BAC 2011

ANNALES D'EXERCICES REGROUPÉS PAR THÈME

SÉRIE ES

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Ce document, rassemble l'ensemble des exercices, classés par thèmes, des sujets du baccalauréat de la série ES de la session 2011. De par la nature même de l'épreuve, les exercices peuvent recouvrir plusieurs thèmes.

Les exercices sont regroupés sous quatre rubriques :

— Analyse

— Probabilités

— Statistiques

— Spécialité

Les exercices proposés sont établis à partir des sujets mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES EXERCICES DE LA SESSION 2011

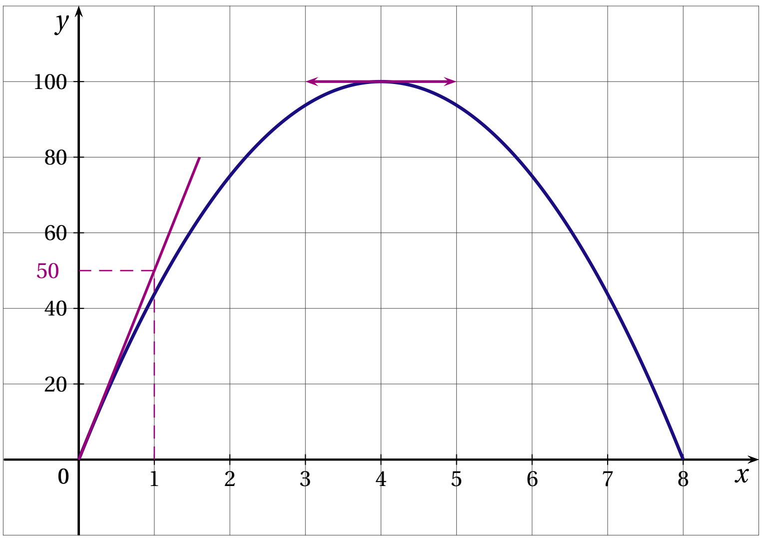
I ANALYSE, ÉTUDE DE FONCTIONS

I. 1 LECTURES GRAPHIQUES

EXERCICE 1

Amérique du Sud 2011 (2)

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction une fonction f définie et dérivable sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $[0 ; 100]$.
On dit qu'il y a « saturation » lorsque la fonction de satisfaction prend la valeur 100.
La fonction v, dérivée de la fonction f, est appelée fonction « envie ». On a donc $v = f'$.
On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive, sinon on dit qu'il y a « rejet ».
Charlotte doit rédiger un mémoire de recherche. Elle souhaite connaître la durée quotidienne de travail qui lui convient le mieux, sachant qu'elle a la possibilité d'y consacrer entre 0 et 8 heures par jour. En début de journée, elle est de plus en plus efficace, mais après un certain temps sa productivité ne la satisfait plus.
Elle modélise son taux de satisfaction en fonction du nombre d'heures x passées quotidiennement à travailler.
La courbe représentant sa satisfaction f est donnée ci-dessous.
La tangente à cette courbe au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses.
La courbe passe par l'origine du repère et la tangente en ce point passe par le point de coordonnées $(1;50)$.



1. Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :
   a) Pour quelle durée de travail quotidien y a-t-il « saturation » ?
   b) Sur quel intervalle y a-t-il « envie » ?
   c) Sur quel intervalle y a-t-il « rejet » ?
   d) Donner $v(4)$.
2. On admettra que la fonction v est ici une fonction affine définie sur l'intervalle $[0;8]$.
   Expliquer pourquoi son expression est : $v(x) = -\dfrac{25}{2}x + 50$.
3. Sachant que $f(0) = 0$, déterminer $f(x)$ pour $x \in [0;8]$.
4. En déduire les valeurs de x pour lesquelles la satisfaction prend la valeur 75.

EXERCICE 2

Antilles Guyane 2011 (4)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On donne de plus : $f(-2) = 0$, $f(5) = 0$ et $f(10) = 3$.

À l'aide des informations fournies ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Dresser sans justification le tableau donnant le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Les réponses aux questions suivantes devront être justifiées.

2. a) La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale ?
   Si oui, préciser une équation de cette droite.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[3;10]$.
   c) On appelle F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3. On note g la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a) Expliquer pourquoi la fonction g n'est pas définie sur l'intervalle $[-2;5]$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} g(x)$.
   c) Préciser le sens de variation de la fonction g sur son ensemble de définition.

EXERCICE 3

Asie 2011 (2 obligatoire)

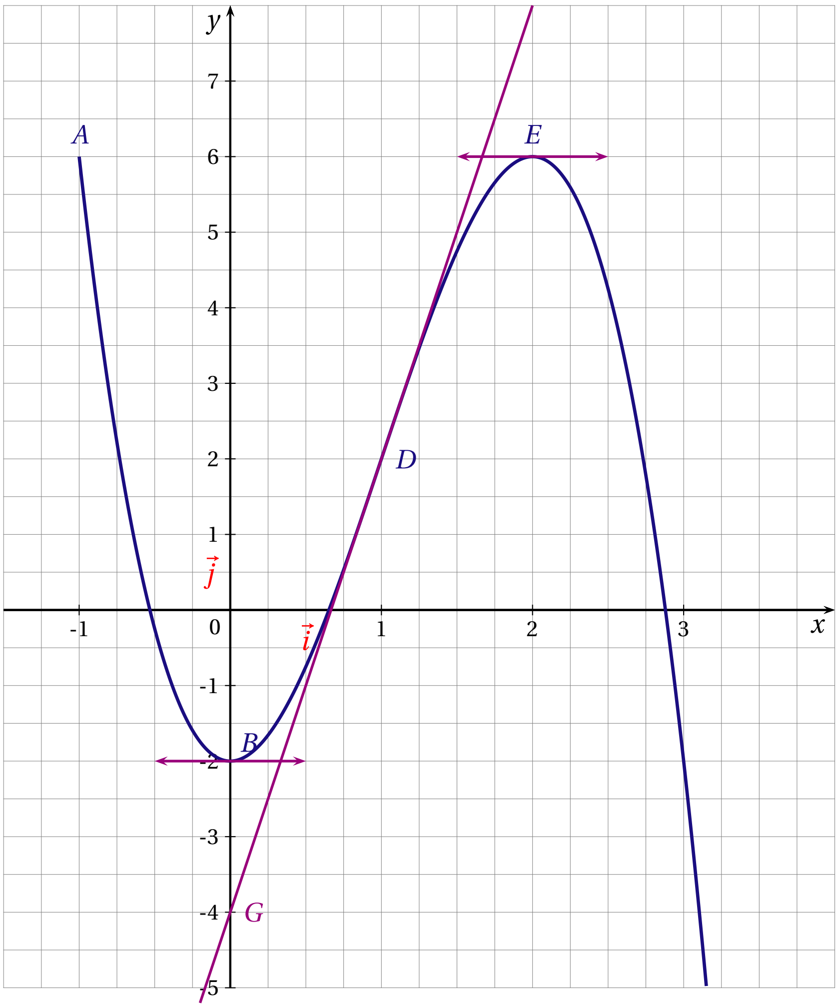
On considère une fonction f :

— définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[-1;+\infty[$;

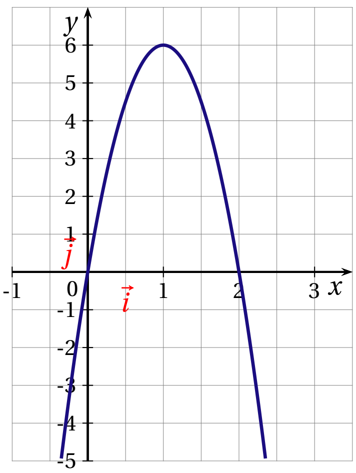
— strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$;

— strictement décroissante sur les intervalles $[-1;0]$ et $[2;+\infty[$.

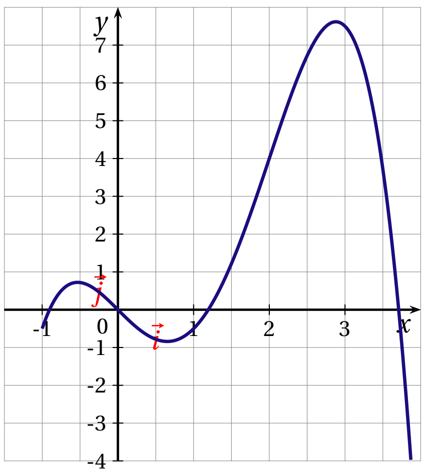
On note f' la fonction dérivée de f et F la primitive de f sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ qui s'annule en 0.
La courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Elle passe par les points $A(-1;6)$, $B(0;-2)$, $D(1;2)$ et $E(2;6)$.
Elle admet au point D une tangente passant par le point $G(0;-4)$.
Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



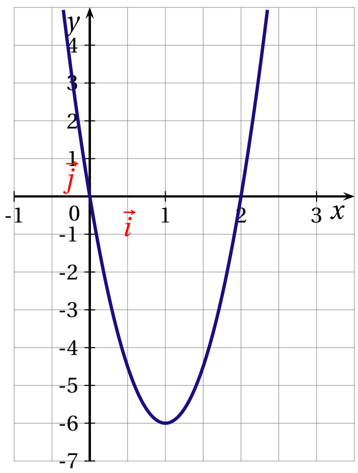
1. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$. Justifier les réponses.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D.
3. Montrer que sur l'intervalle $[-1;0]$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution que l'on notera x_1.
4. On admet que l'équation $f(x)=0$ admet, sur l'intervalle $[-1;+\infty[$, deux autres solutions que l'on notera x_2 et x_3, avec $x_2<x_3$. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
5. Parmi les trois courbes suivantes, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente F, et celle qui représente f'.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

I. 2 FONCTION LOGARITHME

EXERCICE 1

Antilles Guyane Septembre 2011 (4)

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux solaires photovoltaïques produisant de l'électricité. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2500.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}5;25]$ par $f(x) = 18\ln x - x^2 + 16x - 15$.
Si x représente le nombre de centaines de panneaux solaires fabriqués et vendus, alors on admet que $f(x)$ représente le bénéfice mensuel de l'entreprise, en milliers d'euros.
On suppose que f est dérivable sur $[0{,}5;25]$, et on note f' sa fonction dérivée.

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$. Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0{,}5;25]$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x + 18}{x}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5;25]$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5;25]$.
3. a) Calculer $f(1)$.
   b) Montrer que sur l'intervalle $[18;19]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   Déterminer une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.
   c) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0{,}5;25]$.
4. Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 € ? Justifier la réponse.

PARTIE B

1. On admet que la fonction G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5;25]$.
2. *Rappel : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$, où $a < b$.*
   La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ est le nombre réel m défini par

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

   Déterminer la valeur moyenne du bénéfice mensuel de l'entreprise, arrondie à la centaine d'euros, lorsque celle-ci produit et vend entre 100 et 1 800 panneaux solaires.

EXERCICE 2

Centres étrangers 2011 (3)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(-2x+3) + 2x$.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et on note f' sa fonction dérivée.

1. Étudier la limite de f en $\frac{3}{2}$.

2. a) Montrer que la fonction f' est définie sur l'intervalle I par $f'(x) = \dfrac{-4x+4}{-2x+3}$.
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I et donner le tableau des variations de f.
3. a) Montrer que, sur l'intervalle $[0;1]$, l'équation $f(x) = 1{,}9$ admet une unique solution α.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.

PARTIE B : Application de la partie A

Une entreprise, fournisseur d'énergie, envisage d'installer un parc d'éoliennes en pleine mer.
L'installation du parc en mer nécessite un câblage coûteux et délicat, mais le fait d'éloigner les éoliennes des turbulences dues aux reliefs de la côte améliore leur rendement.
On note x la distance en dizaines de kilomètres séparant le parc de la côte.
Pour des raisons techniques, l'installation doit se faire entre deux et douze kilomètres de la côte, c'est-à-dire qu'on a $0{,}2 \leqslant x \leqslant 1{,}2$.
Un service spécialisé, au sein de l'entreprise, arrive à la modélisation suivante :
Si l'installation se fait à x dizaines de kilomètres de la côte, le bénéfice en centaines de milliers d'euros réalisé, par année de fonctionnement du parc, est donné par $f(x)$.

1. a) À combien de kilomètres de la côte le fournisseur d'énergie doit-il placer le parc pour que son bénéfice soit maximal ?
   b) Déterminer le bénéfice réalisé, en euros, en plaçant le parc à cette distance.
2. À partir de quelle distance x de la côte, exprimée en dizaines de kilomètres, le bénéfice dépasse-t-il 190 000 euros ?

EXERCICE 3

France Métropolitaine 2011 (4)

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,10]$ par :

$$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}.$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

1. Coraline utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

(Commande)	B(x) :=10*((1+ln(x))/x)
(Réponse 1)	$x \longmapsto 10 * \left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$
(Commande)	dériver (B(x),x)
(Réponse 2)	$\dfrac{10}{x^2} + \dfrac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$
(Commande)	résoudre(B(x)=0,x)
(Réponse 3)	$[\exp(-1)]$
(Commande)	résoudre (B(x)>0,x)
(Réponse 4)	$[x > \exp(-1)]$
(Commande)	maximum (B(x),[0.1 ;10])
(Réponse 5)	10

   a) Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

b) Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.

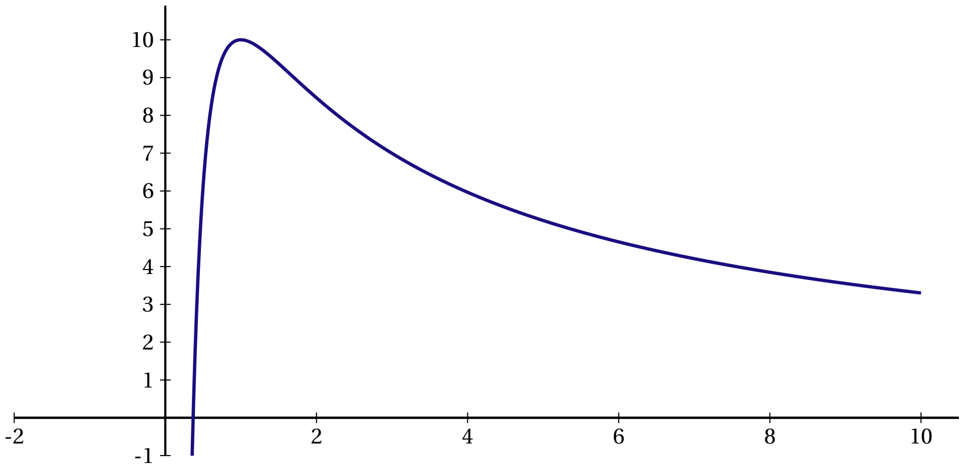
2. a) Démontrer qu'une primitive de la fonction B sur l'intervalle $[0,1;10]$ est la fonction F définie sur $[0,1;10]$ par

$$F(x) = 5\ln x(\ln x + 2)$$

b) Calculer $\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
Ce nombre représente le bénéfice mensuel moyen en milliers d'euros lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois un nombre d'objets compris entre 50 et 150.

c) Pour quel nombre d'objets le bénéfice mensuel B est-il maximal ? Justifier la réponse par un calcul.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 4 *La Réunion 2011 (4)*

On considère la fonction f définie sur l' intervalle $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - 3\ln(x-2).$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

1. a) Donner par lecture graphique : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Retrouver par le calcul $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

2. On note f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x-3)(2x-1)}{x-2}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x-2)$.

a) Soit G la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par :

$$G(x) = (x-2)\ln(x-2) - x.$$

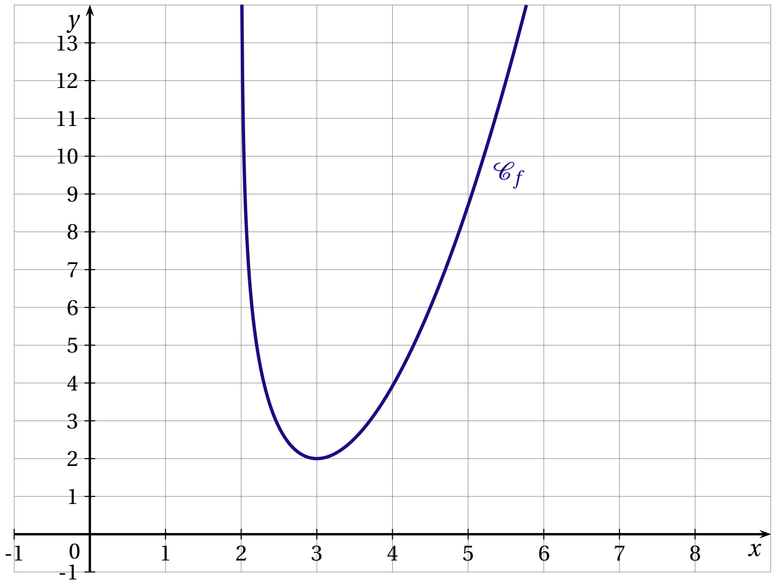
Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

b) En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

c) Sur l'annexe (à rendre avec la copie), hachurer le domaine D, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

d) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D.
On donnera la valeur exacte de celle aire puis une valeur approchée au centième près.

ANNEXE de l'exercice 4



EXERCICE 5

Nouvelle Calédonie 2011 (4)

PARTIE A

Soit u la fonction définie sur $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-4}$.

1. Donner le signe de x^2-5x+6 pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. En déduire le signe de $u(x)$ pour tout x de $]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$.
3. Factoriser x^2-5x+6.

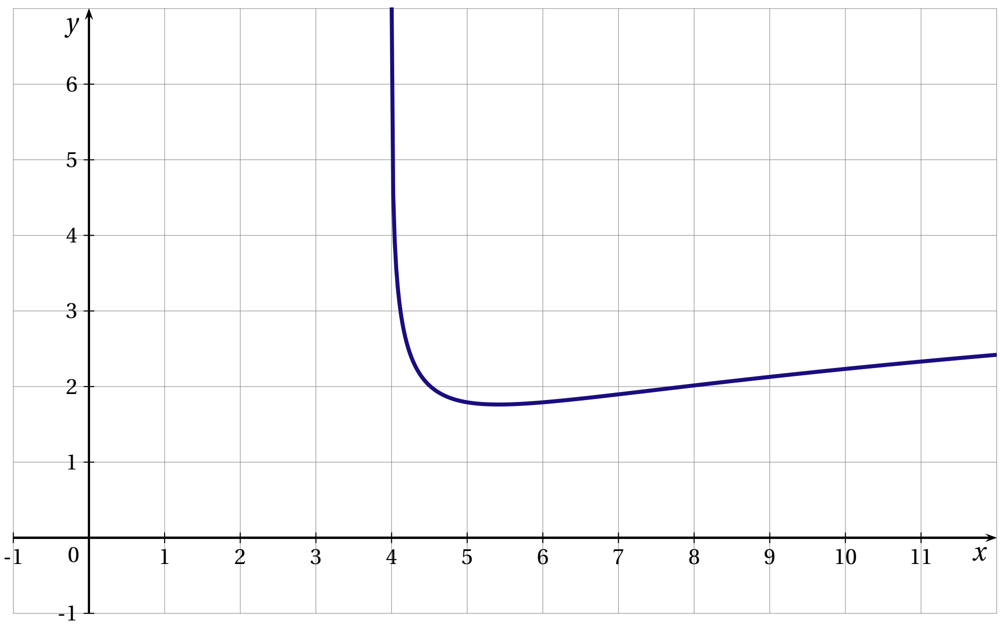
PARTIE B

1. En utilisant la partie A, expliquer pourquoi la fonction f telle que

$$f(x) = \ln\frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)}$$

peut être définie pour $x \in]4;+\infty[$.

