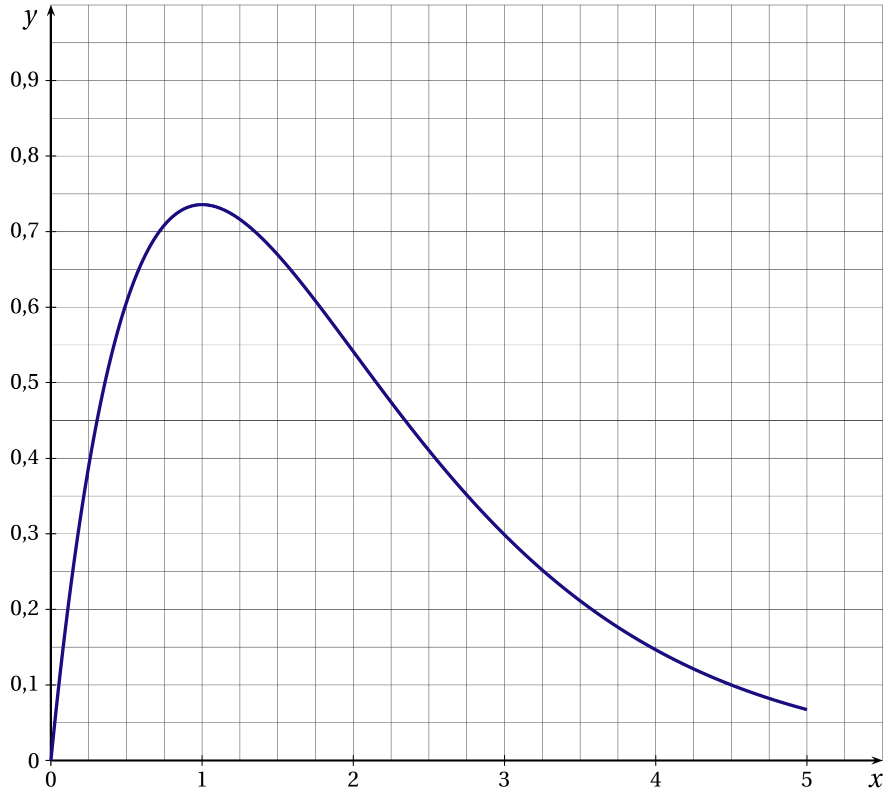
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

ANNEXE 2

Exercice 4 (commun à tous les candidats)

Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$.



LIBAN 2010

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif la note est ramenée à* 0.

1. A et B sont deux évènements indépendants et on sait que $p(A) = 0{,}5$ et $p(B) = 0{,}2$.
   La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est égale à :

   Réponse A : 0,1 Réponse B : 0,7
   Réponse C : 0,6 Réponse D : on ne peut pas savoir

2. Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50 % des cahiers ont une reliure spirale et que 75 % des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40 % ont une reliure spirale.
   Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

   Réponse A : 0,3 Réponse B : 0,5
   Réponse C : 0,6 Réponse D : 0,75

   Dans les questions 3. et 4., on suppose que dans ce magasin, un autre bac contient une grande quantité de stylos-feutres en promotion. On sait que 25 % de ces stylos-feutres sont verts. Albert prélève au hasard et de manière indépendante 3 stylos-feutres.

3. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne au moins un stylo-feutre vert est égale à :

   Réponse A : 0,250 Réponse B : 0,422
   Réponse C : 0,578 Réponse D : 0,984

4. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'il prenne exactement 2 stylos-feutres verts est égale à :

   Réponse A : 0,047 Réponse B : 0,063
   Réponse C : 0,141 Réponse D : 0,500

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + k\mathrm{e}^{ax}$ où k et a sont des nombres fixés.
Sur la figure donnée en annexe, la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction g et la droite D d'équation $y = x$ sont tracées dans un repère orthogonal (unités : 2 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées).
Le point E a pour coordonnées $(0;6)$ et le point F a pour coordonnées $(3;0)$. On précise que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point E et la courbe $\mathscr{C}$ admet au point B une tangente horizontale.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

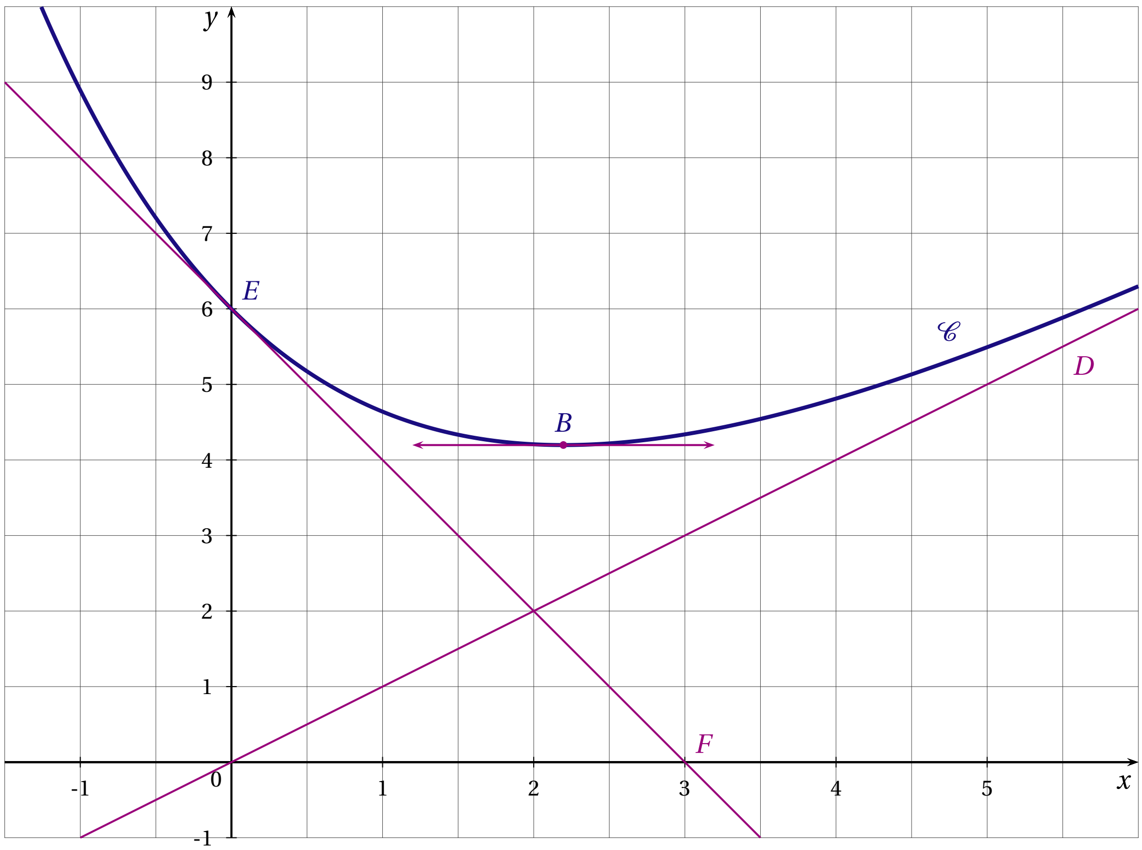
1. a) Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g(0)$.
   b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de $g'(0)$.
   c) Exprimer $g'(x)$ en fonction de a et k.
   d) En utilisant les résultats précédents, déterminer les valeurs de k et a. On justifiera les calculs.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $g(x) = x + 6\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

2. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est située au dessus de la droite D. Soit S le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 4$.
   a) Hachurer S sur le graphique.
   b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine S. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0,1cm^2 près.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point B.