2. Une représentation graphique de la fonction f figure ci-dessous.



Utiliser cette représentation graphique pour déterminer une valeur approchée, arrondie à l'entier le plus proche, du nombre $\mathscr{A} = \int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On expliquera la démarche.

3. Soient i, j et k les fonctions définies sur $]4;+\infty[$ par :
   — $i(x) = \ln(x-2)$
   — $j(x) = \ln(x-3)$
   — $k(x) = \ln(x-4)$

   a) Vérifier que la fonction I définie sur $]4;+\infty[$ par $I(x) = (x-2)\ln(x-2) - x$ est une primitive de la fonction i sur $]4;+\infty[$.

   b) On admet que la fonction J définie sur $]4;+\infty[$ par $J(x) = (x-3)\ln(x-3) - x$ est une primitive de la fonction j sur $]4;+\infty[$ et que la fonction K définie par $K(x) = (x-4)\ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction k sur $]4;+\infty[$.

   Pour $x \in]4;+\infty[$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $i(x)$, $j(x)$ et $k(x)$.

   c) En déduire l'expression d'une primitive F de la fonction f sur $]4;+\infty[$.

4. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis donner la valeur arrondie au centième.

EXERCICE 6

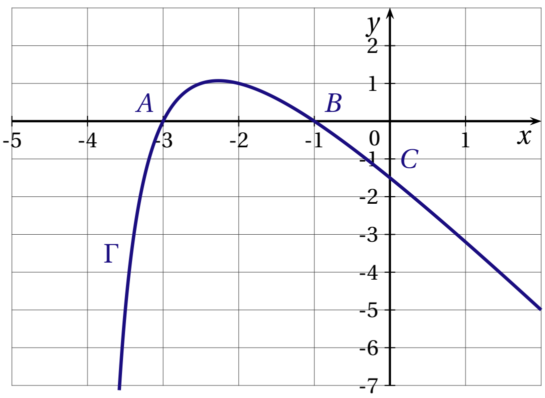
Polynésie Septembre 2011 (4)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-4;+\infty[$.

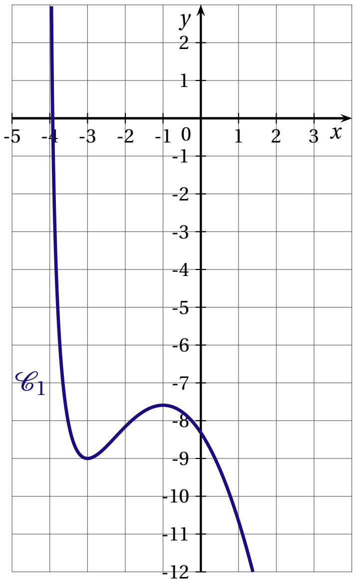
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4;+\infty[$.

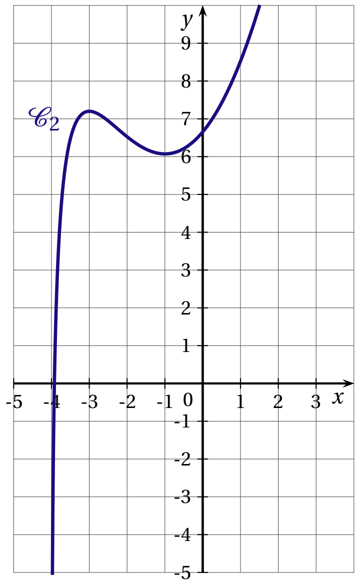
Cette courbe Γ passe par les points $A(-3;0)$, $B(-1;0)$ et $C(0;-1{,}5)$.

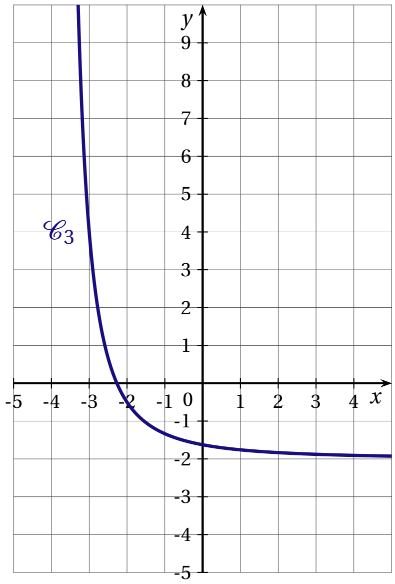


PARTIE A

1. À l'aide de la représentation graphique de la fonction dérivée f', déterminer $f'(0)$ et $f'(-3)$.
2. Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f. Déterminer laquelle des trois représentations graphiques ci-dessous est celle de la fonction f, en justifiant votre réponse :







PARTIE B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-4;+\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1. a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]-4;+\infty[$.
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   b) Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$
2. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-3}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I puis en donner une valeur arrondie au dixième.
   b) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

I. 3 FONCTION EXPONENTIELLE

EXERCICE 1 *Amérique du Nord 2011 (4)*

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100;+\infty[$.
Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1{,}50$ euros le kilogramme.
Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

PARTIE A : Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P(x)$.
2. Montrer que $P'(x) = -\dfrac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction P.

PARTIE B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100;+\infty[$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100;+\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2+200x+30\,000}{(x+100)^2}$.
3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100;+\infty[$: $S(x) = x+200-20\,000 \times \dfrac{1}{x+100}$.
4. En déduire une primitive T de S sur $[100;+\infty[$.

PARTIE C : Étude de différentes situations

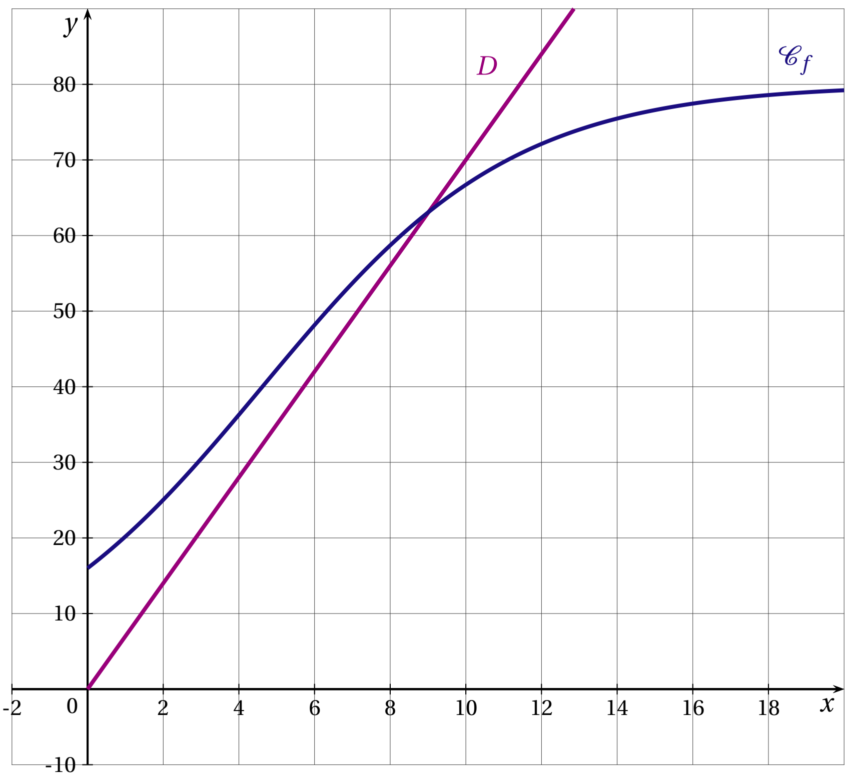
Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits.
   Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.
2. On rappelle que la valeur moyenne M d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ est donnée par la formule $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.
   Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400;600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.

EXERCICE 2 *Antilles Guyane 2011 (2)*

PARTIE A : étude d'une fonction

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{80}{1+4\mathrm{e}^{-0,3x}}$
Dans un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = 7x$.
On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite D se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne $x_0 \approx 9{,}02$.



1. Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième de $f(20)$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. a) Calculer la limite de f en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et en donner une équation.

   b) Montrer que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, on a $f(x) < 80$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
4. À l'aide du graphique, déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

PARTIE B : interprétation économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On utilisera les résultats de la partie A.

Une entreprise peut produire chaque jour au maximum 2000 thermomètres de bain pour bébé.
On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à l'intervalle $[0;20]$.
On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaines d'euros, est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.
2. Le coût total de production des thermomètres peut-il atteindre 8100 €par jour ? Justifier.
3. Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €. La recette journalière, exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.

   Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Justifier.

EXERCICE 3 *Asie 2011 (4)*

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.
Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1;20]$ par

$$C_m(q) = 4 + \left(0,2q^2 - 2q\right)\mathrm{e}^{-0,2q},$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers d'euros.

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1;20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2\mathrm{e}^{-0,2q}.$$

Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1;20]$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $[1;20]$ par :

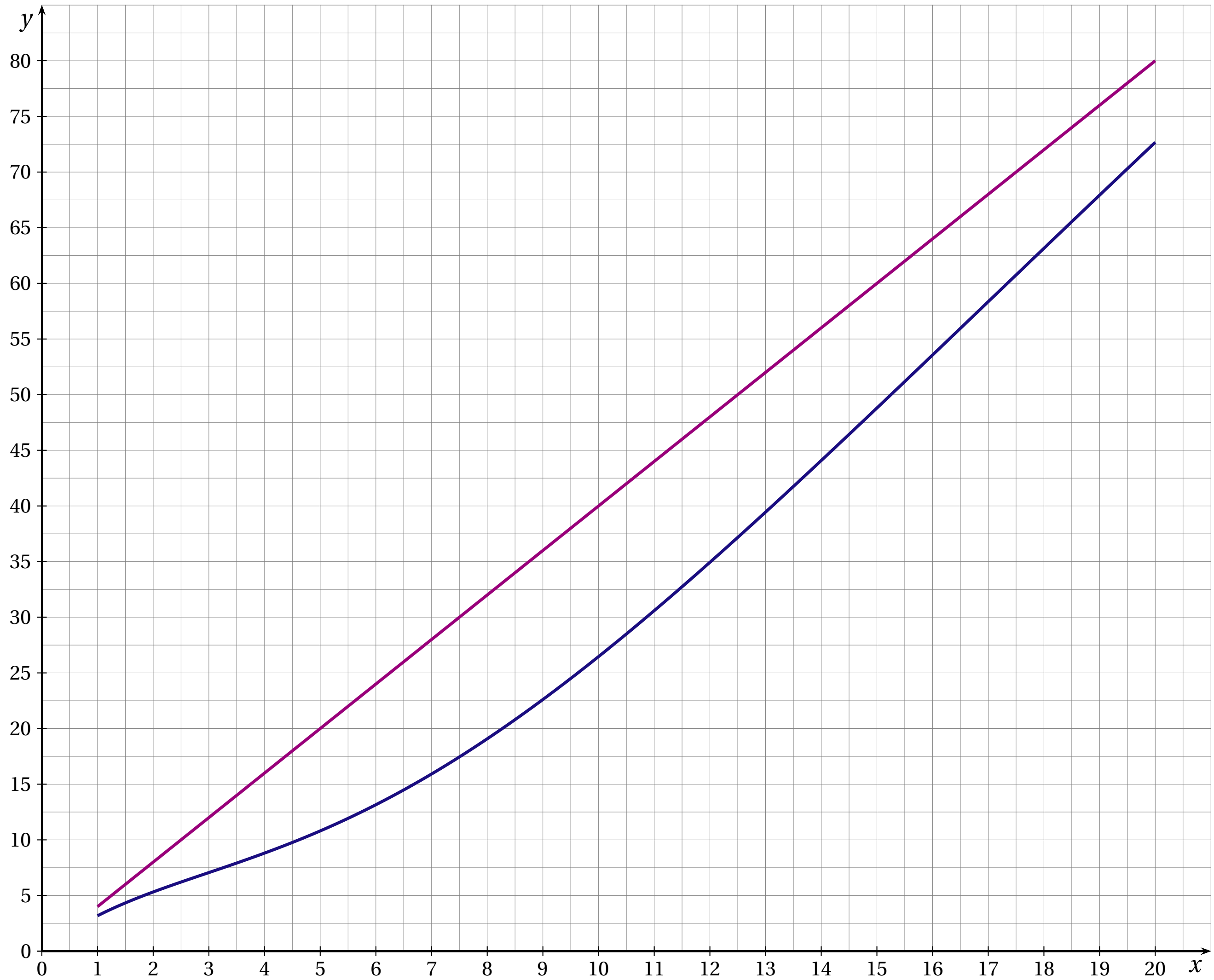
$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

   a) Vérifier que $C_M(q) = 4 - q\mathrm{e}^{-0,2q}$.
   b) Déterminer la fonction dérivée $C_M{}'$ de la fonction C_M.
   c) Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? Quel est ce coût ? Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

On suppose que l'entreprise vend toute sa production mensuelle.
Chaque tonne du produit « alpha » est vendu 4000 euros.
On désigne par $R(q)$ la recette mensuelle obtenue pour la vente de q tonnes du produit « alpha » et par $B(q)$ le bénéfice mensuel en millier d'euros ainsi réalisé.
Les représentations graphiques des fonctions recette et coût total sont données dans l'annexe 2 à rendre avec la copie.
Estimer graphiquement, en précisant votre démarche, le bénéfice maximal que l'on peut espérer sur le mois étudié.

ANNEXE 2 : À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 4

France Métropolitaine Septembre 2011 (3)

Une entreprise fabrique chaque mois x tonnes d'un certain produit, avec x appartenant à l'intervalle $]0;6]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de x tonnes est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0,01\mathrm{e}^{x} + 2}{x}.$$

1. À l'aide de la calculatrice :
   a) conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0;6]$;
   b) estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;
   c) dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4000 euros. On précisera la méthode utilisée.
2. On désigne par C' la fonction dérivée de la fonction C. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;6]$:

$$C'(x) = \frac{0,01x\mathrm{e}^{x} - 0,01\mathrm{e}^{x} - 2}{x^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;6]$ par :

$$f(x) = 0{,}01x\mathrm{e}^{x} - 0{,}01\mathrm{e}^{x} - 2.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;6]$

$$f'(x) = 0{,}01x\mathrm{e}^{x}.$$

b) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;6]$.

c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $[4;5]$.
Donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.

d) Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;6]$.

4. À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit.

EXERCICE 5

Liban 2011 (3)

On considère les fonctions f,g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = -x+1$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A : Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

   b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

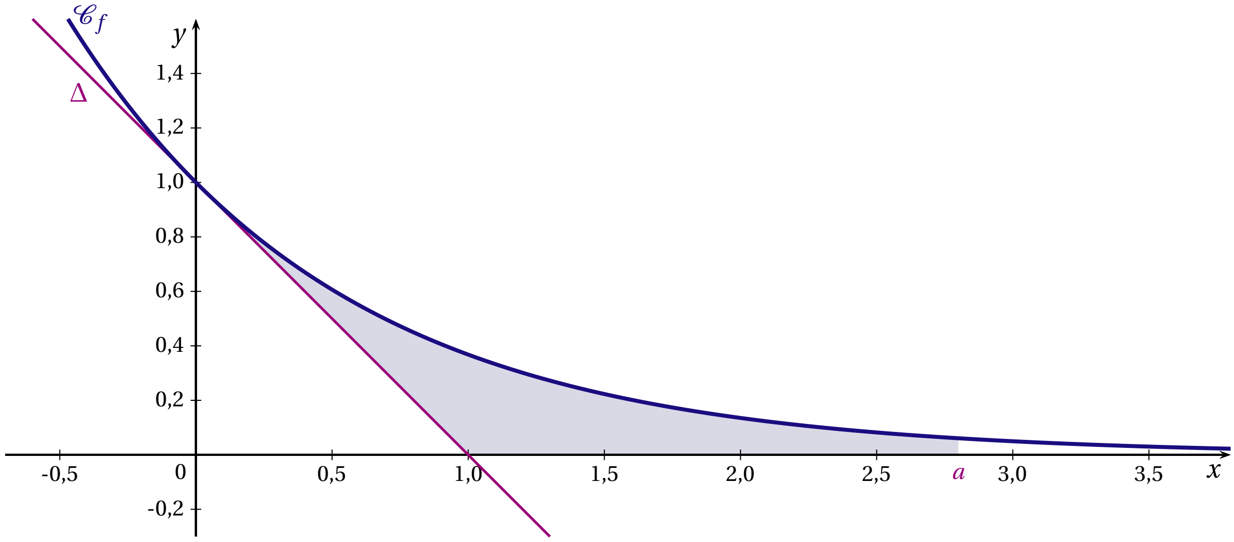
PARTIE B : Calcul d'aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en annexe.
   On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.

   a) Déterminer en fonction de a la valeur de $\mathscr{A}$.

   b) Déterminer la limite de $\mathscr{A}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

ANNEXE



EXERCICE 6

Nouvelle Calédonie Deuxième session 2010 (4)

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe 2 donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
   Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
   a) Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
   Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.
   b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$.
   Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a :
   $$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$
   c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.
   En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

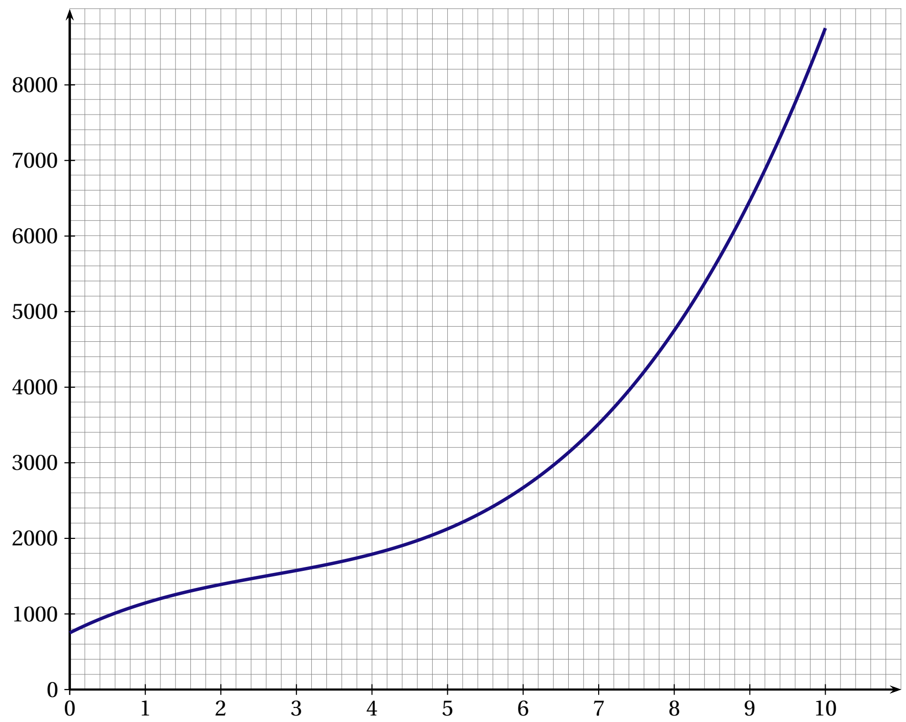
1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)\left(x^2+x+5\right)}{x^2}.$$

2. a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
   En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;10]$.

   b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
   Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

ANNEXE 2



EXERCICE 7

Polynésie 2011 (4)

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11;+\infty[$ par

$$f(x) = 17280\mathrm{e}^{-0,024x}$$

de sorte que $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année $2000 + x$.
On admet que la fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[11;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.

1. Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle (on arrondira le résultat au billion près).
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[11;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

4. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15000 billions de barils de pétrole soient découverts ?

   Si oui, déterminer, en justifiant, cette (ces) année(s). Si non, justifier la réponse.

5. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6000 billions de barils de pétrole soient découverts ?

   Si oui, justifier la réponse.

   Si non, déterminer, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6000 billions de barils.

6. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[11;+\infty[$.

   b) Calculer la valeur exacte, puis donner la valeur arrondie à l'unité près, de l'intégrale I suivante :

   $$I=\int_{11}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   c) En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

EXERCICE 8

Polynésie Septembre 2011 (1)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $f(x)=-1+x\mathrm{e}^{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

   (*On rappelle le résultat :* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}=0$)

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a) Montrer que, pour tout nombre réel x on a $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$.

   Dresser le tableau de variations de la fonction f (la valeur de l'extremum sera arrondie à 10^{-2}).

3. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y=x-1$.

5. Dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$.

   Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T ?

6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Justifier la conjecture émise à la question 5.

EXERCICE 9

Pondichéry 2011 (2)

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la fonction dérivée de f.

— La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;3)$ passe par le point $B(1;5)$.

— La droite D d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

1. En utilisant les données et le graphique, préciser :
   a) La valeur du réel $f(0)$ et la valeur du réel $f'(0)$.
   b) La limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
3. Préciser un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
4. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{e^x}$, où a et b sont des nombres réels.
   a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, de b et de x.
   b) À l'aide des résultats de la question 1. a., démontrer que l'on a, pour tout réel x :
   $$f(x) = 1 + \frac{4x+2}{e^x}.$$
5. Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x + \dfrac{-4x-6}{e^x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 3. ?

EXERCICE 10 *Pondichéry 2011 (4)*

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.
Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.
Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_T(x)$, pour x variant de 0,25 à 5, le coût total de production correspondant.
La courbe Γ_1 fournie en annexe 2 est la représentation graphique de la fonction C_T sur l'intervalle $[0,25;5]$.
La tangente à Γ_1 au point $A(1;1)$ est horizontale.

PARTIE A

1. a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0,25;5]$ par $R(x) = 1,5x$.
   Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?
   b) Tracer, sur le graphique fourni en annexe 2, le segment représentant graphiquement la fonction R.
2. Lectures graphiques
   Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.
   Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.
   a) Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.
   b) Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.
   c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
   À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_T est définie sur l'intervalle $[0,25;5]$ par

$$C_T(x) = x^2 - 2x\ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x).$$

   Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la partie A.
2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0,25;5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2\ln(x) - 2x + 3,5$.
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0,25;5]$:

x	0,25		1		5
$B'(x)$	y_1	$\nearrow$	1,5	$\searrow$	y_2

On précise les encadrements : $0{,}22 < y_1 < 0{,}23$ et $-3{,}29 < y_2 < -3{,}28$.

a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0{,}25;5]$.
Pour la suite de l'exercice, on prendra 2,77 pour valeur approchée de α.

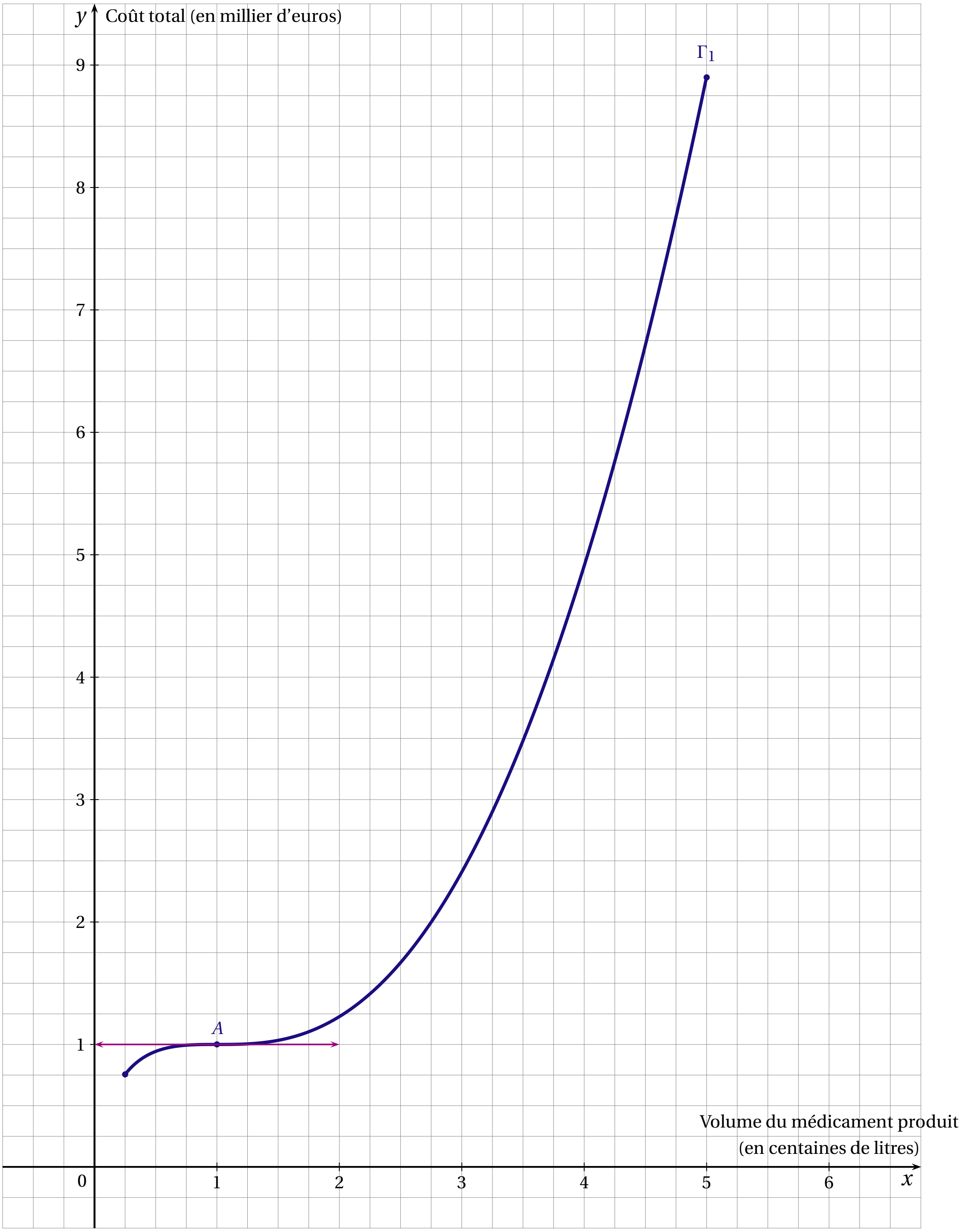
b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0{,}25;5]$.
En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}25;5]$.

4. a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

   b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

ANNEXE 2

Exercice 4 : Commun à tous les candidats



I. 4 APPLICATION À L'ÉCONOMIE

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2011 (4)

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100;+\infty[$.
Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1{,}50$ euros le kilogramme.
Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

PARTIE A : Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)$.
2. Montrer que $P'(x) = -\dfrac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction P.

PARTIE B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100;+\infty[$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100;+\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2+200x+30\,000}{(x+100)^2}$.
3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100;+\infty[$: $S(x) = x+200-20\,000 \times \dfrac{1}{x+100}$.
4. En déduire une primitive T de S sur $[100;+\infty[$.

PARTIE C : Étude de différentes situations

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits.
   Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.
2. On rappelle que la valeur moyenne M d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ est donnée par la formule $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.
   Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400;600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.

EXERCICE 2

Asie 2011 (4)

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.
Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1;20]$ par

$$C_m(q) = 4+\left(0{,}2q^2-2q\right)\mathrm{e}^{-0{,}2q},$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers d'euros.

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1;20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2\mathrm{e}^{-0,2q}.$$

   Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1;20]$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $[1;20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

   a) Vérifier que $C_M(q) = 4 - q\mathrm{e}^{-0,2q}$.

   b) Déterminer la fonction dérivée $C_M{}'$ de la fonction C_M.

   c) Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? Quel est ce coût ? Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On suppose que l'entreprise vend toute sa production mensuelle.

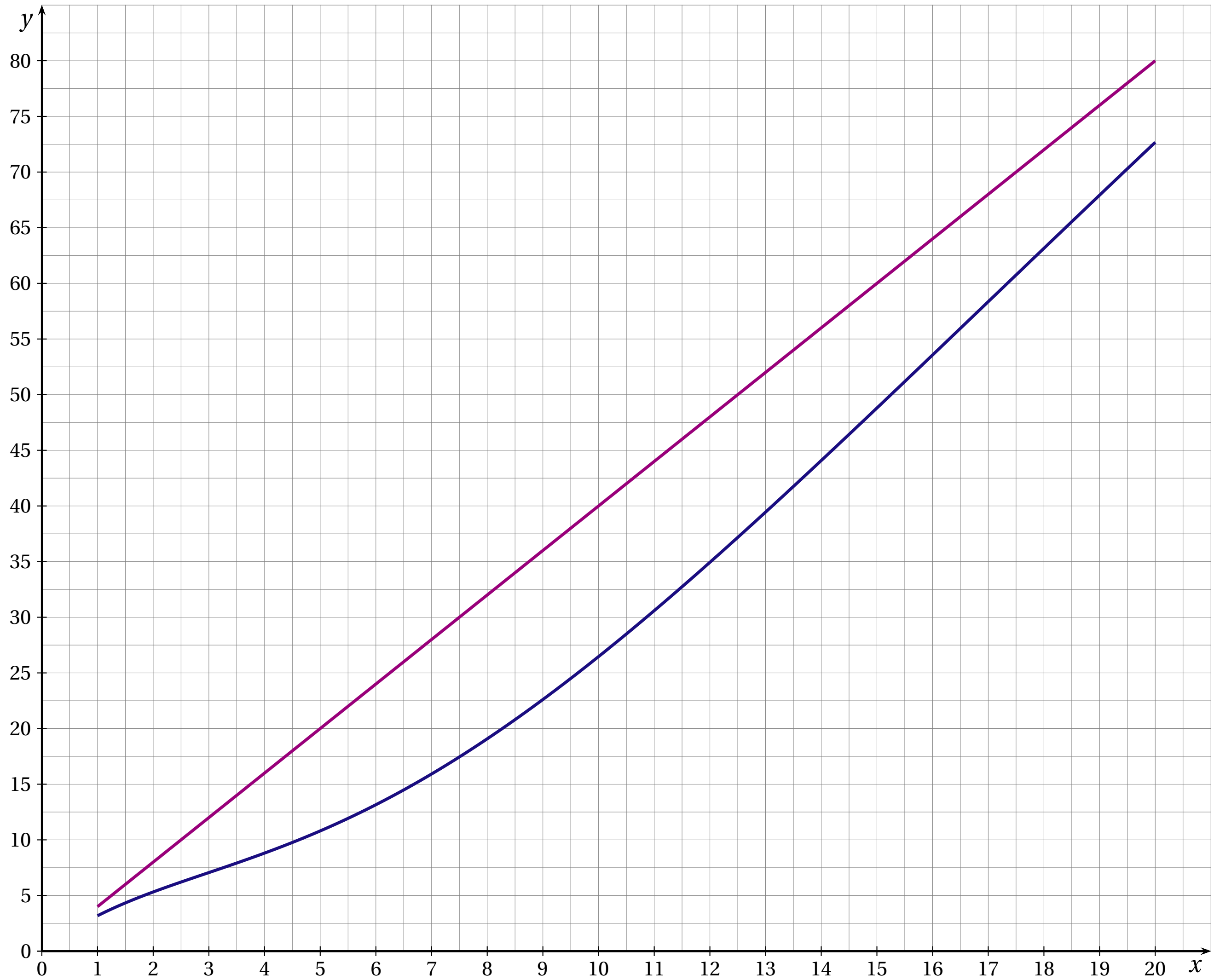
   Chaque tonne du produit « alpha » est vendu 4000 euros.

   On désigne par $R(q)$ la recette mensuelle obtenue pour la vente de q tonnes du produit « alpha » et par $B(q)$ le bénéfice mensuel en millier d'euros ainsi réalisé.

   Les représentations graphiques des fonctions recette et coût total sont données dans l'annexe 2 à rendre avec la copie.

   Estimer graphiquement, en précisant votre démarche, le bénéfice maximal que l'on peut espérer sur le mois étudié.

ANNEXE 2 : À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 3

Nouvelle Calédonie Deuxième session 2010 (4)

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe 2 donne la représentation graphique de la fonction C.

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
   Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
2. Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.

a) Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0;10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

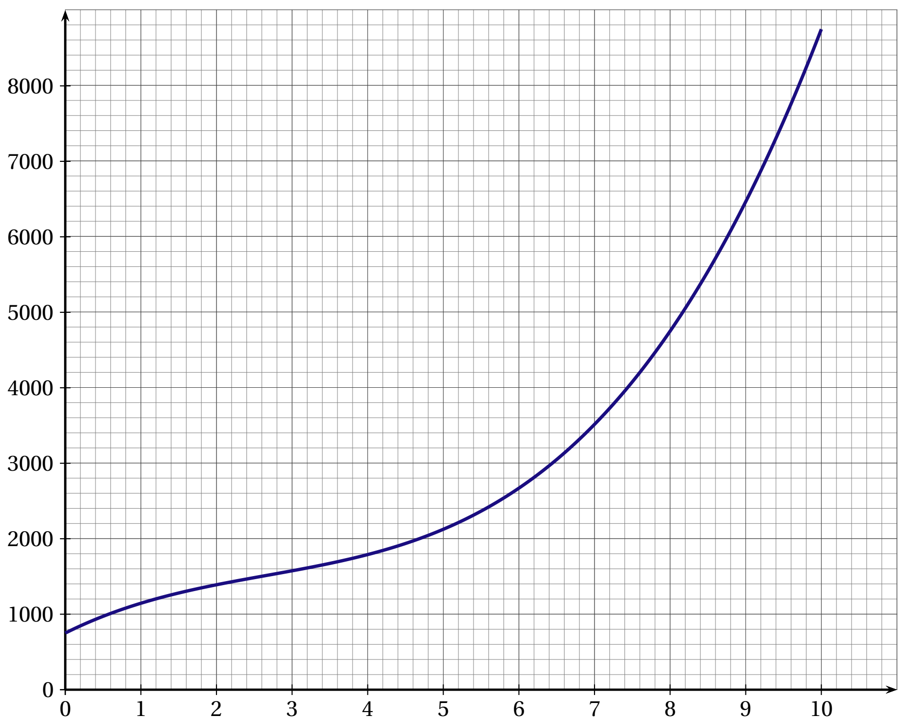
1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)\left(x^2+x+5\right)}{x^2}.$$

2. a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;10]$.

b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

ANNEXE 2



EXERCICE 4 *Polynésie 2011 (4)*

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11;+\infty[$ par

$$f(x) = 17280\text{e}^{-0{,}024x}$$

de sorte que $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année $2000 + x$.
On admet que la fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[11;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.

1. Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle (on arrondira le résultat au billion près).
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[11;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.
4. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15000 billions de barils de pétrole soient découverts ?

   Si oui, déterminer, en justifiant, cette (ces) année(s). Si non, justifier la réponse.
5. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6000 billions de barils de pétrole soient découverts ?

   Si oui, justifier la réponse.

   Si non, déterminer, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6000 billions de barils.
6. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[11;+\infty[$.

   b) Calculer la valeur exacte, puis donner la valeur arrondie à l'unité près, de l'intégrale I suivante :

   $$I = \int_{11}^{21} f(x)\,\text{d}x$$

   c) En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

EXERCICE 5 *Pondichéry 2011 (4)*

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.
Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.
Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_T(x)$, pour x variant de 0,25 à 5, le coût total de production correspondant.
La courbe Γ_1 fournie en annexe 2 est la représentation graphique de la fonction C_T sur l'intervalle $[0{,}25;5]$.
La tangente à Γ_1 au point $A(1;1)$ est horizontale.

PARTIE A

1. a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0{,}25;5]$ par $R(x) = 1{,}5x$.

   Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

   b) Tracer, sur le graphique fourni en annexe 2, le segment représentant graphiquement la fonction R.

2. Lectures graphiques

   Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.

   Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.

   a) Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.

   b) Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.

   c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
   À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_T est définie sur l'intervalle $[0{,}25;5]$ par

$$C_T(x) = x^2 - 2x\ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1{,}5x - x^2 + 2x\ln(x).$$

   Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la partie A.

2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0{,}25;5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2\ln(x) - 2x + 3{,}5$.

3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0{,}25;5]$:

x	0,25		1		5
$B'(x)$	y_1	$\nearrow$	1,5	$\searrow$	y_2

   On précise les encadrements : $0{,}22 < y_1 < 0{,}23$ et $-3{,}29 < y_2 < -3{,}28$.

   a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0{,}25;5]$.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra 2,77 pour valeur approchée de α.

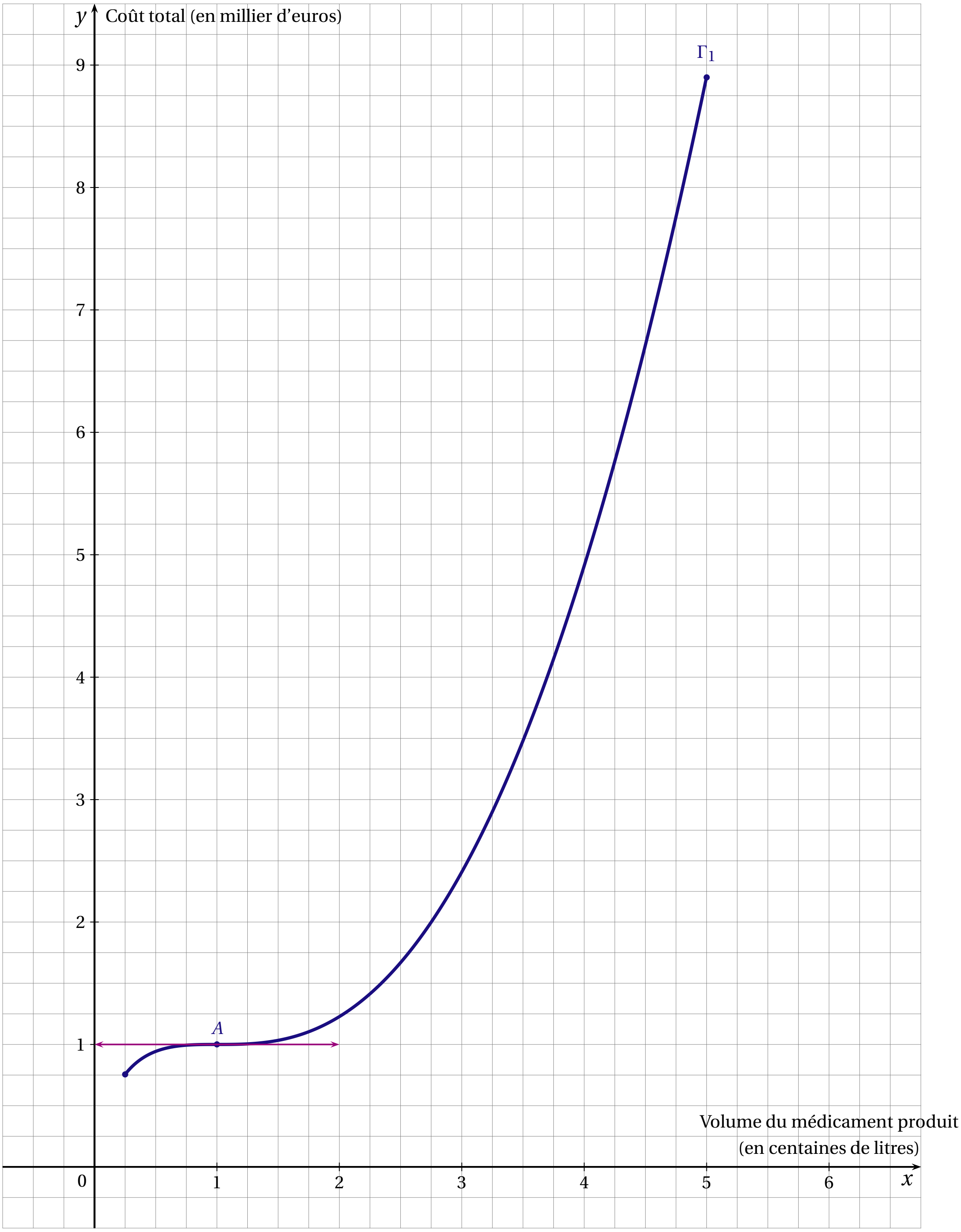
   b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0{,}25;5]$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}25;5]$.