ANNEXE



EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0;20]$ par $f(x) = \left(3\mathrm{e}^2 - x\right)\ln x + 10$.

1. a) Déterminer la limite de f en 0.
   b) Calculer la valeur exacte de $f\left(\mathrm{e}^2\right)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Montrer que, pour tout x de $]0;20]$, $f'(x) = -\ln x + \dfrac{3\mathrm{e}^2}{x} - 1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $]0;20]$ et que son tableau de variations est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(20)$

a) À l'aide du tableau de variations, donner le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;20]$.

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;20]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

4. a) Montrer que, sur l'intervalle $[0,6;0,7]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.

b) Démontrer que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in]0;\alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in]\alpha;20]$.

PARTIE B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à $]0;20]$.
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie A.
En utilisant les résultats de la partie A :

1. déterminer le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif;
2. déterminer le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. L'évolution du chiffre d'affaires du groupe de distribution Enville pour la période 2004-2008 est donnée dans le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1 :

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Progression du chiffre d'affaires par rapport à l'année précédente	4,7 %	10,6 %	4,1 %	5,8 %	7,5 %

Par exemple, le chiffre d'affaires du groupe a augmenté de 10,6 % entre le 31 décembre 2004 et le 31 décembre 2005.

a) Montrer qu'une valeur approchée à 0,1 près du pourcentage annuel moyen d'augmentation, est 6,5.

b) En 2008, ce groupe a réalisé un chiffre d'affaires de 59,5 milliards d'euros. La direction prévoit une croissance annuelle de 6,5 % pour les années suivantes. Donner une estimation à 0,1 milliard d'euros près du chiffre d'affaires du groupe pour l'année 2010.

2. L'évolution, sur 8 ans, du chiffre d'affaires du groupe Aupré, concurrent du groupe Enville, est donnée par le tableau 2 ci-dessous :

Tableau 2 :

Année	2001	2003	2005	2007	2008
Rang de l'année x_i	1	3	5	7	8
Chiffre d'affaires exprimé en milliards d'euros y_i	64,8	68,7	72,7	77,1	82,1

Pour cette question tous les résultats seront arrondis au dixième près.

a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$ en prenant comme origine le point de coordonnées $(0;60)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

b) En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x. Tracer cette droite sur le graphique.

c) À l'aide de l'ajustement précédent, déterminer graphiquement une estimation du chiffre d'affaires du groupe Aupré pour l'année 2010. On laissera apparents les traits de construction.

3. Dans cette question, on suppose qu'à partir de 2008 le chiffre d'affaires du groupe Enville progresse chaque année de 6,5 % et celui du groupe Aupré de 3 %.

a) Résoudre l'inéquation $59{,}5 \times 1{,}065^n > 82{,}1 \times 1{,}03^n$.

b) Déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires du groupe Enville dépassera celui du groupe Aupré.

NOUVELLE CALÉDONIE 2010

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe 2 qui sera rendu avec la copie.
   On souhaite tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

   — La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.

   — Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.

   — Le minimum de la fonction f est 1.

   — La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.
   On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

   — Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

   a) Compléter le tableau de variations de la fonction f, fourni en annexe 1. On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.

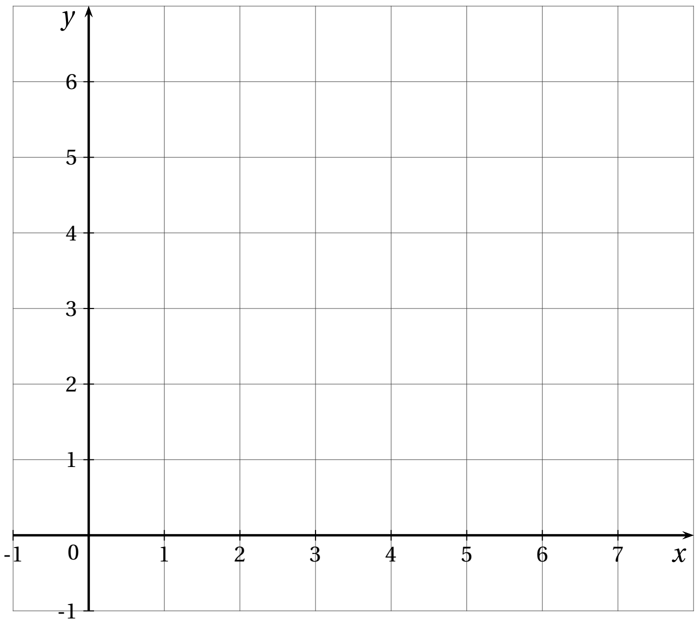
ANNEXE 1

x	0		4		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f					

   b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 6.

   c) Tracer dans le repère fourni en annexe 2 la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.
   On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

ANNEXE 2



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.

   On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

   a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;6]$.

   Compléter le tableau de variation de la fonction g fourni en annexe 3.

   On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

ANNEXE 3

x	0	4	6
variations de g			

   b) Déterminer $g'(0)$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau ci-dessous donne la répartition des contributions au financement des soins et des biens médicaux sur la période 2004-2008. Les valeurs sont données en pourcentage.

Année	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Sécurité sociale et autres financements	91,7	91,6	91,1	91	90,6
Ménages y_i	8,3	8,4	8,9	9,0	9,4
Total	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Source : DREES, Comptes de la santé. ÉTUDES et RÉSULTATS n° 701 - septembre 2009

Par exemple en 2004, la contribution de la sécurité sociale et des autres organismes financeurs s'est élevée à 91,7 % du financement des soins et des biens médicaux et les ménages ont financé 8,3 % de ces soins et biens médicaux.

PARTIE A : Étude en pourcentages

y_i désigne la part en pourcentage financée par les ménages lors de l'année de rang x_i.

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4.
   On placera l'origine du repère à 0 en abscisse et 8 en ordonnée. On prendra pour unités : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 5 cm pour 1 % en ordonnées.
2. La forme du nuage de points permet de considérer qu'un ajustement affine est justifié.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b) Représenter la droite D dans le repère précédent.
3. On suppose que l'évolution constatée sur la période 2004-2008 se poursuit en 2009 et en 2010. Justifier par un calcul qu'avec cet ajustement affine, on peut prévoir une part des ménages dans le financement des soins et des biens médicaux de 9,92 % en 2010.

PARTIE B : Étude en valeurs

1. La dépense de soins et de biens médicaux était de 140 milliards d'euros en 2004.
   Calculer la somme versée par les ménages pour financer les soins et les biens médicaux en 2004.
2. La dépense de soins et de biens médicaux était de 170,5 milliards d'euros en 2008. On fait l'hypothèse d'une croissance de la dépense de soins et de biens médicaux de 3 % en 2009 et à nouveau de 3 % en 2010.
   a) Déterminer la dépense de soins et de biens médicaux en 2010. (On arrondira le résultat au milliard d'euros.)
   b) Quelle somme versée par les ménages pour le financement des soins et des biens médicaux peut-on prévoir pour l'année 2010 ? (On arrondira le résultat au milliard d'euros.)