4. a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

   b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

ANNEXE 2

Exercice 4 : Commun à tous les candidats

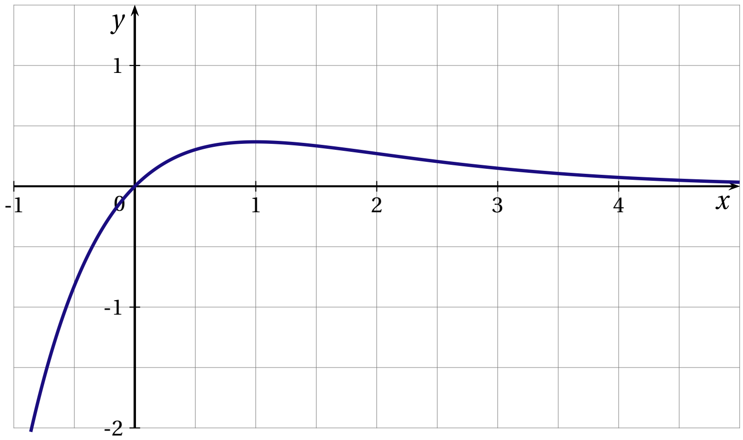


I. 5 Q.C.M

EXERCICE 1 *Amérique du Nord 2011 (1)*

L'exercice suivant est un Q. C. M. (questionnaire à choix multiples) Pour chaque proposition choisir l'unique bonne réponse sachant qu'une bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^{-x}$.
La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

   a) $-\text{e}^{-x}$ b) e^{-x} c) $(1-x)\text{e}^{-x}$

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

   a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

3. Une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

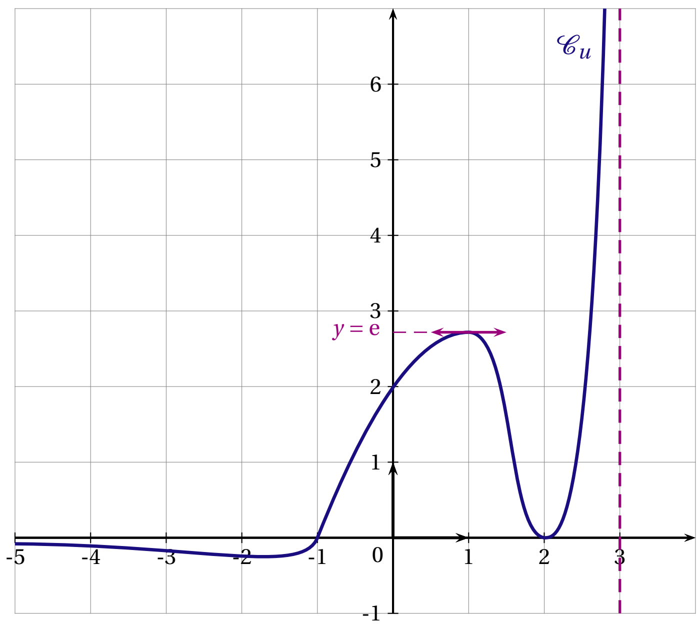
   a) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\text{e}^{-x}$ b) $F(x) = -(1+x)\text{e}^{-x}$ c) $F(x) = -x\text{e}^{-x}$

4. La valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$ est :

   a) négative b) inférieure à 1 c) supérieure à 3

EXERCICE 2 *Amérique du Sud 2011 (1)*

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty ; 3[$.
On note u' la dérivée de u.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ représentant la fonction u.
L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont deux asymptotes à $\mathscr{C}_u$.
La droite d'équation $y = \text{e}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_u$ en son point d'abscisse 1.
La courbe $\mathscr{C}_u$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et lui est tangente au point d'abscisse 2.



Cet exercice est un « Vrai-Faux ». Voici huit affirmations.
Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.
Chaque bonne réponse apporte 0,5 *point.*

1. a) $u'(1) = \mathrm{e}$.
   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$.
   c) $\lim\limits_{x \to 3} = +\infty$.
   d) L'équation $u(x) = 1$ admet exactement trois solutions.
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1;2[$ telle que $f = \ln(u)$.
   On note f' sa fonction dérivée.
   a) Sur l'intervalle $]-1;0[$, f change de signe.
   b) $f'(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   c) L'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.
   d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$.

EXERCICE 3

Antilles Guyane Septembre 2011 (1)

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty;\mathrm{e}[$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e} - x)$.
   On suppose f dérivable sur $]-\infty;\mathrm{e}[$ et on note f' sa fonction dérivée. $f'(0)$ est égal à :

-1	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	1

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{x}$.
   On considère une fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que, pour tout $x>0$, on ait $0<g(x)<f(x)$. La limite de la fonction g en $+\infty$ est :

$-\infty$	0	$+\infty$	on ne peut pas savoir

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x+1+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.
   Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $(\mathscr{C}_f)$:

admet comme asymptote la droite d'équation $x=0$	admet comme asymptote la droite d'équation $y=3x+1$	admet comme asymptote la droite d'équation $y=0$	n'admet pas de droite asymptote

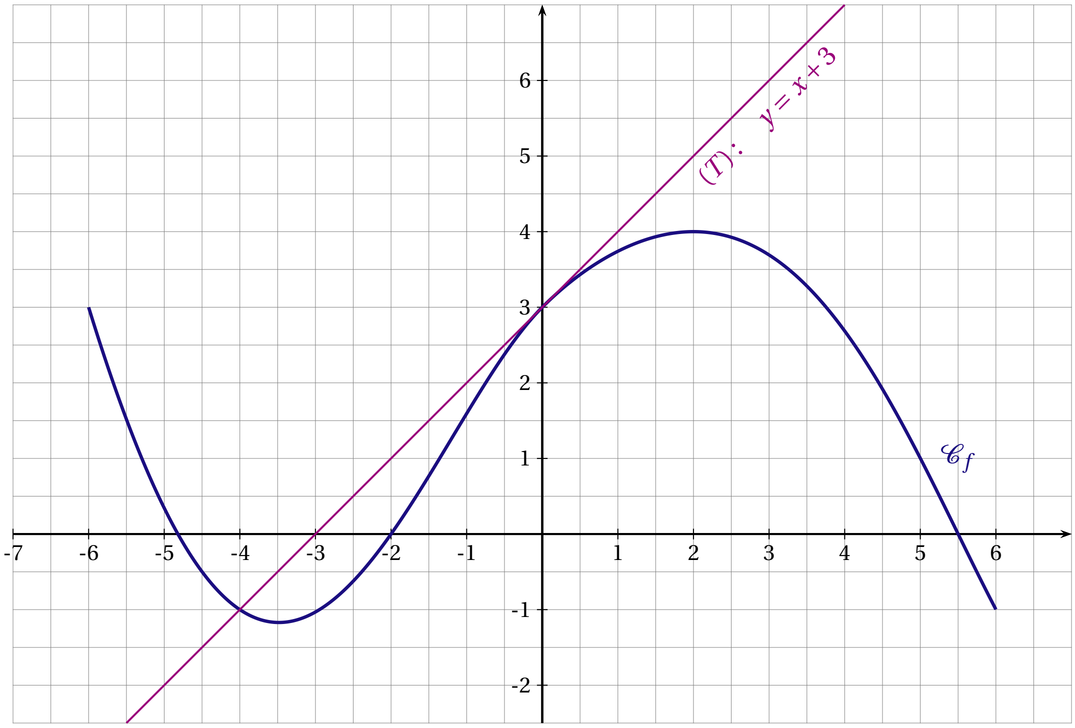
4. On note exp la fonction exponentielle.
   Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $u(0)=1$, $u(1)=0$ et $u(\mathrm{e})=2$. Soit f la fonction définie par $f(x)=u[\exp(x)]$. $f(0)$ est égal à :

0	1	2	e

EXERCICE 4

Centres étrangers 2011 (1)

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal du plan $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;6]$.
La droite (T) d'équation $y=x+3$ est tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point I de coordonnées $(0;3)$.



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Le nombre dérivé de f en 0 est :

   a) 0 b) 1 c) 3

2. On pose $J = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

   a) $-2 < J < 0$ b) $-4 < J < -2$ c) $2 < J < 4$

3. On appelle F une primitive de f sur l'intervalle $[-6;6]$.
   a) F est croissante sur l'intervalle $[-3;2]$;
   b) F est décroissante sur l'intervalle $[-1;5]$;
   c) F est croissante sur l'intervalle $[-1;5]$
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-6;6]$ par : $g(x) = \exp[f(x)] = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   On peut affirmer que :
   a) la fonction g a les mêmes variations que f sur l'intervalle $[-6;6]$.
   b) la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-6;6]$
   c) la fonction g a les variations inverses de celles de f sur l'intervalle $[-6;6]$.

EXERCICE 5

France Métropolitaine 2011 (3)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

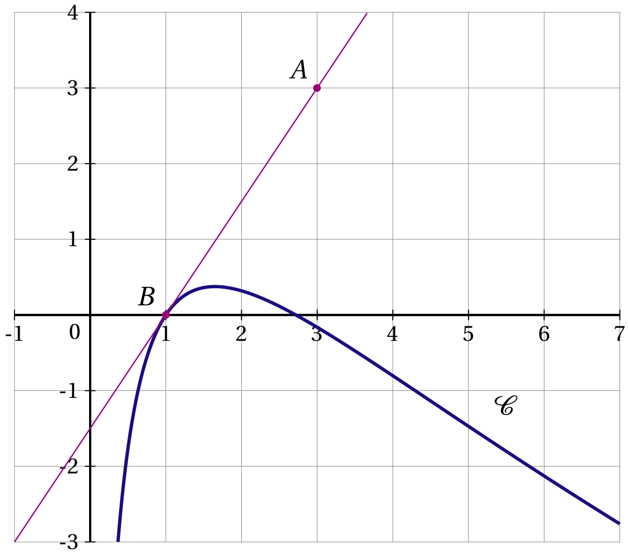
1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$$

   On note f' sa fonction dérivée.
   a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2}$
   b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$
   c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1}$
2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5;12]$.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

   a) $\int_{-5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = 7$
   b) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5;12]$
   c) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5;12]$, $g(x) < 0$.
3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



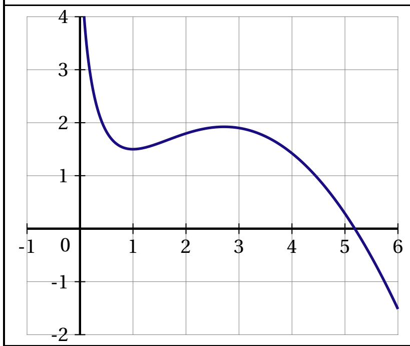
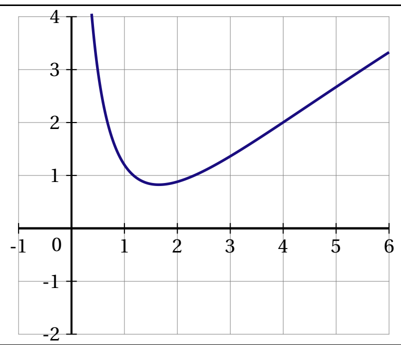
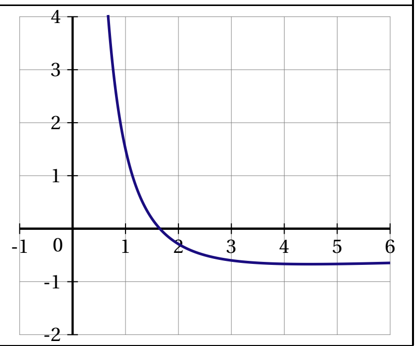
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

a) $h'(1) = 0$

b) $h'(1) = 1{,}5$

c) $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$

4. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une primitive de la fonction h (introduite à la question 3.) sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Préciser laquelle.

a)	b)	c)
		

EXERCICE 6 *France Métropolitaine Septembre 2011 (4)*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et préciser la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. En septembre 2009, la T.V.A. dans la restauration est passée de 19,6% à 5,5%. En août 2009, une brasserie proposait un menu à 12,70 € (T.V.A incluse). Le responsable a appliqué ce changement de T.V.A. Quel était en septembre 2009 le prix de ce menu après le changement de T.V.A. (arrondi au centime) ?

   a) 10,91 €

   b) 11,20 €

   c) 12,70 €

2. La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(100 + x)$. Comment varie la fonction f ?

a) la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) la fonction f est constante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

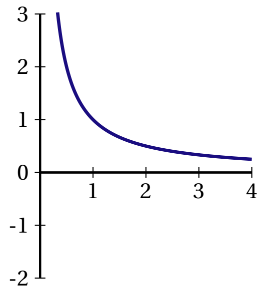
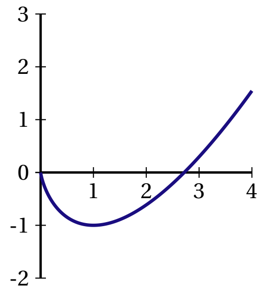
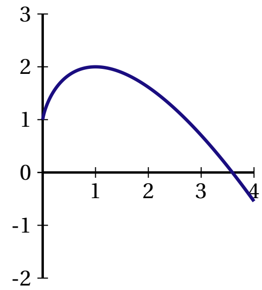
3. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(3x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$?

a) 0

b) $\dfrac{7}{6}$

c) 2

4. La fonction g est définie sur l'intervalle $]0;4]$ par $g(x) = \ln x$. Parmi les trois courbes suivantes, laquelle représente une primitive de la fonction g ?

a.	b.	c.
		

EXERCICE 7

Liban 2011 (1)

Cet exercice constitue un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, indiquer sur votre copie le numéro de la question et la seule réponse exacte.
Barème : Une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) L'ensemble de définition de la fonction f est :

$]0;+\infty[$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	$]1;+\infty[$

b) Le point de $\mathscr{C}_f$ d' abscisse $\dfrac{1}{2}$ a pour ordonnée :

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$	$\ln 1-\left(\dfrac{1}{4}\right)$	$\ln 3-2\ln 2$	$-0{,}2876820725$

2. On considère à présent la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \ln(\ln x)$.

a) Sur $]1;+\infty[$, l'inéquation $g(x) > 0$ admet comme ensemble de solutions :

$]1;\mathrm{e}[$	$]1;+\infty[$	$]\mathrm{e};+\infty[$	$[\mathrm{e};+\infty[$

b) Sur $]1;+\infty[$, l'expression de la dérivée de la fonction g est égale à :

$\dfrac{1}{\ln x}$	$\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}$	x	$\dfrac{1}{x\ln x}$

EXERCICE 8

Nouvelle Calédonie 2011 (1)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 6[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 6[$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne le tableau de variations de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		6
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout nombre de l'intervalle $]-\infty; 1]$, on a $f'(x) \geqslant 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.
3. La droite d'équation $y = 5$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Si h est la fonction définie sur $]-\infty; 6[$ par $h(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$, on a $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = -\infty$.

EXERCICE 9

Nouvelle Calédonie Deuxième session 2010 (2)

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c.
Pour chacune des questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.
Barème : une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à* 0.

Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à $\left]-\dfrac{1}{2}; 5\right[$ par

$$f(x) = -x + 2 + \ln(2x + 1)$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point :

   a) $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2} + \ln 2\right)$ b) $B(0; 2)$ c) $C\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2} + \ln 2\right)$

2. La limite de f en $-\dfrac{1}{2}$ est égale à :

   a) $\dfrac{5}{2}$ b) $-\infty$ c) $+\infty$

3. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}; 5\right[$ est égal à :

   a) 0 b) 1 c) 2

EXERCICE 10

Polynésie 2011 (1)

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
On note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
On suppose que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f.
Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1;6]$. On suppose que f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
f	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Pour chacune des huit affirmations ci-dessous, une seule de ces trois propositions convient :
VRAIE ou FAUSSE ou LES INFORMATIONS DONNÉES NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

1. L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
2. La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
3. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$, $f'(x)\geqslant 0$.
4. La fonction F est décroissante sur l'intervalle $]1;6]$.
5. $\ln\left[f(x)\right]$ existe pour tout x appartenant à $]-\infty;0[$.
6. Soit g la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.
   a) $g(6)=\mathrm{e}^3$.
   b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x)=+\infty$.
   c) $g'(3)\geqslant 0$.

II Q.C.M DIVERS

II. 1 Q.C.M ANALYSE ET PROBABILITÉS

EXERCICE 1

La Réunion 2011 (1)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, quatre réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse jugée correcte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni ne retire aucun point.

1. L'égalité $\ln[\exp(x)] = x$:	A. n'est vraie que pour tout réel x strictement positif. B. est vraie pour tout réel x. C. n'est jamais vraie. D. n'est vraie que pour tout réel x supérieur ou égal à 1.
2. L'égalité $\exp[\ln(x)] = x$ est vraie pour tout réel x appartenant à :	A. $[0;+\infty[$ B. $\mathbb{R}$ C. $]0;+\infty[$ D. $[-1;+\infty[$
3. On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :	A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{15}{16}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{8}$
4. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression : $f(x) = 3e^{2x} - x + 1$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :	A. $y = 2x + 4$ B. $y = 6x + 4$ C. $y = 5x + 4$ D. $y = 5x - 4$
5. On considère l'inéquation : $\ln(3 - x) \leqslant 0$. Elle admet pour ensemble de solutions :	A. $]0\ :\ 3]$ B. $[2;3]$ C. $[2;+\infty]$ D. $]0;2]$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left(-2+\frac{1}{x}\right)}$ est égale à :	A. 0 B. $+\infty$ C. e^{-2} D. $-\infty$
7. Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $$g(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$ Sa courbe représentative admet :	A. une unique asymptote. Elle est parallèle à l'axe des abscisses. B. une unique asymptote. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées. C. deux asymptotes. D. aucune asymptote.
8. Soit h la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ d'expression : $$h(x) = 2\ln(x) - x$$ Soit h' la fonction dérivée de h sur $]0\ ;+\infty[$. Alors l'expression de h' est :	A. $h'(x) = \frac{2-x}{x}$ B. $h'(x) = \frac{2}{x} - x$ C. $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$ D. $h'(x) = \frac{2}{x} + 1$

III PROBABILITÉS

III. 1 GÉNÉRALITÉS

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2011 (3 obligatoire)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux évènements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.
En France les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % *des hommes et* 5 % *des femmes sont asthmatiques.*

Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

PARTIE A : Étude de l'état d'asthme du couple

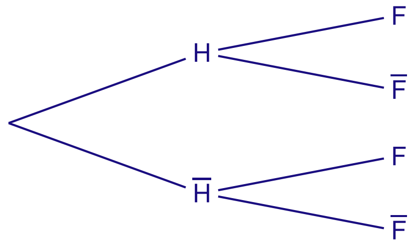
On note :

H l'évènement : « L'homme est asthmatique »,

et F l'évènement : « La femme est asthmatique ».