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Une université fait passer un test à ses étudiants. A l'issue du test chaque étudiant est classé dans l'un des trois profils A, B et C définis ci-dessous.

50 % des étudiants ont le profil A : ils mémorisent mieux une information qu'ils voient (image, diagramme, courbe, film ...).

20 % des étudiants ont le profil B : ils mémorisent mieux une information qu'ils entendent.

30 % des étudiants ont le profil C : ils mémorisent aussi bien l'information dans les deux situations.

À la fin de la session d'examen de janvier on constate que :

70 % des étudiants ayant le profil A ont une note supérieure ou égale à 10 ;

75 % des étudiants ayant le profil B ont une note supérieure ou égale à 10 ;

85 % des étudiants ayant le profil C ont une note supérieure ou égale à 10.

On choisit de manière aléatoire un étudiant de cette université. On note :

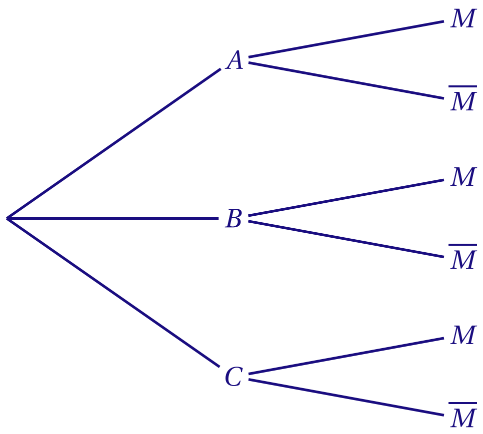
A l'évènement « l'étudiant a le profil A » ;

B l'évènement « l'étudiant a le profil B » ;

C l'évènement « l'étudiant a le profil C » ;

M l'évènement « l'étudiant a une note supérieure ou égale à 10 » et $\overline{M}$ l'évènement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondie au millième.

2. Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit de profil C et qu'il ait obtenu une note supérieure ou égale à 10.
3. Démontrer $P(M) = 0{,}755$.
4. Calculer la probabilité que l'étudiant soit de profil B sachant qu'il a obtenu une note strictement inférieure à 10.
5. On choisit quatre étudiants au hasard. On admet que le nombre d'étudiants est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à quatre tirages successifs indépendants avec remise.
   Calculer la probabilité qu'exactement trois de ces étudiants soient du profil C.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}$.

1. Étudier les variations de g sur $[1;+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[1;+\infty[$.
3. En déduire que $g(x) > 0$ si, et seulement si, $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2(\ln x - 1) + 2$.

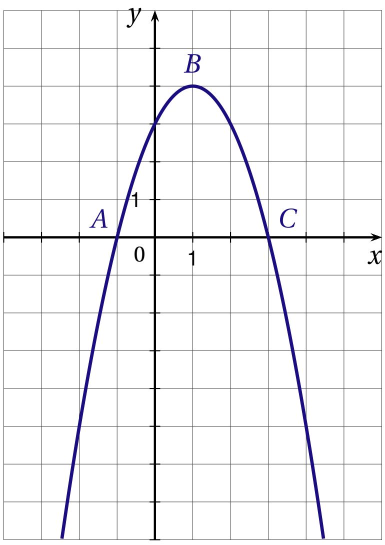
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, $f'(x) = 4xg(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. a) Montrer que, dans l'intervalle $[2;3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

POLYNÉSIE 2010

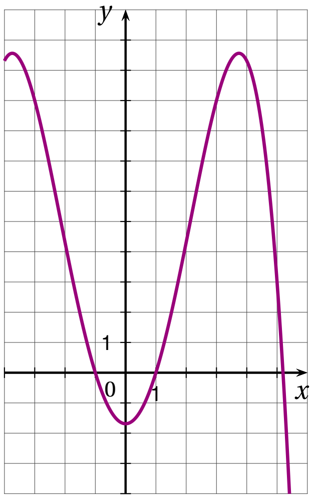
EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

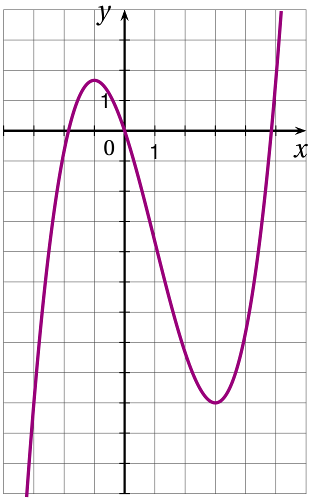
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4;6]$ dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.
   Les points $A(-1;0)$, $B(1;4)$, et $C(3;0)$ appartiennent à la représentation graphique de f.



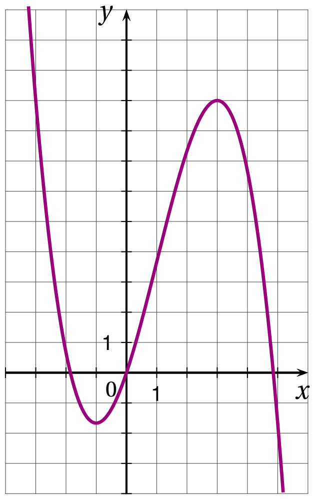
   Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

2. Une primitive de la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x$ est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
   - $G(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$
   - $G(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$
   - $G(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$
3. La fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $h(x) = 0{,}8^x$ est égale à la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :
   - $k(x) = \mathrm{e}^{x\ln(0,8)}$
   - $k(x) = \mathrm{e}^{0,8\ln(x)}$
   - $k(x) = 0{,}8\mathrm{e}^x$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Dans le service informatique d'une société, chaque informaticien a le choix entre deux logiciels de gestion : d'une part le logiciel Bestmath, leader du marché, et d'autre part le logiciel Aurora, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.
Lors de l'enquête de janvier 2009, la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora est 0,32.
Lors de l'enquête suivante en janvier 2010, il a été constaté que 20 % des utilisateurs d'Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs de Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

On interroge un informaticien au hasard et on définit les évènements suivants :

— A_1 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la première année » ;

— B_1 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la première année » ;

— A_2 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la deuxième année » ;

— B_2 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la deuxième année ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un informaticien utilise le logiciel Bestmath la première et la deuxième année.
3. Vérifier que la probabilité de l'évènement B_2 est $p(B_2) = 0{,}574$.
4. Calculer la probabilité qu'un informaticien ait utilisé le logiciel Bestmath la première année, sachant qu'il l'utilise la deuxième année (on donnera le résultat arrondi au millième).
5. On interroge au hasard et de façon indépendante trois informaticiens du service.
   a) Calculer la probabilité qu'au moins un des trois informaticiens ait utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près).
   b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois informaticiens aient utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans le cadre de son action en faveur du développement durable, le conseil Régional d'une région A de France métropolitaine rassemble et analyse des données sur la circulation des déchets valorisables par le recyclage. Depuis 2000, le ministère de l'Environnement fournit des données statistiques sur les quantités de déchets exportés de la région A en vue de leur valorisation.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Déchets exportés y_i (en tonnes) $1 \leqslant i \leqslant 7$	797	816	1140	1921	2199	3165	4195

Source : Ministère de l'Environnement (MEEDDAT)

1. Sur la feuille de papier millimétré jointe, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 7)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 200 tonnes sur l'axe des ordonnées.
2. On considère qu'un ajustement exponentiel est adapté à l'analyse. Pour $1 \leqslant i \leqslant 7$ on pose alors $z_i = \ln y_i$.

a) Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter avec les valeurs de z_i arrondies au centième :

Rang x_i de l'année $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i \quad 1 \leqslant i \leqslant 7$							

b) À l'aide de la calculatrice, et en utilisant les données du tableau ci-dessus, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$ (les coefficients seront arrondis au millième).

c) En déduire une approximation de la quantité de déchets exportés y_i, exprimée en tonnes, en fonction du rang de l'année x sous la forme

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

où le coefficient α est arrondi à l'unité et le coefficient β est arrondi au centième.