On admet que les évènements H et F sont indépendants.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. On note les évènements :

   A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »

   B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »

   C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

   Montrer que : $P(\mathrm{A}) = 0{,}912$; $P(\mathrm{B}) = 0{,}086$; $P(\mathrm{C}) = 0{,}002$.

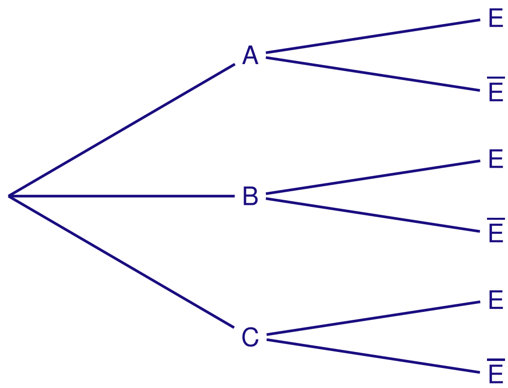
PARTIE A : Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

— Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
— Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
— Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'évènement : « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

1. Reproduire sur votre copie puis compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Montrer que $P(\mathrm{E}) = 0{,}118$.
3. Calculer $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$ et interpréter le résultat.
   Déduire $P_{\mathrm{E}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)$ et interpréter le résultat.
4. Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ? (*Indication :* on pourra chercher à calculer l'évènement contraire)

EXERCICE 2

Asie 2011 (3)

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B.
Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.
Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.
On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

— A : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A ».
— B : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B ».
— S : « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.
3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.
   L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.
4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? (le résultat sera arrondi à 10^{-2})

EXERCICE 3

Nouvelle Calédonie 2011 (2 obligatoire)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième et donnés sous forme décimale.

Jade est une jeune cavalière qui participe régulièrement à des concours d'obstacles.
À chaque concours, sa monitrice met à sa disposition l'un des trois chevaux du club.
À l'issue de chaque concours, elle a noté sur une fiche le nom de sa monture ainsi que la performance qu'elle a réalisée.
L'examen de la collection de fiches ainsi constituée a permis à Jade de constater que :

— Six fois sur dix, elle a monté Cacahuète, une vieille jument docile mais qui fait souvent tomber les barres d'obstacle. Lorsqu'elle a monté Cacahuète, Jade a réussi son parcours deux fois sur cinq.
— Trois fois sur dix, elle a monté la jeune jument Tornade. C'est une jument performante mais difficile à maitriser. Lorsque Jade l'a montée, elle a réussi son parcours une fois sur deux.
— Lors des autres concours, Jade a monté le courageux et régulier Abricot et avec lui, elle a réussi son parcours quatre fois sur cinq.

Jade prend au hasard une fiche parmi sa collection. On s'intéresse au nom du cheval et au résultat du concours mentionnés sur la fiche.
On note :

— C l'évènement « Jade montait Cacahuète. »
— T l'évènement « Jade montait Tornade. »
— A l'évènement « Jade montait Abricot. »
— R l'évènement « Jade a réussi son parcours. »
— $\overline{R}$ l'évènement « Jade n'a pas réussi son parcours. »

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Jade montait Abricot et a réussi son parcours ».
   Calculer la probabilité de l'évènement : « Jade montait Cacahuète et a réussi son parcours ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement : « Jade a réussi son parcours » est égale à 0,47.
4. Sachant que Jade a réussi son parcours, quelle est la probabilité que ce jour là elle ait monté Tornade ?
5. Sachant que Jade n'a pas réussi son parcours, quelle est la probabilité que ce jour là elle ait monté Abricot ?

III. 2 LOI BINOIMIALE

EXERCICE 1 *Amérique du Sud 2011 (3 obligatoire)*

Dans tout cet exercice on donnera la valeur exacte de chaque résultat.

Grâce à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de sortir pour le saisir :

— s'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;

— s'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux du détecteur de l'une de ces bornes :

— lorsqu'un camion passe, il n'est correctement détecté que deux fois sur trois ;

— lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint d'en sortir pour saisir son ticket une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage 60 % des véhicules sont des camions. On considère les évènements suivants :

— C : « Le véhicule qui se présente est un camion »

— H : « Le ticket sort en haut »

— B : « Le ticket sort en bas ».

Notation : pour tout évènement E et tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p(E)$ la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.

1. Donner les probabilités : $p(\text{C})$; $p_{\overline{\text{C}}}(\text{H})$ et $p_{\overline{\text{C}}}(\text{B})$.
2. Construire un arbre probabiliste présentant la situation.
3. Calculer la probabilité que le ticket sorte en haut.
4. Montrer que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de sortir de son véhicule pour saisir le ticket vaut 0,7.
5. Trois véhicules se présentent l'un après l'autre à cette borne de péage défectueuse. On modélise cette situation comme un tirage avec remise.
   Calculer la probabilité qu'au moins l'un des conducteurs soit contraint de descendre de son véhicule pour saisir son ticket.

EXERCICE 2 *Antilles Guyane 2011 (1)*

Dans chaque programme de construction proposé par un grand constructeur immobilier, les acquéreurs doivent choisir entre la pose de moquette, de carrelage ou de sol plastifié pour revêtir le sol du salon. Pour le revêtement des murs du salon, ils ont le choix entre peinture ou papier peint.

Le recueil des choix des acquéreurs par l'entreprise donne les résultats suivants :

— 20 % ont choisi la moquette ;

— 50 % ont choisi le carrelage ;

— les autres acquéreurs ont choisi la pose de sol plastifié.

Parmi les acquéreurs ayant choisi la moquette, 46 % choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
Parmi les acquéreurs ayant choisi le carrelage, 52 % choisissent le papier peint pour le revêtement des murs.
42,7 % des acquéreurs ont choisi le papier peint pour le revêtement des murs.

On interroge au hasard un acquéreur de logement construit par cette entreprise.
On considère les évènements suivants :

M l'évènement : « l'acquéreur a choisi la pose de moquette » ;

C l'évènement : « l'acquéreur a choisi la pose de carrelage » ;

S l'évènement : « l'acquéreur a choisi la pose de sol plastifié » ;

P l'évènement : « l'acquéreur a choisi la pose de papier peint » ;

$\overline{P}$ l'évènement contraire de P, correspondant à : « l'acquéreur a choisi la peinture ».

Les résultats seront donnés sous forme décimale, et arrondis au millième.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.
2. a) Décrire l'évènement $M \cap P$.
   b) Calculer la probabilité $p(M \cap P)$.
3. a) Montrer que la probabilité que l'acquéreur ait choisi la pose de sol plastifié et de papier peint est égale à 0,075.
   b) L'acquéreur a choisi le sol plastifié. Calculer la probabilité qu'il ait choisi le papier peint.
4. On interroge au hasard et de façon indépendante trois acquéreurs parmi tous les clients du constructeur.
   a) Calculer la probabilité, notée p_1, qu'au moins un des trois acquéreurs ait choisi le papier peint.
   b) Calculer la probabilité, notée p_2, qu'exactement deux des trois acquéreurs aient choisi le papier peint.

EXERCICE 3

Antilles Guyane Septembre 2011 (2 obligatoire)

À l'occasion d'un festival culturel, une agence de voyages propose trois types de transport pour permettre à chaque client de se rendre dans la ville organisatrice afin d'assister à la cérémonie d'ouverture.
Les trois moyens de transport proposés sont l'avion, le train ou le car.
À chacun des clients qui achètent un billet de transport, l'agence propose de souscrire une assurance multirisque qui permet, sous certaines conditions, une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages.

Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, que 40 % choisissent le train et que les autres choisissent le car.
De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisque ; ils sont 8 % à choisir cette assurance parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car.

On prend au hasard le dossier d'un client qui se rendra à la cérémonie d'ouverture du festival, chaque dossier ayant la même probabilité d'être choisi.
On note :

— A l'évènement : « Le client a acheté un billet d'avion » ;

— T l'évènement : « Le client a acheté un billet de train » ;

— C l'évènement : « Le client a acheté un billet de car » ;

— S l'évènement : « Le client a souscrit une assurance multirisque » et $\overline{\text{S}}$ son évènement contraire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisque. On donnera la valeur exacte de cette probabilité.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,144.
4. On prend un dossier au hasard parmi les clients n'ayant pas souscrit une assurance multirisque.
   Calculer la probabilité que ce dossier soit celui d'un client voyageant en train. Le résultat sera donné arrondi au millième.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On choisit trois dossiers au hasard, indépendamment les uns des autres.
Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque.

EXERCICE 4

France Métropolitaine 2011 (2 obligatoire)

Une chaîne de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

— 12 % des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur,

— parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20 % ont un défaut dans la forme,

— parmi les vêtements n'ayant pas de défaut dans la couleur, 8 % présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la couleur » et $\overline{C}$ l'évènement contraire.
On appelle F l'évènement « le vêtement présente un défaut dans la forme » et $\overline{F}$ l'évènement contraire.
Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme.
   b) Calculer la probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme.
   c) Les évènements C et F sont-ils indépendants ? Justifier.
3. Le directeur de l'usine affirme que 92 % des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut.
Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.
4. Les employés de l'usine sont autorisés à acheter des vêtements à tarif préférentiel.
L'un d'entre eux choisit au hasard trois vêtements. Le nombre de vêtements fabriqués est suffisamment grand pour considérer que les trois choix sont indépendants.
Quelle est la probabilité pour qu'aucun de ces trois vêtements choisis ne présente de défaut ? Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

EXERCICE 5

France Métropolitaine Septembre 2011 (1)

Pierre, le président d'un club de judo. veut acheter 60 médailles ayant la même référence. Elles sont gravées à l'effigie d'une ou d'un champion Doullet, Rinar ou Vécosse. Il passe commande chez un grossiste qui travaille avec deux fournisseurs A et B. Le tableau suivant indique les caractéristiques du colis contenant les 60 médailles envoyées par le grossiste :

	Doullet	Rinar	Vécosse	Total
Fournisseur A	10	10	10	30
Fournisseur B	5	10	15	30
Total	15	20	25	60

Pierre reçoit le colis, et tire au hasard une médaille. Dans la suite de l'exercice, on suppose que chaque médaille a la même probabilité d'être tirée.

1. a) Montrer que la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse est égale à $\dfrac{5}{12}$.
   b) Quelle est la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse et provienne du fournisseur B ?

c) Pierre constate que la médaille tirée est à l'effigie de Vécosse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B ?

Pierre remet la médaille dans le colis.

2. Pierre répète maintenant trois fois de suite les mêmes gestes :
   - il tire au hasard une médaille ;
   - il note l'effigie du champion et remet la médaille dans le colis.

   Quelle est la probabilité qu'au moins une des médailles soit à l'effigie de Vécosse ?

EXERCICE 6

La Réunion 2011 (2)

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'internet un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale.
On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement internet.
- 1740 élèves utilisent régulièrement internet.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée.
On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité.
On note :

- S l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde »
- E l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première »
- T l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale »
- I l'évènement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet »

1. Compléter le tableau d'effectifs donné en annexe.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement internet.
3. Calculer la probabilité de I sachant T, notée $p_T(I)$, et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
4. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas internet.
5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet.
   Montrer que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à $\dfrac{21}{58}$.
6. On choisit au hasard, successivement et avec remise, trois questionnaires.
   Quelle est la probabilité que, parmi les trois questionnaires, un exactement soit celui d'un élève utilisateur régulier d'internet ?
   On en donnera la valeur arrondie au millième.

ANNEXE de l'exercice 2

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement				
N'utilise pas internet régulièrement				
Total				

EXERCICE 7 *Liban 2011 (4 obligatoire)*

On rappelle que pour tout évènement A et B d'un univers :

— l'évènement « A et B » est noté $A \cap B$,

— la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$,

— si $P(A) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $P_A(B)$.

Lors de l'année de terminale ES, les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire.
Un candidat au baccalauréat ES a une probabilité de 0,9 d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de 0,2 s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note :

— T l'évènement « le candidat a travaillé sérieusement »

— A l'évènement « le candidat est admis au baccalauréat ES »

— S l'évènement « Le candidat est surpris ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat ES.
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a) $T \cap A$
   b) $T \cap \overline{A}$
   c) $\overline{T} \cap A$
   d) $\overline{T} \cap \overline{A}$
3. a) Déterminer la probabilité que le candidat interrogé soit admis.
   b) Le candidat est admis. Déterminer la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est 0,125.
5. On interroge trois élèves au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit surpris ?

EXERCICE 8 *Nouvelle Calédonie Deuxième session 2010 (1 obligatoire)*

Lors d'un sondage organisé dans différents pays de l'Union Européenne sur une population comportant 52 % de femmes et 48 % d'hommes, on a posé la question suivante : « Qu'est-ce qui renforcerait le plus votre sentiment d'être un citoyen européen ? »
31 % des femmes interrogées et 34 % des hommes interrogés ont répondu qu'un système européen de protection sociale serait l'élément qui renforcerait le plus leur sentiment d'être un citoyen européen.
(*Source : « le futur de l'Europe », Commission Européenne, sondage réalisé en mars 2006*)

On prélève au hasard la réponse d'une personne prise au hasard parmi les réponses des personnes interrogées lors de ce sondage.
On appelle :

— H : l'évènement « la réponse est celle d'un homme ».

— F : l'évènement « la réponse est celle d'une femme ».

— S : l'évènement « la réponse est un système de protection social européen ».

1. Dessiner un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'une réponse du sondage soit celle d'un homme souhaitant avoir un système de protection social européen. On donnera la valeur exacte.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est 0,3244.
4. Sachant que la personne souhaite avoir un système de protection social européen, calculer la probabilité, arrondie au millième, que ce soit une femme.
5. On choisit au hasard trois réponses de ce sondage.

   On admet que le nombre de réponses est suffisamment grand pour assimiler le choix de trois réponses à des tirages successifs indépendants avec remise.

   Déterminer la probabilité qu'au moins deux des trois réponses soient « avoir un système de protection social européen ». *On arrondira le résultat au millième.*

EXERCICE 9

Polynésie 2011 (3 obligatoire)

Une session du baccalauréat se compose de deux parties :

— le premier groupe d'épreuves (encore appelé : « écrit » par abus de langage ou « premier tour ») ;

— le second groupe d'épreuves (encore appelé : « oral de rattrapage » ou « second tour »).
Ce second groupe d'épreuves concerne les candidats n'ayant pas obtenu le bac à l'issue du premier groupe, mais ayant obtenu une moyenne générale supérieure ou égale à 08/20.

Les résultats au baccalauréat ES, en France métropolitaine et DOM, pour la session de juin 2010 à l'issue du premier groupe d'épreuves sont les suivants :

— 74,3 % des candidats ont été reçus à l'issue du premier tour (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $m \geqslant 10$) ;

— 17,8 % des candidats sont allés aux oraux de rattrapage (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $8 \leqslant m < 10$) ;

— les autres candidats ont été recalés (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $m < 8$).

Le taux final de réussite au baccalauréat ES, en France métropolitaine et DOM, pour la session 2010 à l'issue des deux groupes d'épreuves est 86,1 %.

On interroge au hasard un candidat ayant passé le baccalauréat ES en 2010.
On note :

— R_1 l'évènement : « le candidat interrogé a obtenu le baccalauréat à l'issue du premier tour » ;

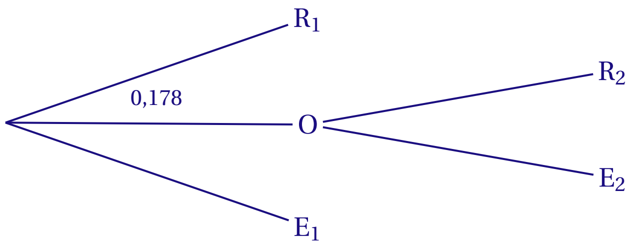
— O l'évènement : « le candidat interrogé est allé à l'oral de rattrapage » ;

— E_1 l'évènement : « le candidat interrogé a été recalé à l'issue du premier tour » ;

— R_2 l'évènement : « le candidat interrogé a obtenu le baccalauréat à l'issue de l'oral de rattrapage » ;

— E_2 l'évènement : « le candidat interrogé a été recalé à l'issue de l'oral de rattrapage ».

On peut modéliser la situation par l'arbre (partiellement pondéré) ci-dessous, qu'on ne demande pas de compléter pour l'instant :



Si X est un évènement, on note $p(X)$ sa probabilité.

Dans cet exercice les résultats demandés seront arrondis au millième.

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes : $p(\mathrm{R}_1)$; $p(\mathrm{O})$ et $p(\mathrm{E}_1)$.
2. On appelle A l'évènement : « le candidat interrogé a obtenu son baccalauréat » : on a donc $p(\mathrm{A}) = 0{,}861$.
   Montrer que $p(\mathrm{O} \cap \mathrm{R}_2) = 0{,}118$ et interpréter ce résultat.
3. Calculer $p_{\mathrm{O}}(\mathrm{R}_2)$, probabilité de l'évènement R_2 sachant que l'évènement O est réalisé. Interpréter ce résultat.
4. Recopier et compléter l'arbre partiellement pondéré, donné ci-dessus.
5. On interroge au hasard trois candidats ayant passé le baccalauréat ES en 2010 pour savoir s'ils l'ont obtenu. On suppose que le nombre de candidats à cette session est suffisamment grand pour considérer ces trois réponses comme indépendantes.
   a) Calculer la probabilité que les trois candidats aient été admis.
   b) Calculer la probabilité qu'au moins deux des candidats aient été admis.

III. 3 VARIABLE NUMÉRIQUE

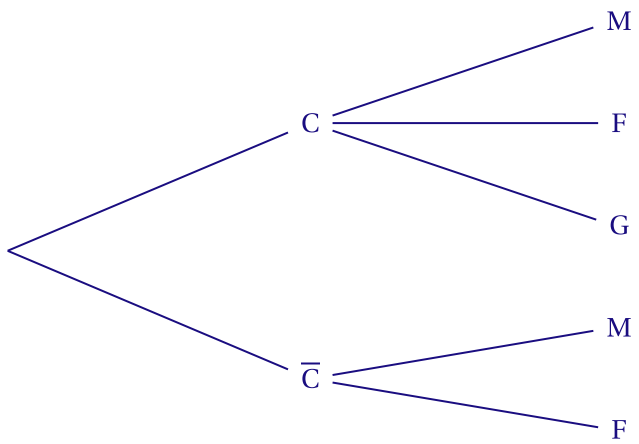
EXERCICE 1

Centres étrangers 2011 (4)

Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture.
Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture. Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5.
Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60 % des cas.
Un client achète une barquette. On notera :

— C l'évènement « le client achète une barquette de fruits à confiture »,
— F l'évènement « le client demande des framboises »,
— G l'évènement « le client demande des groseilles »,
— M l'évènement « le client demande des myrtilles ».

1. Reporter sur l'arbre donné ci-dessous, les données de l'énoncé.



On pourra compléter l'arbre avec les réponses obtenues dans les questions suivantes.

2. a) Calculer la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruits à confiture.
   b) Le client achète une barquette de fruits à déguster ; quelle est la probabilité qu'il demande des myrtilles ?
3. Montrer que la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.
4. Le client achète une barquette de framboises. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture ?
5. Le producteur vend 5 euros la barquette de fruits à confiture, quel que soit le fruit, 2 euros la barquette de framboises à déguster et 3 euros la barquette de myrtilles à déguster ;
   a) On note x_i les valeurs possibles, en euros, du gain du producteur par barquette vendue et p_i leur probabilité. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi du gain du producteur par barquette vendue.
   On justifiera les réponses.

Valeur : x_i	5	2	3
Probabilité associée : p_i			

   b) Calculer l'espérance de cette loi de probabilité.
   c) Déterminer le gain en euros que le producteur peut espérer pour 150 barquettes vendues ?

EXERCICE 2 *Polynésie Septembre 2011 (2 obligatoire)*

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

— 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif;

— parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio;

— parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :
T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{\text{T}}$ son évènement contraire;
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{\text{B}}$ son évènement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. a) Donner sans justification la probabilité $p(\text{T})$ de l'évènement T.
   b) Donner sans justification $p_{\text{T}}(\text{B})$ et $p_{\overline{\text{T}}}(\text{B})$
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. a) Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».
   b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.
4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).
5. Les évènements T et B sont-ils indépendants? Justifier.
6. Calculer la probabilité de l'évènement $\text{T} \cup \text{B}$ puis interpréter ce résultat.
7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
   Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.
   a) Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S? (on n'attend pas de justification).
   b) Donner la loi de probabilité de S.
   c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 *Pondichéry 2011 (1)*

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

— un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients;

— une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

— parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café;

— parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café;

— parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

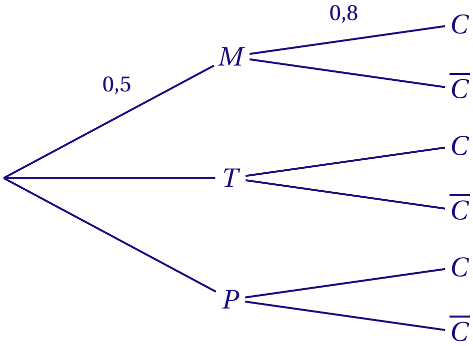
— M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;

— T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;

— P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;

— C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'évènement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $P_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a) Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.

   b) Montrer que $p(C) = 0{,}76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).
5. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €. Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   a) Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

   b) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$p(s_i)$	0,02	0,18	...			

   c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

IV STATISTIQUES

IV. 1 AJUSTEMENT AFFINE D'UN NUAGE DE POINTS

EXERCICE 1

Antilles Guyane 2011 (3 obligatoire)

Les parties A et B de ce exercice sont indépendantes

Le tableau suivant donne le nombre de cartes bancaires, en France, exprimé en millions, entre 2002 et 2009.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de cartes bancaires : y_i (en millions)	45,4	47,6	49,1	51,2	53,6	55,7	57,5	58,4

(source : INSEE / groupement des cartes bancaires)

PARTIE A

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$, avec $0 \leqslant i \leqslant 7$, associé à cette série statistique dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :
   — sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année ;
   — sur l'axe des ordonnées, on placera 45 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 million.
2. Un ajustement affine du nuage de points paraît justifié.
   a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite (D) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.
   b) Tracer la droite (D) dans le repère précédent.
3. En admettant que cet ajustement affine reste valable pour les années suivantes, estimer le nombre de cartes bancaires en France en 2011.
   Le résultat sera exprimé en millions et arrondi au dixième.

PARTIE B

1. Justifier que le pourcentage d'augmentation du nombre de cartes bancaires en France entre les années 2008 et 2009 est d'environ 1,6 %.
2. On admet que ce pourcentage annuel d'augmentation est valable pour les années à venir, à partir de 2009. Sous cette hypothèse, estimer le nombre de cartes bancaires en France en 2011. Le résultat sera exprimé en millions et arrondi au dixième.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Toujours sous l'hypothèse d'une augmentation annuelle de 1,6 %, déterminer à partir de quelle année l'estimation du nombre de cartes bancaires en France sera supérieure à 63 millions.

EXERCICE 2

La Réunion 2011 (3 obligatoire)

Dans cet exercice tous les résultats numériques seront arrondis à l'unité sauf indication contraire.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'hypermarchés (établissement, réalisant plus d'un tiers de leurs ventes en alimentation et dont la surface est supérieure à 2500m^2 en France de l'année 1991 à l'année 2003.

Année	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003
Rang de l'année x_i	1	3	5	7	9	11	13
Nombre d'hypermarchés y_i	862	955	1048	1142	1184	1261	1343

Source INSEE, compte de commerce.

PARTIE A– Un ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal.
   Unités graphiques : 1 cm représente une année en abscisse et 1 cm représente 100 hypermarchés en ordonnée; faire débuter la graduation à 800 sur l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer dans le repère précédent.
3. Dans cette question, les calculs seront effectués à la calculatrice.
   Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter cette droite D dans le repère précédent.
4. En supposant que ce modèle reste valide jusqu'en 2012, en déduire une estimation du nombre d'hypermarché, en France pour l'année 2012.

PARTIE B– Un nouvel ajustement

Les relevés précédents permettent de considérer que le nombre d'hypermarchés en France augmente de 3,2 % par an à partir de 2003.
On suppose que cette progression reste valide jusqu'en 2018.

1. Déterminer une estimation du nombre d'hypermarchés en France pour l'année 2012.
   Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
2. Déterminer à partir de quelle année le nombre d'hypermarchés en France dépassera 2000.

EXERCICE 3 *Nouvelle Calédonie 2011 (3)*

On s'intéresse à la quantité de thons blancs pêchée par an (en milliers de tonnes) en Nouvelle-Calédonie.
On utilise plusieurs méthodes pour modéliser l'évolution de cette quantité et estimer sa valeur en 2010.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Quantité y_i en milliers de tonnes de thons blancs pêchée	55,7	77,4	88,2	73,7	73,5	85,0	92,5

Source : Service de la Marine marchande et des pêches maritimes

1. a) On décide de modéliser la quantité de thons blancs pêchée à l'aide d'un ajustement affine. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Pour chacun des coefficients, donner la valeur décimale arrondie au centième.
   b) On suppose que l'évolution pour 2010 se poursuit sur le même modèle, utiliser cet ajustement pour donner une estimation de la quantité de thons blancs pêchée en 2010.
   On donnera une valeur arrondie au millier de tonnes.
2. On sait que 82,7 milliers de tonnes de thons blancs ont été péchés au cours des neuf premiers mois de l'année 2010. On ne connaît pas la quantité pêchée pendant les trois derniers mois de l'année.
   Les années précédentes, de 2003 à 2009, la quantité de thons blancs pêchée de janvier à fin septembre représentait en moyenne 73 % de la quantité annuelle.
   En considérant que cette proportion demeure en 2010, proposer une nouvelle estimation de la quantité de thons blancs pêchée en 2010.
   On donnera une valeur arrondie au millier de tonnes.
3. a) Calculer le taux d'évolution global (en pourcentage, arrondi au dixième) entre 2003 et 2009 de la quantité pêchée puis montrer que le taux d'évolution moyen annuel de cette quantité, arrondi au dixième d'unité de pourcentage, est égal à 8,8 %.
   b) Utiliser ce taux pour proposer une autre estimation de la quantité de thons blancs pêchée en 2010.
   On donnera une valeur arrondie au millier de tonnes.

IV. 2 AJUSTEMENT EXPONENTIEL D'UN NUAGE DE POINTS

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2011 (2)

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes, situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.
Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.
Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900.
Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.
On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900)	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km)	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Mesures déduites de : The Swiss Glaciers,Yearbooks of the Glaciological Commission of the Swiss

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25,6 - 0,6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} *près.*

PARTIE A : Étude d'un modèle affine

1. Tracer le nuage de points dans le repère donné en annexe (Durée t en abscisse, distance r en ordonnée).
2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.
3. À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :
   a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.
   b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

PARTIE B : Utilisation d'un modèle exponentiel

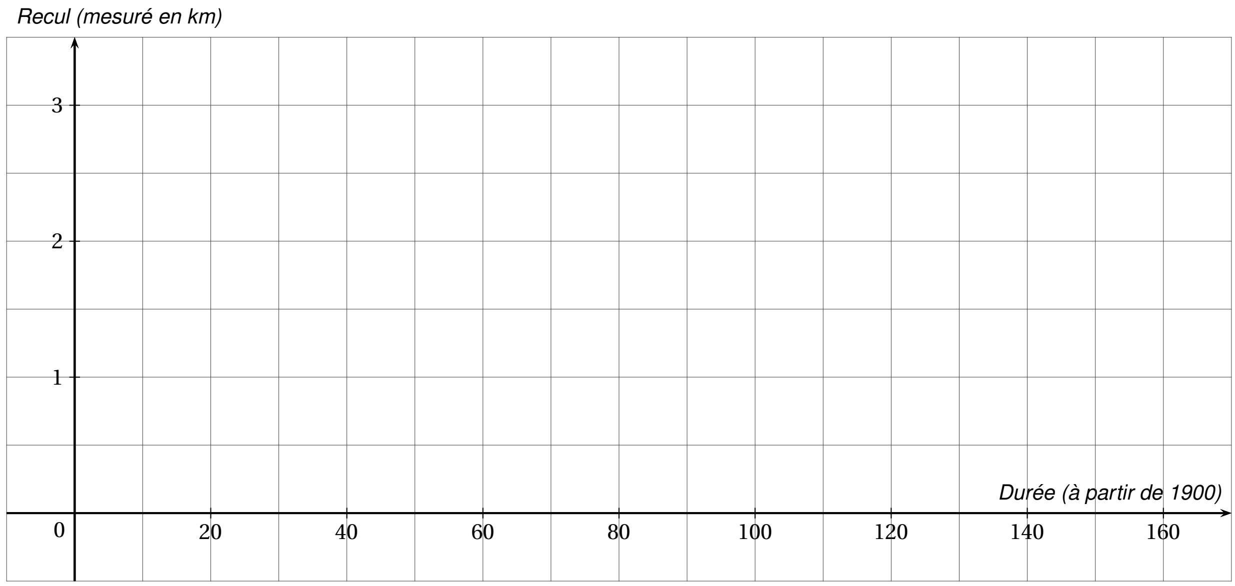
Le résultat du 3. b de la partie A étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.
On pose $y = \ln(r)$. On rappelle que $\ln(r)$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1. Recopier puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau.

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln(r)$					

2. a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.
   b) Déduire que $r(t) = \mathrm{e}^{0,025t-1,599}$.
3. En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :
   a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.
   b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

ANNEXE



EXERCICE 2

Amérique du Sud 2011 (4)

Une substance médicamenteuse est injectée par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent l'injection, la substance est éliminée par les reins.
La quantité q_i de substance présente dans le sang (q_i en milligrammes) à l'instant t_i (t_i en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

t_i (en heures)	0	2	4	6	8
q_i (en mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

PARTIE A- Modélisation par une fonction affine

Le nuage de points associé à la série $(t_i ; q_i)$, représenté dans un repère orthogonal, est donné sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite (D) d'ajustement affine de q en t par la méthode des moindres carrés. On donnera la valeur des coefficients arrondie au centième.
2. Tracer la droite (D) sur la feuille annexe.
3. En supposant que ce modèle reste valable pendant 12 heures, donner une estimation de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

PARTIE B - Autre modélisation

On pose $y_i = \dfrac{\ln(q_i)}{\ln(10)}$.

1. Compléter le tableau de l'annexe. On arrondira les valeurs au centième.
2. a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la forme $y = at + b$ de la droite d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés. On arrondira a à 10^{-3} et b à l'unité.

   b) Montrer que l'expression de q en fonction de t obtenue à partir de cet ajustement est de la forme : $q(t) = B\mathrm{e}^{-At}$ (on donnera l'arrondi au centième de A et la valeur de B arrondie à l'unité).
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;12]$ par $f(t) = 10\mathrm{e}^{-0,15t}$.

   a) Étudier le sens de variation de la fonction f.

b) On suppose que la quantité q de substance présente dans le sang à l'instant t (t exprimé en heures) est donnée par $q(t) = f(t)$ pour t variant de 0 à 12 heures.
Calculer à 10^{-1} près la quantité de substance présente dans le sang au bout de 12 heures.

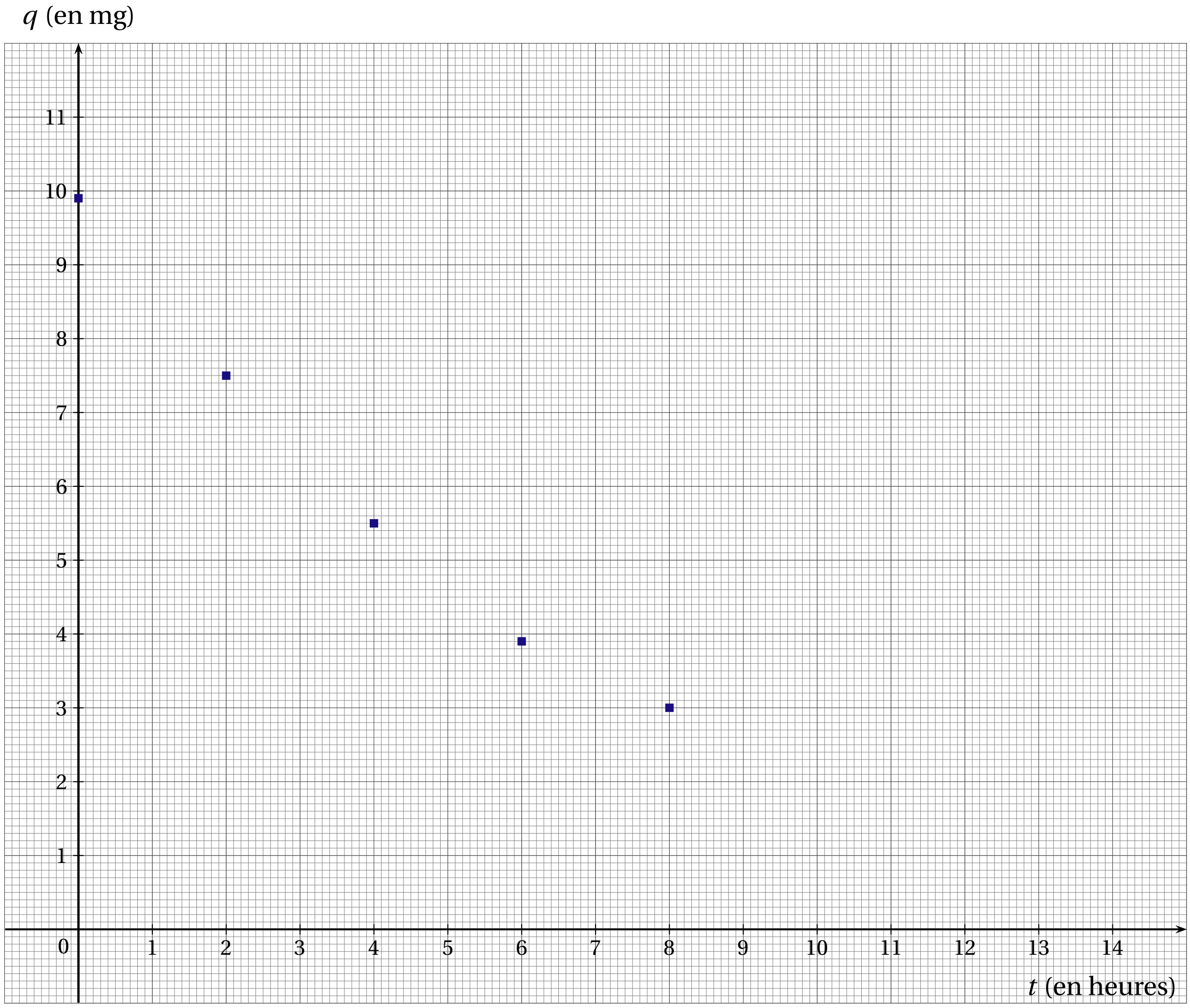
c) En comparant les réponses trouvées à la question précédente et à la question 3 de la partie A, dire lequel de ces deux modèles vous paraît le mieux adapté à la situation.

PARTIE C - Valeur moyenne

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;12]$ par $F(t) = -\dfrac{200}{3}\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   Montrer que F est une primitive de f sur $[0;12]$.
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.
3. En déduire, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

ANNEXE DE L'EXERCICE 4

PARTIE A



PARTIE B

t_i (en heures)	0	2	4	6	8
y_i (au centième près)					

EXERCICE 3

Antilles Guyane Septembre 2011 (3)

Le tableau ci-dessous donne la fréquentation des lignes aériennes, en millions de passagers, entre la France métropolitaine et les pays étrangers depuis 1980 (source INSEE).

Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2008
Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	28
Nombre de passagers y_i (en millions)	21,9	26,4	36,9	44,7	67	82	97,9

On cherche à étudier l'évolution du nombre de passagers y entre la France métropolitaine et les pays étrangers en fonction du rang x de l'année.

1. Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre de passagers entre 2005 et 2008 (le résultat sera arrondi à 0,1 %).

2. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ associé à cette série dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :
   0,5 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses;
   1 cm pour 10 millions de passagers sur l'axe des ordonnées.
3. Expliquer pourquoi un ajustement affine ne semble pas adapté.
   L'allure du nuage suggère un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z = \ln y$.
4. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	28
z_i	3,086						

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).
6. Montrer que l'on a la relation $y = Ae^{Bx}$ avec $A \approx 20{,}989$ et $B \approx 0{,}055$.
7. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Les compagnies aériennes prévoient que le pourcentage d'augmentation entre 2008 et 2011 sera de 30 %. Cela est-il cohérent avec l'ajustement exponentiel déterminé dans la question 6?

EXERCICE 4

Centres étrangers 2011 (2 obligatoire)

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre d'internautes en Chine de 2002 à 2009.
Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 2000.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'internautes y_i (en millions)	60	70	95	100	140	160	250	385

On cherche à étudier l'évolution du nombre d'internautes en fonction du rang x de l'année.

1. Calculer le taux d'évolution de ce nombre d'internautes entre 2002 et 2009. On donnera le résultat à 0,1 près.
2. Représenter sur votre copie le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :
   — Sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 1 an,
   — Sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 20 millions d'internautes (en plaçant 50 à l'origine).
3. On cherche dans un premier temps un ajustement affine.
   a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis à l'unité*).
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
   b) En supposant que cet ajustement reste valable pour l'année suivante, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en Chine en 2010.
4. Une étude récente a montré qu'au 1er mai 2010, on a dépassé les 400 millions d'internautes en Chine. On envisage donc un ajustement exponentiel et on pose $z = \ln y$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,094							

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients arrondis au millième*).

c) En déduire une expression de y en fonction de x.

d) En prenant l'approximation $y \approx 32{,}5 \times \mathrm{e}^{0{,}253x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation, arrondie au million, du nombre d'internautes en 2012.