3. Selon cet ajustement, quelle quantité de déchets, arrondie à une centaine de tonnes, peut être exportée de la région A en vue d'une valorisation à l'horizon 2011 ?

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;10]$; on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$,

$$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$$

3. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;10]$.
   b) Déterminer les variations de la fonction f sur $[0;10]$.
   c) Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction f sur $[0;10]$.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5;10]$ une solution unique x_0.
   b) Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut à 10^{-1} de x_0.
5. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $[0;10]$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{-1}{12}x^3 + x^2 - (4,75 + 3\ln 2)x + 3(x+1)\ln(x+1)$$

   Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de $\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ est 2,8.

PARTIE B

À l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.
On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10.
Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur $[0;10]$ par :

$$f(x) = -0,25x^2 + 2x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2$$

Déduire de la PARTIE A les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

1. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
2. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).
3. Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10 000 guirlandes ?

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Un nom de domaine, sur Internet, est constitué de deux éléments :

— un nom (celui d'une société, d'une marque, d'une association, d'un particulier. ..) ;

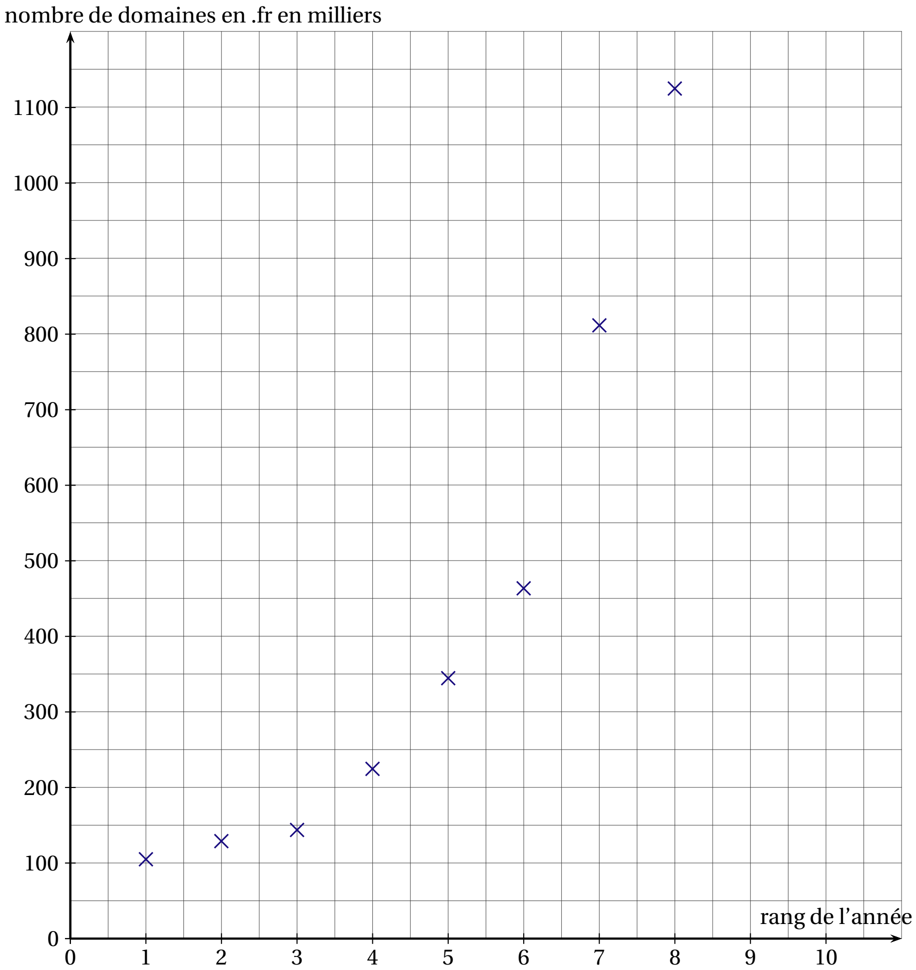
— une extension (appelée aussi suffixe) : .fr, .de, .ca, .jp, .net, .com, .org, etc.

Le tableau ci-dessous donne, en milliers, le nombre de domaines en « .fr »gérés par l'AFNIC (*Association Française pour le Nommage Internet en Coopération*), organisme qui centralise les noms de domaine Internet, pour les mois de juin des années 2001 à 2008 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang x_i de l'année $1 \leqslant i \leqslant 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre y_i des domaines en « .fr », en milliers, $1 \leqslant i \leqslant 8$	105,045	128,927	143,741	224,452	344,465	463,729	811,674	1125,161

(*Source : AFNIC, 2009*)

Le nuage de points associé à cette série statistique est donné ci-dessous.



1. Calculer, en pourcentage, l'augmentation du nombre de domaines en « .fr »entre juin 2001 et juin 2002, arrondi à 1 %.
2. a) Expliquer pourquoi un ajustement affine de y en x ne semble pas justifié.

   On cherche alors un ajustement exponentiel.

b) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 8$, on pose $z_i = \ln y_i$.
Recopier sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs de z_i arrondies au centième :

Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$ $1 \leqslant i \leqslant 8$								

c) À l'aide de la calculatrice et en utilisant les données du tableau précédent, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ (les coefficients seront arrondis au centième).

d) En déduire que $y = 60{,}34\mathrm{e}^{0{,}35x}$ où les coefficients sont arrondis au centième, est un ajustement exponentiel possible.

3. a) En utilisant le modèle trouvé à la question 2. d., quel est le nombre estimé de domaines en « .fr »en juin 2009 ? (le résultat sera arrondi au millier).

b) Si l'erreur commise en utilisant le modèle proposé est inférieure à 1 %, on considère que le modèle est pertinent.
En réalité, le relevé de juin 2009 de l'AFNIC indiquait 1 412 652 domaines en « .fr ». Le modèle proposé est-il pertinent ?

4. a) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $60{,}34\mathrm{e}^{0{,}35x} \geqslant 10000$ (le résultat sera arrondi au dixième).

b) En déduire, en utilisant le modèle trouvé à la question 2. d., à partir du mois de juin de quelle année le nombre de « domaines en .fr » dépassera 10 millions.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

« Un geste qui sauve : en France, chaque année, 55 000 personnes sont victimes d'un accident cardio-vasculaire. Sept fois sur dix, ces accidents surviennent devant témoin. » (*Source : TNS / Fédération Française de Cardiologie, 2009*).
En 2009, environ 36 % de la population française a appris à accomplir les gestes qui sauvent.