EXERCICE 5

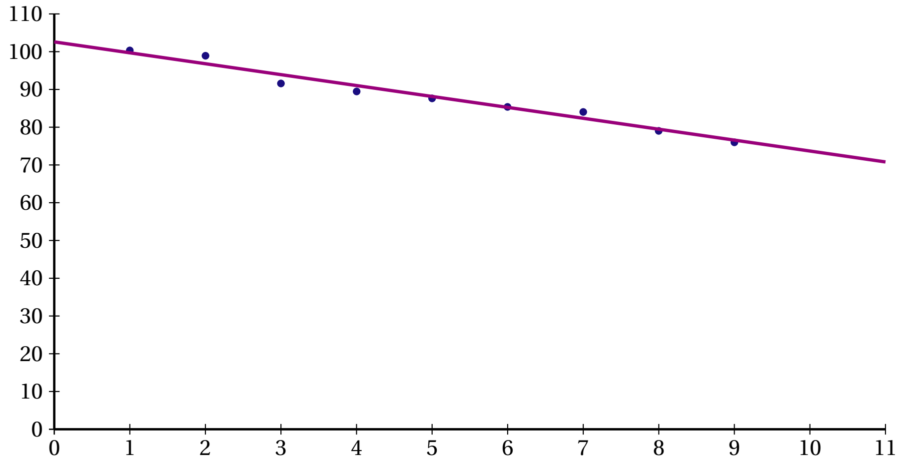
France Métropolitaine 2011 (1)

La Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) publie, chaque année, des statistiques sur les accidents du travail en France. Celles-ci permettent d'obtenir divers indicateurs, notamment l'indice de fréquence (nombre moyen d'accidents du travail avec arrêt pour 1000 salariés).
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice de fréquence pour le secteur du BTP (Bâtiment et Travaux Publics) en France, au cours des années 2001 à 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : $_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence : y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84,0	79,9	76,0

1. **Premier ajustement**

Grâce à un logiciel, un élève a obtenu le nuage de points représentant la série statistique $(x_i ; y_i)$ et, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x dont une équation est $y = -2{,}89x + 102{,}59$ (les coefficients sont arrondis à 0,01).



a) En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012.

b) Quel serait le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. **Deuxième ajustement**

Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique $(x_i ; y_i)$.
On pose $z_i = \ln y_i$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4,594	4,517						

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b étant arrondis à 10^{-4}.

c) En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = Ke^{-0,0328x}$, K étant une constante arrondie à 10^{-1} près.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25 % de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012.

Peut-on prévoir d'atteindre cet objectif selon les deux ajustements précédents, que l'on suppose valables jusqu'en 2012 ?

EXERCICE 6 — *Polynésie 2011 (2)*

L'objet de l'exercice consiste à étudier les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs (pacte civil de solidarité) signés entre partenaires de sexe opposé en France à partir de l'année 2000.

PARTIE A : Étude du nombre de mariages

Le tableau suivant donne le nombre de mariages en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de mariages y_i en milliers	305	296	286	283	278	283	274	274	265

Source. INSEE

Pour i entier variant entre 0 et 8, on a représenté en annexe 1 dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$ associé à cette série.

1. a) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).

   b) Représenter D dans le repère de l'annexe 1.

2. En utilisant cet ajustement affine, déterminer par la méthode de votre choix une estimation du nombre de mariages en France en 2012 (le résultat sera arrondi au millier).

PARTIE B : Étude du nombre de pacs

Le tableau suivant donne le nombre de pacs signés entre partenaires de sexe opposé en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de pacs Y_i	16	15	21	26	33	53	64	96	138

Source. INSEE

1. Représenter dans le repère de l'annexe 1 le nuage points $N_i\left(x_i ; Y_i\right)$ associé à cette nouvelle série statistique.

   L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. Pour i entier variant entre 0 et 8 on pose $Z_i = \ln Y_i$.

2. Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_i	2,77								

3. Une équation de la droite d'ajustement affine de Z en x par la méthode des moindres carrés est $Z = 0{,}29x + 2{,}51$ (les coefficients étant arrondis au centième).
   a) En utilisant la relation $Z = \ln Y$, justifier la relation : $y = 12{,}30\mathrm{e}^{0{,}29x}$.
   b) En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de pacs signés en France entre personnes de sexe opposé en 2012 (arrondir au millier).

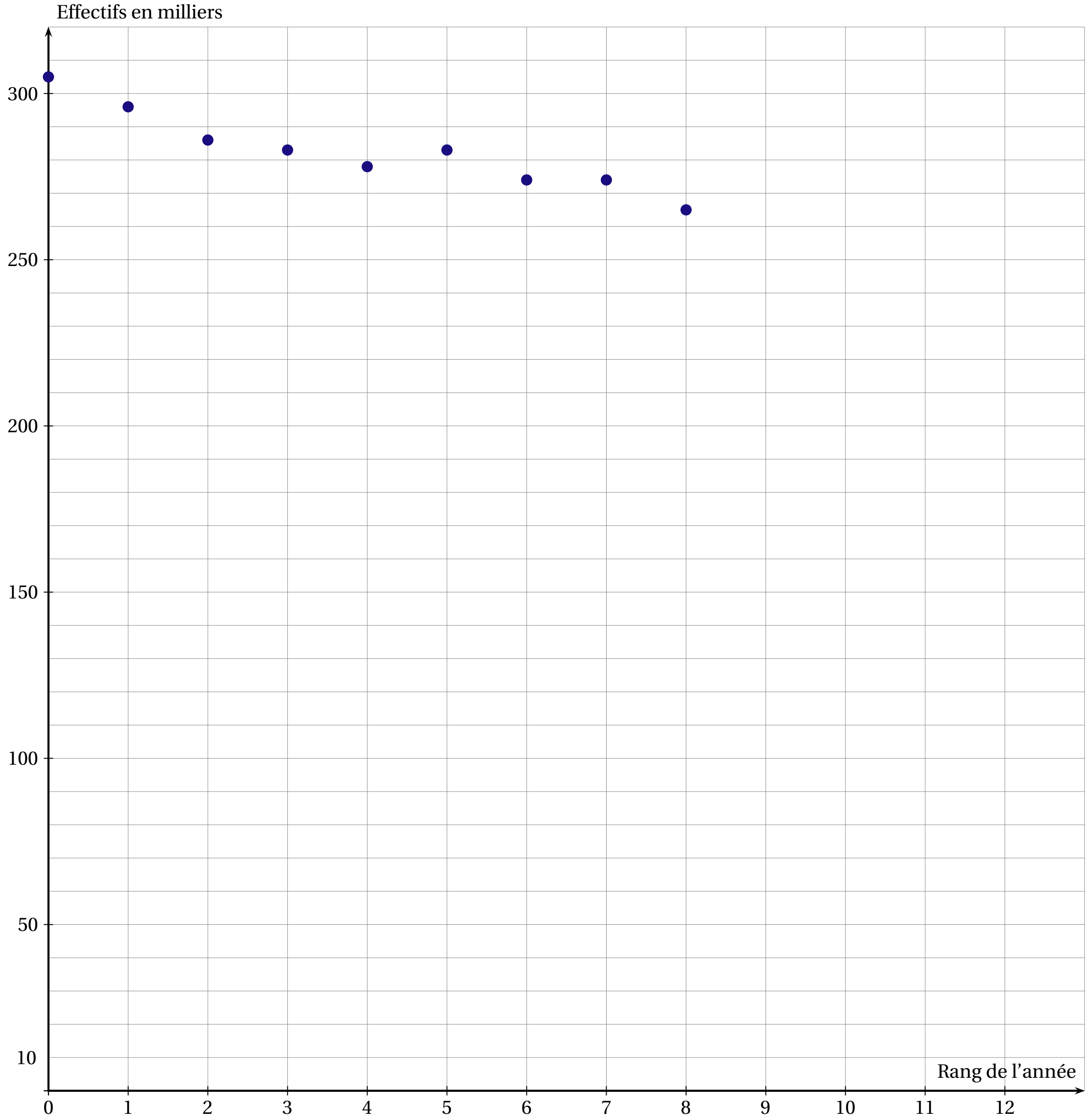
PARTIE B : Comparaison

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Si les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs signés entre personnes de sexe opposé en France se poursuivent selon les modèles décrits dans les parties A et B, estimer à partir de quelle année le nombre de pacs dépassera celui des mariages.

ANNEXE 1

À RENDRE AVEC LA COPIE



Légende :

- série du nombre de mariages en fonction du rang de l'année

EXERCICE 7

Polynésie Septembre 2011 (3)

Le tableau suivant donne la valeur de revente d'une machine outil au bout de t années d'utilisation (les prix sont donnés en centaines d'euros). On veut faire une estimation de son prix de revente au-delà de 6 ans.

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de revente y_i en centaines d'euros $0 \leqslant i \leqslant 6$	90	73,8	60	49,5	40,5	33	27

1. Quel est le pourcentage de baisse du prix de revente de la machine au bout de six ans d'utilisation (de t_0 à t_6) ?
2. Étude d'un modèle affine
   a) Représenter graphiquement le nuage de points $M_i\left(t_i\,;\,y_i\right)$ pour $0 \leqslant i \leqslant 6$ dans un repère orthogonal, en prenant comme unités graphiques : 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite dans le repère précédent.
   c) On sait qu'au bout de 10 ans la valeur de revente est de 1000 euros. Le modèle vous semble-t-il adapté pour des calculs à plus long terme ?
3. Étude d'un modèle exponentiel
   a) Pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$. Recopier et compléter le tableau suivant (en arrondissant les nombres au dixième) :

Temps écoulé depuis l'achat t_i $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln\left(y_i\right)$							

   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de z en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).
   c) En déduire que $y = \mathrm{e}^{-0,2t+4,5}$ est un ajustement exponentiel possible.
   d) Déterminer à l'aide de ce modèle une estimation de la valeur de revente au bout de 10 ans d'utilisation. Ce modèle vous semble-t-il mieux adapté que celui de l'ajustement affine ?
   Justifier la réponse.

EXERCICE 8

Pondichéry 2011 (3 obligatoire)

Le responsable d'un site Internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site chaque semaine.

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées, exprimé en milliers, durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	40	45	55	70

Ainsi, au cours de la deuxième semaine après l'ouverture du site, 45 000 pages ont été visitées.

1. Le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe dans un repère orthogonal. L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.
   a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis placer ce point sur le graphique de l'annexe 1.

b) On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Parmi les deux propositions ci-dessous, une seule correspond à l'équation réduite de la droite (d). Préciser laquelle, en utilisant le point moyen G :

$$y = 9x + 29 \qquad y = 10x + 27{,}5$$

c) Tracer la droite (d) sur le graphique de l'annexe.

2. En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

PARTIE B

Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site, une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site.
Il étudie ensuite l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	40	45	55	70	95	125	175

1. Compléter le nuage de points fourni dans l'annexe par les trois nouveaux points définis dans le tableau précédent.
   Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié.
   Pour cela on pose $z = \ln y$.
2. On donne ci-dessous les valeurs de $z_i = \ln\left(y_i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 7$, les résultats étant arrondis au centième.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln\left(y_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant 7$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

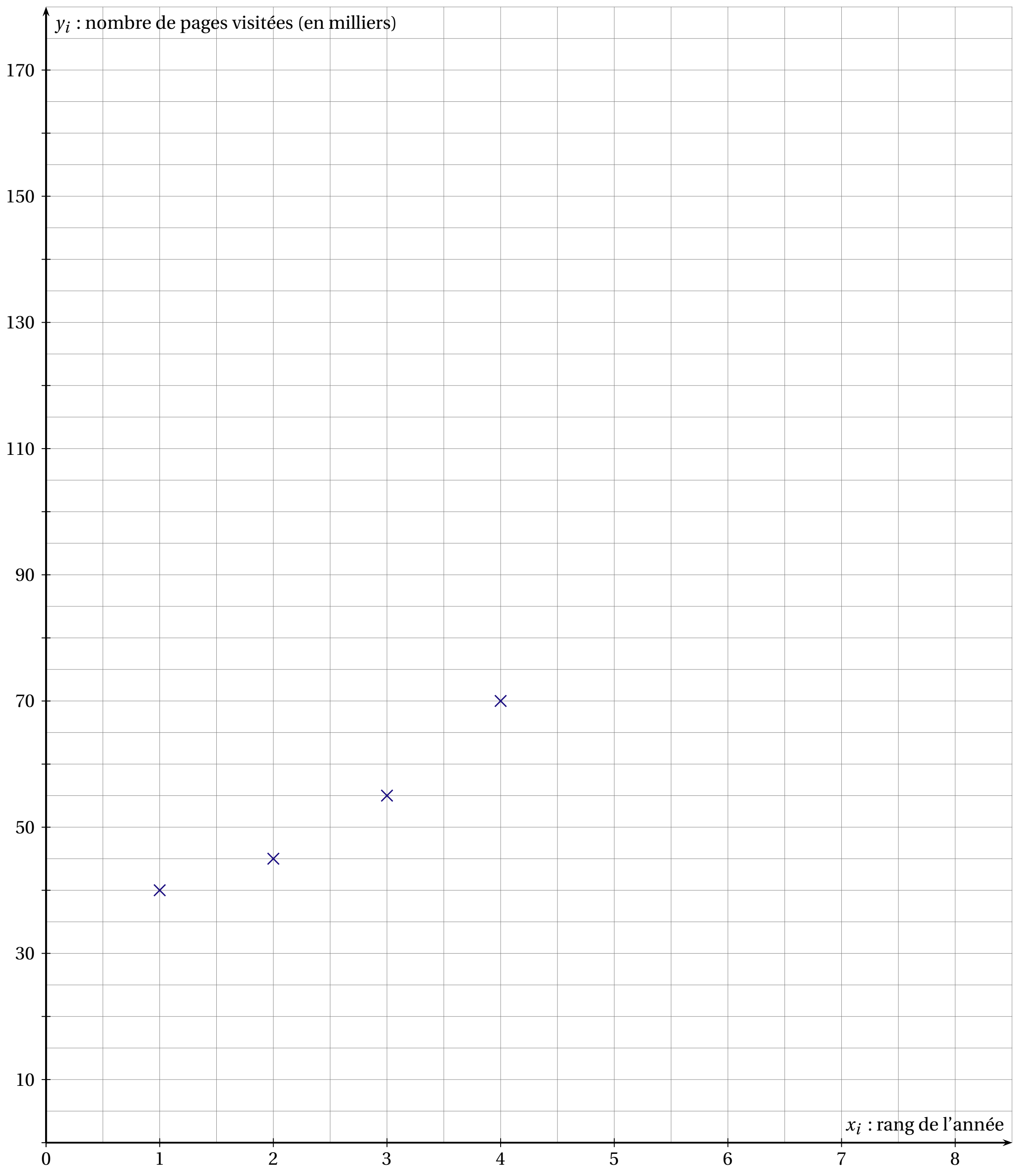
a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au centième.

b) En déduire la relation $y = \alpha e^{\beta x}$, où 27,94 et 0,25 sont des valeurs approchées au centième des réels α et β respectivement.

c) À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.
Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire ? (on utilisera l'ajustement obtenu dans la partie A).

ANNEXE 1

Exercice 3 : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



IV. 3 AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS

EXERCICE 1

Asie 2011 (1)

Le tableau ci-dessous indique, pour une année donnée, l'évolution de l'indice de consommation des produits des Technologies de l'Information et de la Communication (T. I. C.) des années 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Indice : y_i	100	114,14	131,17	147,06	166,56	189,63	219,38	251,01	268,14

Source : Insee comptes nationaux - base 2000

PARTIE A : ajustement exponentiel

1. Pour i entier variant de 0 à 8, construire le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$ associé à la série statistique dans le plan rapporté à un repère orthogonal fourni en annexe 1 *à rendre avec la copie*.
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = 101\text{e}^{0,13x}$. On suppose que la fonction f modélise un ajustement exponentiel de la série statistique $\left(x_i; y_i\right)$. Sa courbe représentative est tracée dans l'annexe 1.
   a) Déterminer les variations de la fonction f.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 350$. Interpréter le résultat obtenu.

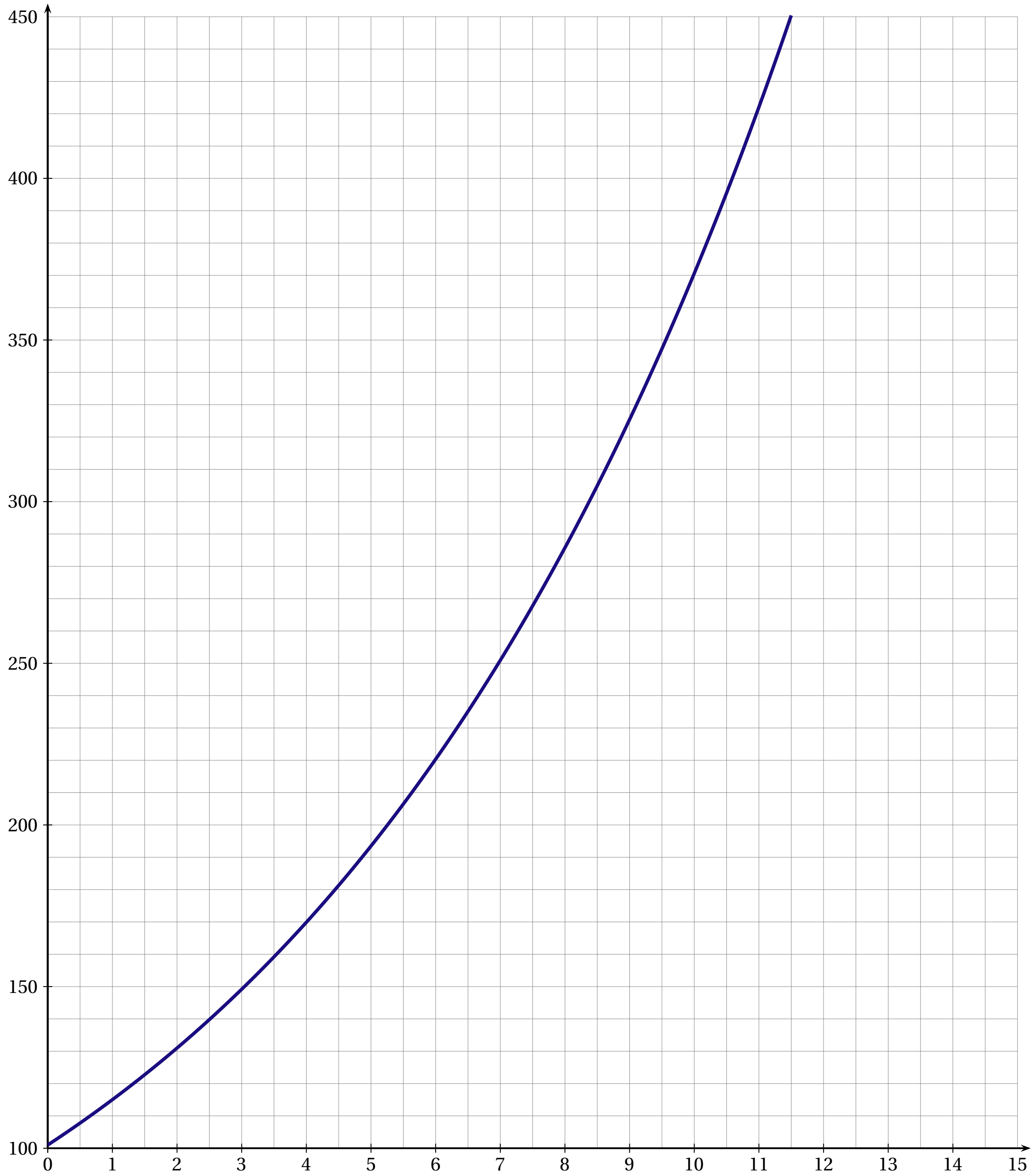
PARTIE B : ajustement affine

1. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$ (i entier variant de 0 à 8) puis le placer dans le graphique de l'annexe 1.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ de ce nuage par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients seront arrondis à* 10^{-2}.
   Tracer cette droite dans le graphique de l'annexe 1.
3. On suppose que le modèle affine reste valable jusqu'en 2014.
   Déterminer à partir de quelle année, l'indice de consommation des produits des T. I. C. sera supérieur à 350. Justifier votre réponse.