PARTIE 1

Lors d'un accident cardio-vasculaire devant témoins, on admet que la proportion de témoins formés aux gestes qui sauvent suit la proportion nationale.
La probabilité qu'un accident cardio-vasculaire se produise devant un témoin formé aux gestes qui sauvent est de 0,25.
Lorsque l'accident cardio-vasculaire s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent, la probabilité que le malade survive est 0,1.
Sinon, la probabilité que le malade survive est de 0,007.

On appelle T l'évènement : « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent ».
On appelle S l'évènement : « Le malade survit à l'arrêt cardiaque ».
On appelle $\overline{T}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires à T et à S.

RAPPEL DE NOTATION : Si A et B sont deux évènements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré. Les résultats seront arrondis au centième.

1. Déterminer, d'après l'énoncé, $p(T)$, $p_T(S)$ et $p_{\overline{T}}(S)$.
2. En déduire $p(T \cap S)$.
3. Vérifier que la valeur arrondie au centième de $p(S)$ est 0,03.
4. Interpréter ces deux derniers résultats.

5. Justifier que le nombre de victimes d'accidents cardiaques survivant à cet accident peut s'estimer à environ 1 650.

PARTIE 2

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En 2015 tous les lieux publics (stades, centres commerciaux, ...) seront équipés en défibrillateurs. Par ailleurs, un sondage montre qu'environ 71 % de la population souhaite se former à accomplir les gestes qui sauvent. Si ce taux de formation est atteint :

— la probabilité que l'accident cardiaque survienne devant un témoin formé aux gestes qui sauvent serait de 0,5;

— la probabilité de survie en cas d'intervention d'un témoin formé aux gestes qui sauvent serait augmentée à 0,25, et 0,046 sinon.

Déterminer combien de vies supplémentaires pourraient être sauvées si ces conditions étaient satisfaites.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	2		3		10		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

1. À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes. *Aucune justification n'est demandée.*
   a) Quelles sont les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition?
   Interpréter graphiquement les résultats.
   b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
   c) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   a) Calculer $g(5)$.
   b) Calculer la limite de la fonction g en 2.
   c) Déterminer le sens de variations de g sur l'intervalle $[3;10]$, en justifiant la réponse.
   d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 5.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ par :

$$f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x+1)$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal, donnée en annexe.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;4]$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
3. Montrer que sur l'intervalle $[0;4]$, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;4]$.
4. On définit la fonction F dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ par :

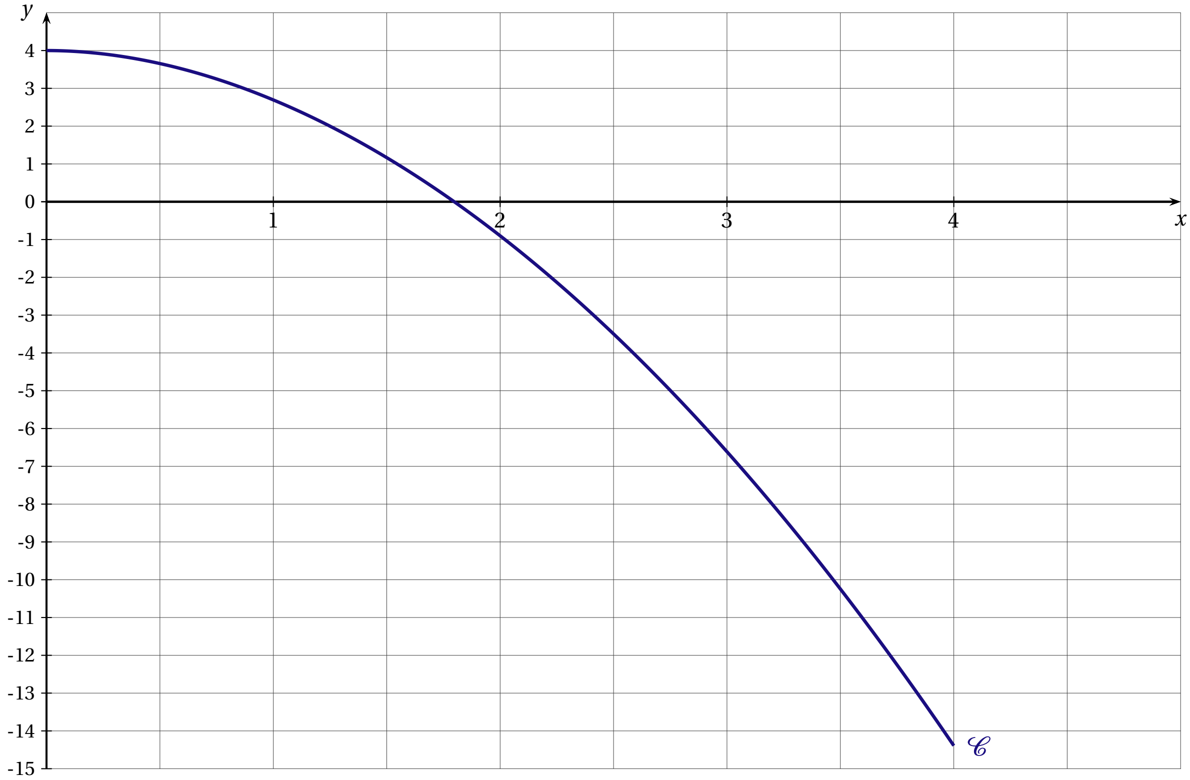
   $$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + (x+1)\ln(x+1).$$

   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
5. Soit $\mathscr{A}$ l' aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur la figure fournie en annexe.
   b) Par lecture graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\mathscr{A}$.
   c) Calculer la valeur exacte en unités d'aire de $\mathscr{A}$. Vérifier la cohérence de vos résultats.

ANNEXE

À rendre avec la copie

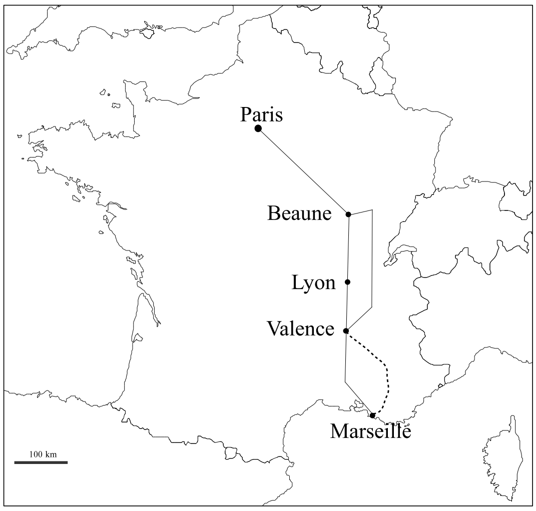
Courbe représentative de la fonction f.



PONDICHÉRY 2010

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Lors des journées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée.
Il est donc conseillé de prendre un itinéraire de délestage entre Beaune et Valence (qui ne passe pas par Lyon) afin d'éviter les éventuels « bouchons » autoroutiers.
Entre Valence et Marseille il est également conseillé de prendre la route départementale représentée par des pointillés sur la carte.
Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet entre Paris et Marseille lors de ces journées « rouges ».



Il s'avère que :

— 40 % des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence ;

— parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30 % prennent la route départementale de Valence à Marseille ;

— parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60 % prennent la route départementale de Valence à Marseille.

On note :
B l'évènement « l'automobiliste prend l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence » et $\overline{B}$ l'évènement contraire ;
V l'évènement « l'automobiliste prend la route départementale entre Valence et Marseille » et $\overline{V}$ l'évènement contraire.

1. a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b) Montrer que la probabilité de l'évènement $\overline{B} \cap \overline{V}$ est $p\left(\overline{B} \cap \overline{V}\right) = 0{,}24$ et interpréter ce résultat.

   c) Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille.

2. On donne les temps de parcours suivants :

   Paris – Beaune (par autoroute) : 4 heures ;

   Beaune – Valence (par autoroute, en passant par Lyon) : 5 heures ;

   Beaune – Valence (par itinéraire de délestage, en ne passant pas par Lyon) : 4 heures ;

   Valence – Marseille (par autoroute) : 5 heures ;

   Valence – Marseille (par la route départementale) : 3 heures.

   a) Calculer les temps de parcours entre Paris et Marseille, selon l'itinéraire choisi.
   Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la durée du trajet pour se rendre de Paris à Marseille selon l'itinéraire choisi.

Temps en heures	11			14
Probabilité				0,24

   b) Calculer l'espérance de cette loi en heures et en donner une interprétation (la conversion en heure minute seconde n'est pas attendue).

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes

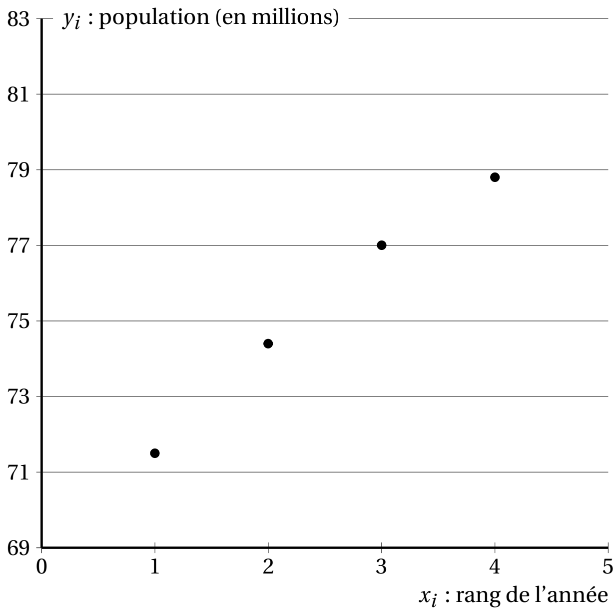
PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par période de cinq ans, de la population globale des deux Allemagnes (R. F. A. et R. D. A.) de 1958 à 1973.

Année	1958	1963	1968	1973
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 4$	1	2	3	4
Population des deux Allemagnes y_i en millions d'habitants $1 \leqslant i \leqslant 4$	71,5	74,4	77	78,8

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.

1. Déterminer, en utilisant une calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
2. En 1993, la population globale de l'Allemagne réunifiée s'élevait à 81 millions d'habitants.
   L'ajustement proposé est-il adapté ?

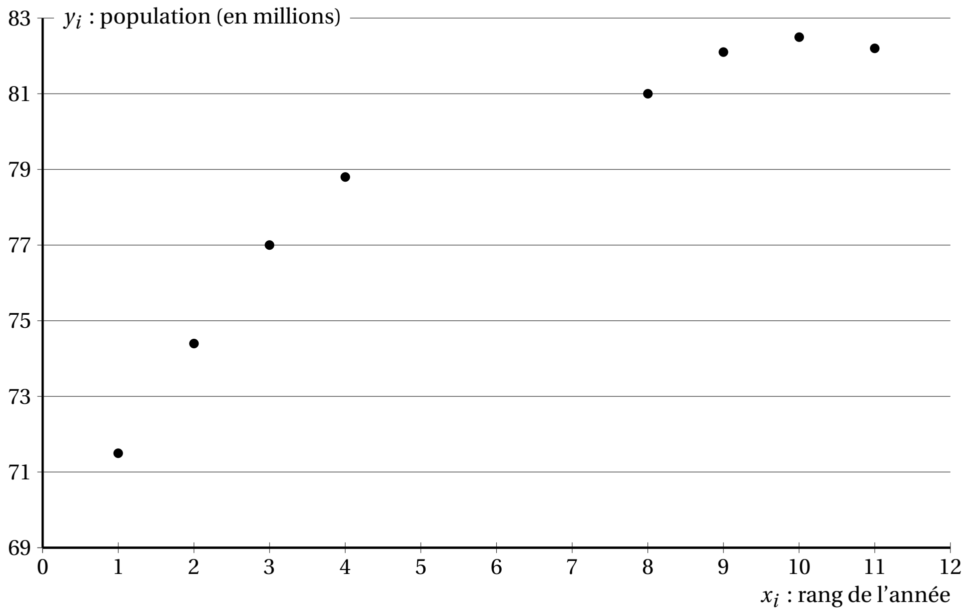
PARTIE B

On étudie ci-dessous l'évolution de la population de l'Allemagne sur une période plus étendue (à partir de 1990, il s'agit de la population de l'Allemagne réunifiée).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année x_i, $1 \leqslant i \leqslant 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
Population de l'Allemagne y_i en millions d'habitants $1 \leqslant i \leqslant 11$	71,5	74,4	77	78,8	81	82,1	82,5	82,2

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



Au vu de l'allure du nuage, un ajustement logarithmique semble plus approprié.

Pour cela on pose $z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{100}}$, pour $1 \leqslant i \leqslant 11$.

1. Recopier sur la copie et compléter la dernière ligne du tableau ci-dessous (les résultats seront arrondis au centième).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année x_i, $1 \leqslant i \leqslant 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
$z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$ (arrondi au centième) $1 \leqslant i \leqslant 11$								

2. En déduire, en utilisant la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b seront arrondis au centième.
3. En déduire que l'ajustement logarithmique recherché est donné par l'équation $y = 100\ln(0,02x + 2,07)$.
4. À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation de la population de l'Allemagne en 2013.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4}{1 - \mathrm{e}^{-0,039x}}$.

1. Calculer la limite de $A(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction A est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et on note A' sa fonction dérivée sur cet intervalle.

   Montrer que, pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$ on a $A'(x) = \dfrac{-0,156\mathrm{e}^{-0,039x}}{\left(1 - \mathrm{e}^{-0,039x}\right)^2}$.
3. Justifier que $A'(x) < 0$ pour tout x appartenant à $[1 ; +\infty[$.

   Dresser le tableau de variations de A sur $[1 ; +\infty[$.

PARTIE B

Un particulier souhaite réaliser auprès d'une banque un emprunt d'un montant de 100 000 € à un taux annuel fixé.
On admet que, si l'on réalise cet emprunt sur une durée de n années ($n \geqslant 1$), le montant d'une annuité (somme à rembourser chaque année, pendant n ans) est donné en milliers d'euros par

$$A(n) = \frac{4}{1 - \mathrm{e}^{-0,039n}}$$

Pour un emprunt fait sur n années ($n \geqslant 1$), on note :
$S(n)$ le montant total payé à la banque au bout des n années (en milliers d'euros) ;
$I(n)$ le total des intérêts payés à la banque au bout des n années (en milliers d'euros).

Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats arrondis au millième.

1. Calculer $A(1)$, $A(10)$ et $A(20)$ et interpréter ces résultats.
2. Démontrer que $I(n) = \dfrac{4n}{1 - \mathrm{e}^{-0,039n}} - 100$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant sur votre feuille.

Durée de l'emprunt n	10 ans	15 ans	20 ans
Montant d'une annuité $A(n)$			
Montant $S(n)$ des n annuités payées à la banque			
Intérêts $I(n)$ versés à la banque			

4. Pour faciliter l'étude des valeurs de $A(n)$, $S(n)$ et $I(n)$, on utilise les fonctions A, S et I définies sur $[1;20]$ par :

$$A(x) = \frac{4}{1 - \mathrm{e}^{-0,039x}} \quad ; \quad S(x) = \frac{4x}{1 - \mathrm{e}^{-0,039x}} \quad ; \quad I(x) = \frac{4x}{1 - \mathrm{e}^{-0,039x}} - 100.$$

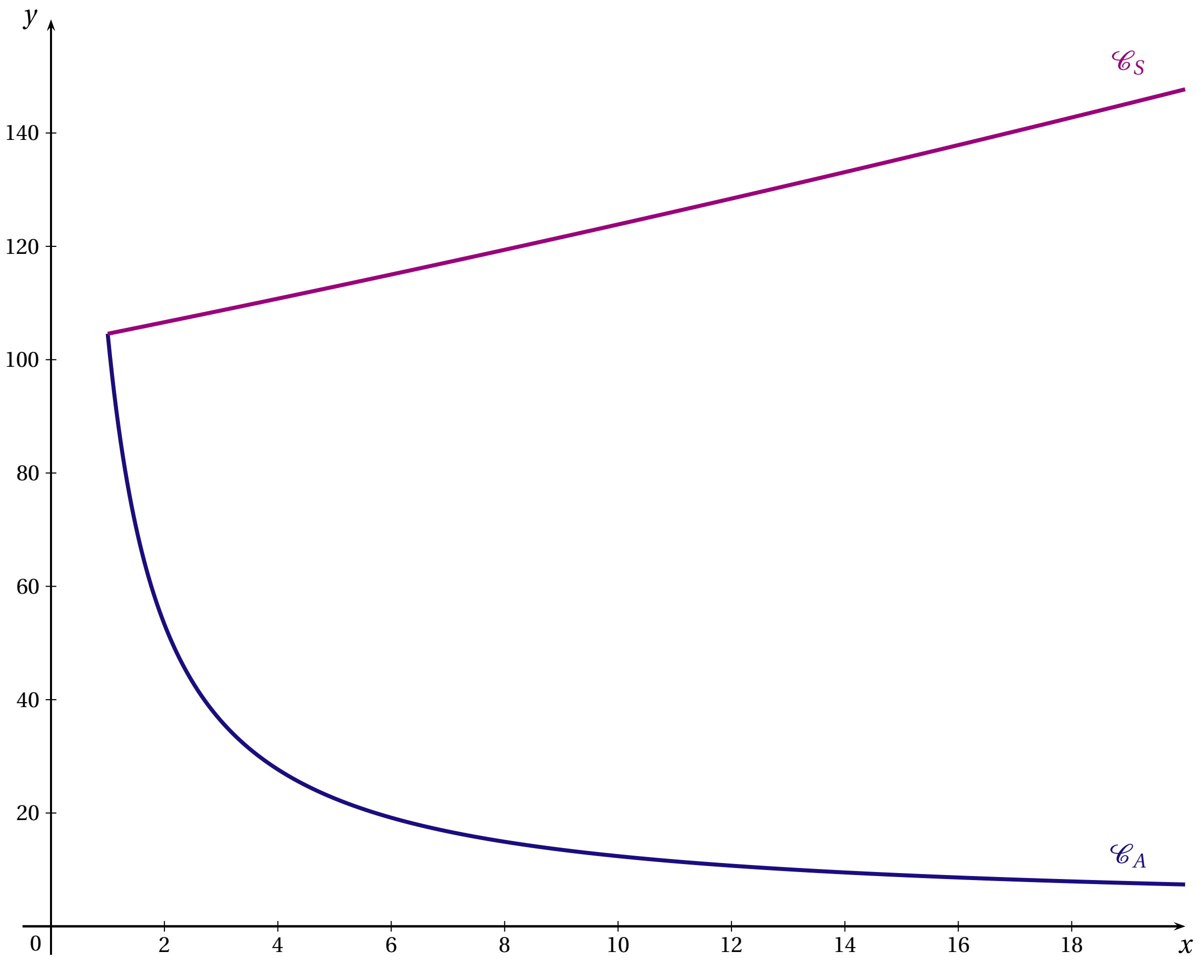
On a représenté respectivement en ANNEXE 1 ci-après les fonctions A et S par les courbes $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_S$ sur l'intervalle $[1;20]$.

a) Expliquer comment utiliser le graphique de l'ANNEXE 1 pour retrouver $I(10)$.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Expliquer comment déterminer graphiquement sur l'ANNEXE 1 le sens de variation du montant total des intérêts à payer en fonction de la durée du remboursement de l'emprunt.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

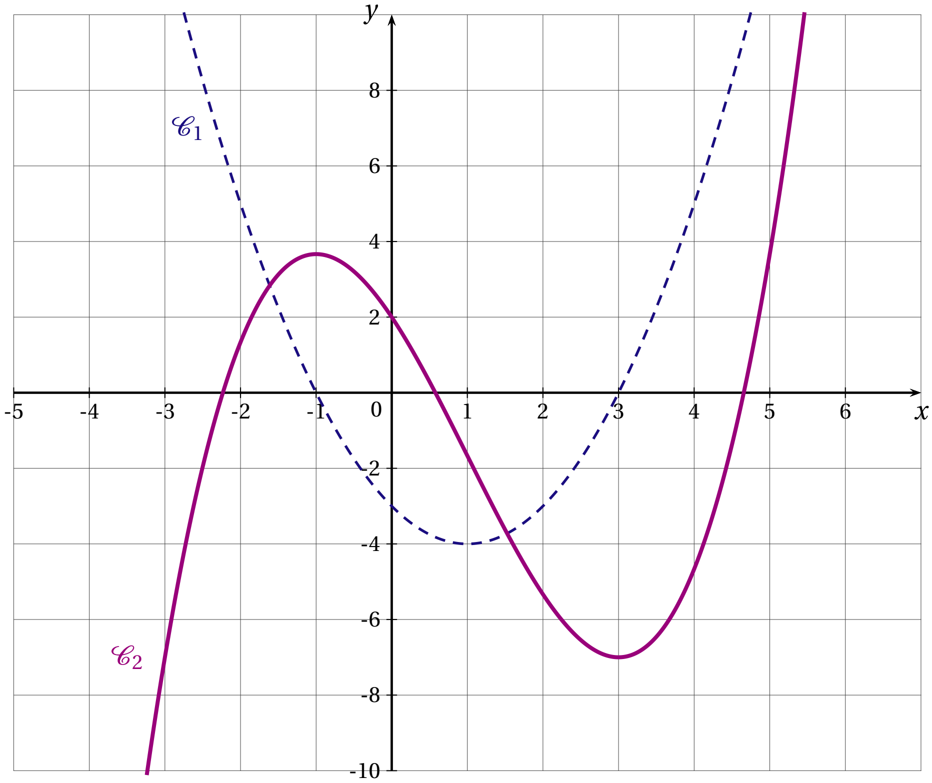


EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A : Étude graphique

Les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée f' sont données ci-dessous. Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ à la fonction qu'elle représente. Justifier votre réponse.



PARTIE B : Constructions

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Chacun des tracés sera brièvement expliqué.

a. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction g vérifiant les conditions suivantes :

g est dérivable sur l'intervalle $[-3;3]$ et l'équation $g'(x) = 0$ admet trois solutions sur $[-3;3]$.

b. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction h définie et continue sur $[-3;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

x	-3		0		2		3
$\ln[h(x)]$		↗		↘		↗	

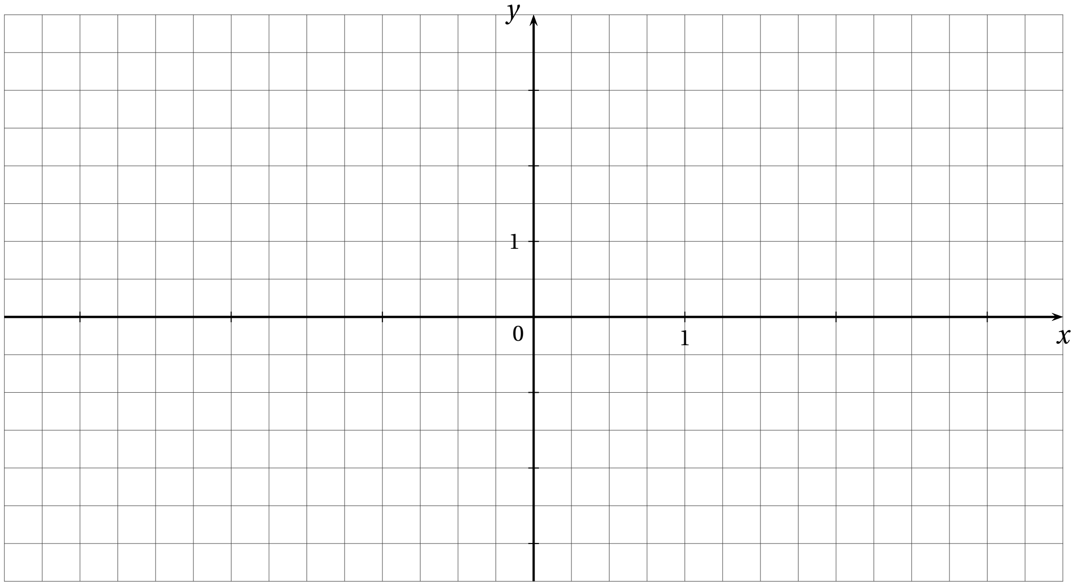
c. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction k définie et continue sur $[-3;3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$4 \leqslant \int_1^3 k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6.$$

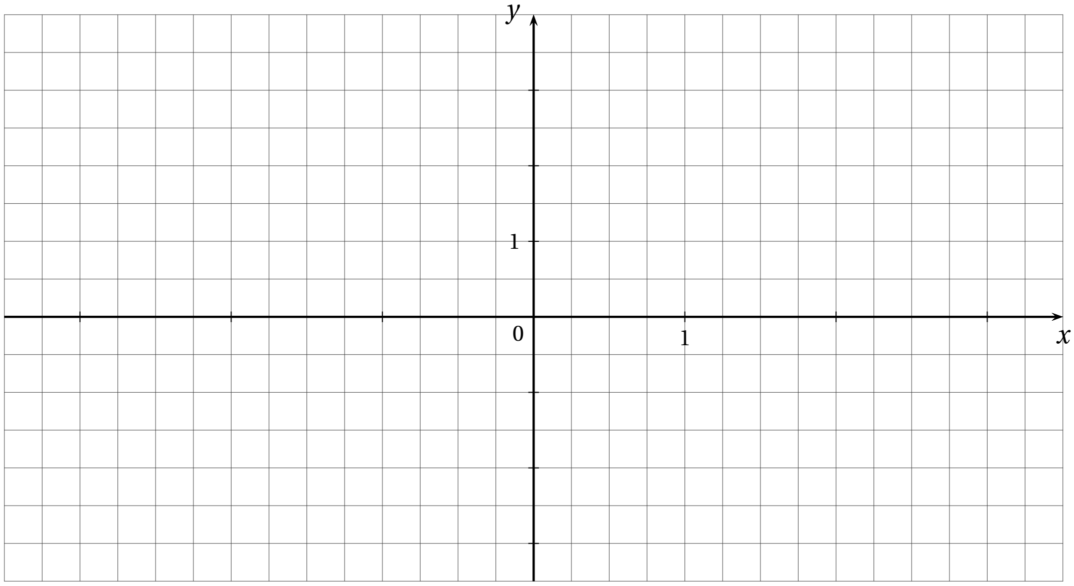
ANNEXE 2

À rendre avec la copie

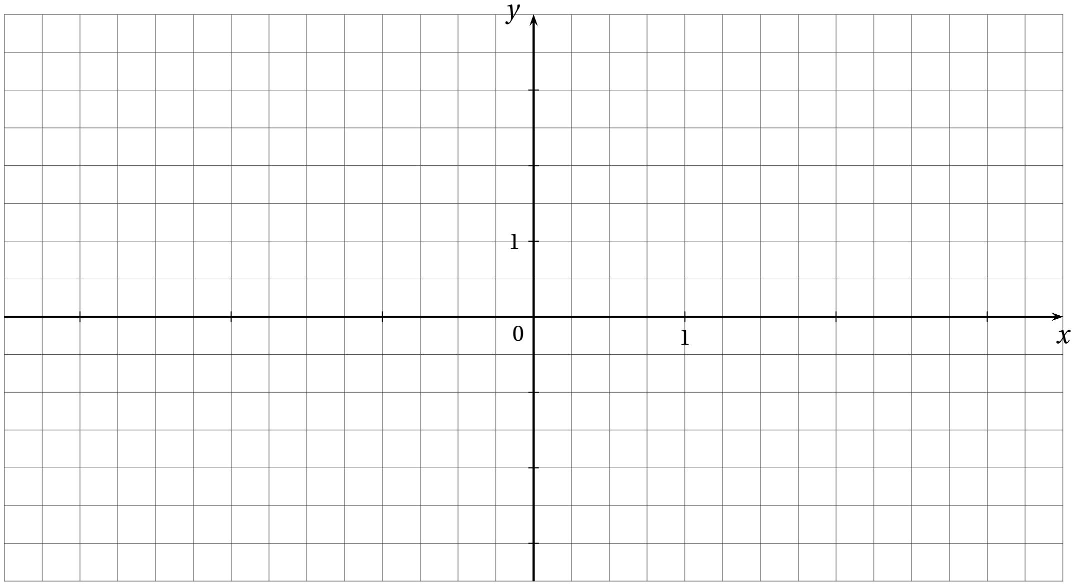
PARTIE B : a.



PARTIE B : b.



PARTIE B : c.



BACCALAURÉAT 2010

SÉRIE ES OBLIGATOIRE : INDEX THÉMATIQUE