PARTIE C : Comparaison des modèles

On sait que pour l'année 2009, l'indice de consommation des produits des Techonologies de l'Information et de la Communication (T. I. C.) est de 284,24.
Des deux ajustements précédents, lequel donne l'estimation la plus proche de la réalité ? Justifier votre réponse.

ANNEXE 1 : À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 2

France Métropolitaine Septembre 2011 (2 obligatoire)

On s'intéresse au nombre de personnes atteintes d'une maladie A ou d'une maladie B en France entre 1970 et 2005.

Les données ont été représentées graphiquement sur l'annexe (à rendre avec la copie). On précise que sur l'axe des abscisses, le rang zéro correspond à l'année 1970, le rang cinq à l'année 1975.

PARTIE I. Maladie A

On envisage un ajustement affine du nuage de points correspondant à la maladie A. Voici une partie des données :

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : x_i	0	5	10	15	20	25	30	35
Nombre de personnes atteintes de la maladie A : y_i	4884	4303	3713	3175	2836	2352	2011	1789

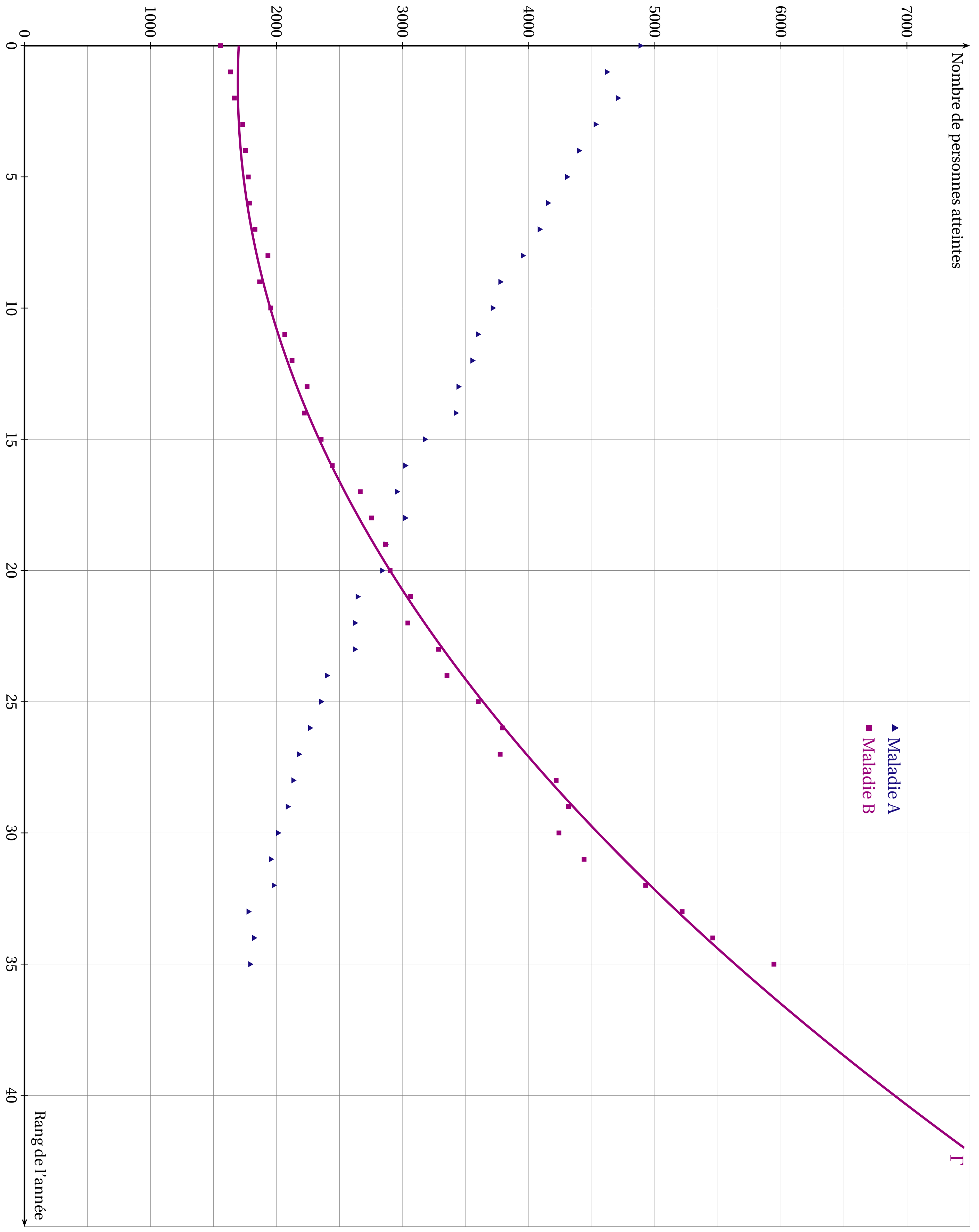
1. À l'aide de la calculatrice et en arrondissant les coefficients à l'unité, donner l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. Tracer cette droite dans le repère situé sur l'annexe.
3. En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2011, quelle prévision peut-on faire du nombre de personnes qui seront atteintes de cette maladie A en France en 2011 ?

PARTIE II. Maladie B

1. À partir des données du graphique concernant la maladie B (fournies en annexe), un ajustement affine parait-il approprié ? Justifier votre réponse.
2. On admet que la courbe Γ tracée sur l'annexe représente un ajustement du nuage, valable jusqu'en 2011. Lire le nombre prévisible de personnes qui seront atteintes de la maladie B en 2011.
3. La courbe Γ est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, a étant un nombre réel non nul, b et c étant des nombres réels. La courbe Γ passe par les points $P(0;1700)$, $Q(10;1950)$ et $R(20;2900)$.
   a) Justifier que $c = 1700$.
   b) Déterminer les nombres réels a et b.
   c) En déduire le nombre prévisible de personnes qui seront atteintes de la maladie B en 2011.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Nombre de personnes atteintes de la maladie A ou de la maladie B
en France entre 1970 et 2005



EXERCICE 3 *Liban 2011 (2)*

On rappelle que :

— Le taux d'emploi d'une classe d'individus est calculé en rapportant le nombre d'individus de la classe ayant un emploi au nombre total d'individus dans la classe.

— Un individu âgé de 55 ans à 64 ans est appelé un « senior ».

— UE désigne l'Union européenne.

Selon un rapport de l'INSEE :
« Le taux d'emploi des personnes âgées de 55 à 64 ans est considéré comme un levier privilégié pour limiter l'exclusion de ces personnes du marché du travail et maîtriser les dépenses de retraites.
En 2008, il est de 45,6 % dans l'UE, mais seulement de 38,3 % en France alors que l'objectif de l'UE comme de la France est d'atteindre 50 % en 2010. »

Le but de l'exercice est de vérifier si la France a atteint l'objectif visé par l'UE.
Dans tout l'exercice, le taux d'emploi sera exprimé en pourcentage. Les valeurs approchées seront arrondies au dixième.

PARTIE A : Étude statistique et interpolation de données

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 1992 et 1998 :

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux d'emploi des seniors en % y_i	29,8	29,7	29,6	29,6	29,4	29	28,3

Source : INSEE, Eurostat

1. Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. Selon cet ajustement, déterminer le taux d'emploi des seniors en 1999.
3. Selon cet ajustement, déterminer si la France a atteint l'objectif fixé en 2010.

PARTIE B : Interpolation de données à l'aide d'un second modèle

Le taux d'emploi des séniors en France est en réalité de 28,8 % en 1999 et on admet qu'à partir de l'année $2000+n$, il est donné par l'expression $29{,}9\times 1{,}037^n$ où n désigne un entier naturel. Selon ce modèle, déterminer :

1. Le taux d'emploi des seniors en 2010.
2. À partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

PARTIE C : Extrapolation de données selon un troisième modèle

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 2001 et 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Taux d'emploi des seniors en % y_i	31,9	34,7	37	37,8	38,5	38,1	38,2	38,2	38,9

Source : INSEE, Eurostat

Désormais, à partir de 2001, on choisit un modèle logarithmique et on admettra qu'à partir de 2001, le taux d'emploi des seniors est donné par la fonction f définie sur $[9;+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x+1)+b$ où a et b désignent deux nombres réels.

1. En considérant les années 2001 et 2006, écrire le système d'équations que doivent vérifier a et b.
2. En déduire que $a = \dfrac{6{,}2}{\ln 1{,}5}$.
   Dans la suite, on admettra que $a = 15{,}3$ et $b = -3{,}3$.
3. Selon ce modèle, déterminer à partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

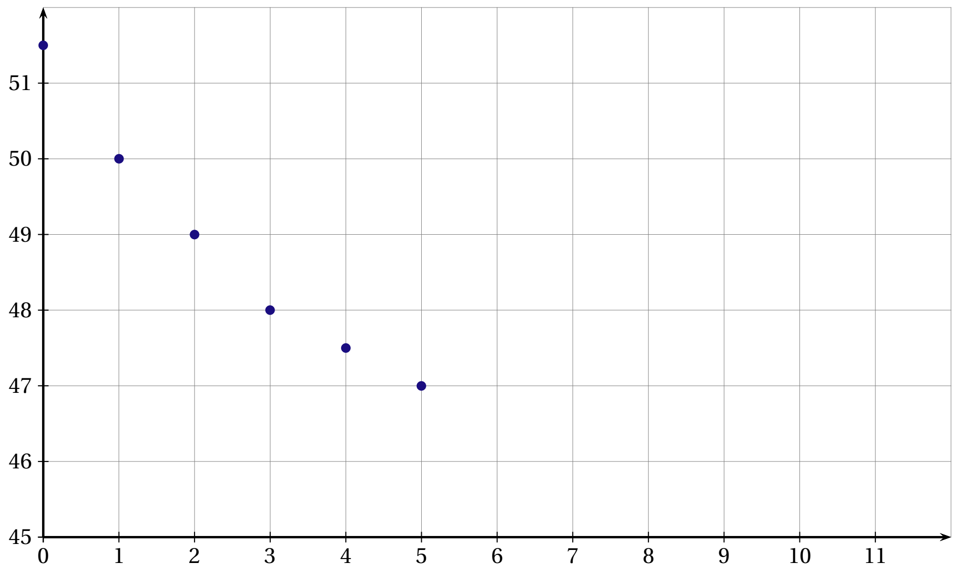
EXERCICE 4 *Nouvelle Calédonie Deuxième session 2010 (3)*

Le tableau ci-dessous donne le nombre de clients ayant fréquenté un restaurant donné pour la période 2000 - 2005.
Chaque année est remplacée par son rang x_i et le nombre de clients correspondant y_i est donné en centaines.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre y_i	51,5	50	49	48	47,5	47

Le graphique ci-dessous donne le nuage de points $(x_i ; y_i)$ avec i compris entre 0 et 5.

ANNEXE 1



PARTIE A

1. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation $y = ax + b$ de la droite D d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Les coefficients a et b seront arrondis au centième. Aucune justification n'est demandée.
2. Tracer la droite D dans le repère de l'annexe 1.
3. En utilisant ce modèle, quel nombre de clients pouvait-on prévoir pour les années 2006 et 2007 ?

PARTIE B

Une étude plus récente a permis d'obtenir le nombre de clients pour la période 2006 - 2009. Ces résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009
Rang x_i	6	7	8	9
Nombre y_i	47	47,2	47,5	47,9

1. a) À l'aide de ces valeurs compléter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ de la série statistique sur le document de l'annexe 1.
   b) Le modèle d'ajustement trouvé dans la partie A vous paraît-il pertinent pour la période 2006–2009 ? Justifier la réponse.
2. On considère la fonction f définie sur $[0;9]$ par

$$f(x) = 2x + 15 + \mathrm{e}^{-0,1x+3,6}.$$

   On choisit un nouveau modèle d'évolution : on prend le nombre $f(x)$ comme estimation du nombre de centaines de clients de ce restaurant au cours de l'année $2000 + x$.

a) Calculer $f(7)$.
   Le choix de ce modèle d'évolution semble-t-il pertinent pour l'année 2007 ?

b) D'après ce modèle d'évolution, à combien peut-on estimer le nombre de clients qui fréquenteront le restaurant en 2010 ? (*On donnera le résultat arrondi à la centaine de clients*).

V SPÉCIALITÉ

V. 1 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

EXERCICE 1

Centres étrangers 2011 (2)

On considère la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$ et tout réel y de l'intervalle $[0\ ;\ 8]$ par

$$f(x;y)=\frac{1}{4}xy.$$

La représentation graphique de la surface (S) d'équation $z=f(x;y)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donnée en annexe.

PARTIE A

1. Sur le graphique de l'annexe colorer la courbe de niveau (Γ) de cote 10. Donner la nature de cette courbe.
2. Placer sur le graphique de l'annexe le point C d'ordonnée 5 appartenant à cette courbe (Γ).
   Déterminer graphiquement l'abscisse de ce point
3. Vérifier que le point B de coordonnées $(6;2;3)$ appartient à la surface (S).

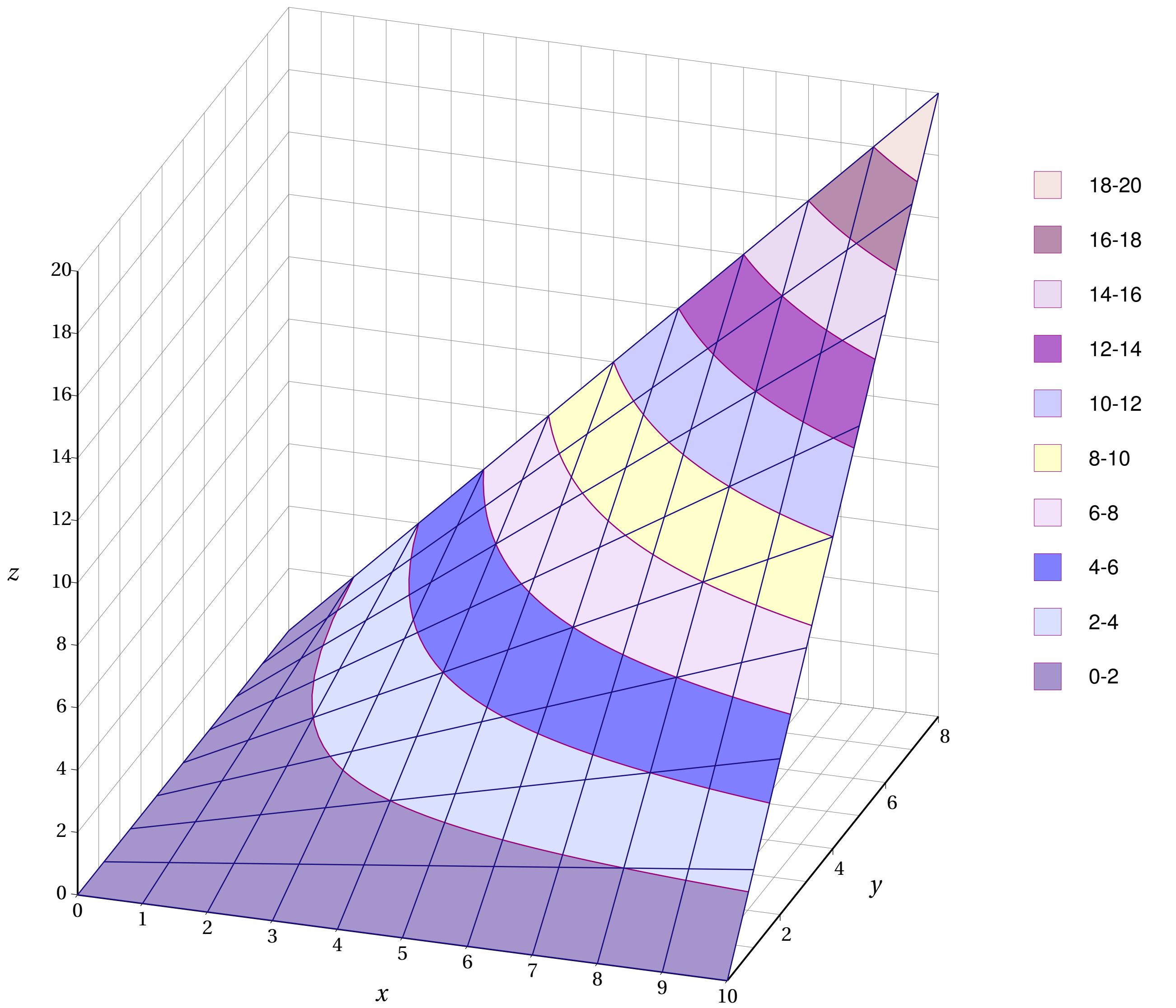
PARTIE B

Les membres du bureau du foyer socio-éducatif d'un lycée font une étude pour déterminer quelle cotisation demander par élève au cours de l'année 2010.
Ils voudraient investir le quart des cotisations dans la rénovation de la salle de détente, réservée aux élèves. Si la cotisation s'élève à x euros avec $0\leqslant x\leqslant 10$ et si y centaines d'élèves adhèrent au foyer avec $0\leqslant y\leqslant 8$, la somme allouée aux travaux de rénovation de la salle de détente en centaines d'euros sera égale à $f(x;y)$.

1. Quelle est la somme allouée à la rénovation de la salle de détente lorsque la cotisation est fixée à 6 euros par élève et que 600 élèves sont adhérents au foyer ?
2. Les membres du foyer font l'hypothèse que le nombre y, en centaines d'adhérents, et le nombre x, en euros, sont directement liés par la relation $y=12-x$
   a) Montrer que, sous cette contrainte, on peut exprimer $f(x;y)$ en fonction de la seule variable x sous la forme $h(x)=3x-\frac{1}{4}x^2$.
   b) Déterminer pour quelle valeur de x la somme allouée sera la plus élevée .
   c) De quelle somme en euros disposeront les membres du foyer pour la rénovation dans ce cas ?

ANNEXE

Surface (S)



EXERCICE 2

La Réunion 2011 (3)

Un artisan glacier fabrique des glaces et des sorbets.
On appelle respectivement x et y les quantités de glace et de sorbet exprimées en centaines de litres, produites et vendues quotidiennement.
Le coût total de production z exprimé en dizaines d'euros, est donné par la relation :

$$z = 2x^2 + y^2 - xy + 6x, \text{ avec } x \in [0;10] \text{ et } y \in [0;10].$$

Sur l'annexe 2 :

— la surface (S) représentant le coût de production en fonction de x et de y dans un repère orthogonal est donnée en figure 1 ;

— la figure 2 représente la projection orthogonale de la surface (S) sur le plan (xOy) ;

— les courbes de niveau de cette surface sont représentées pour z allant de 20 en 20.

1. a) C est le point de (S) d'abscisse 6 et d'ordonnée 2.
   Placer le point C sur la figure 1 donnée en annexe 2.

   b) Calculer la cote z du point C précédent. Interpréter le résultat obtenu.

   c) On suppose dans cette question que $y = 4$.
   Exprimer alors z en fonction de x.
   En déduire la nature de la section de la surface (S) par le plan d'équation $y = 4$.
   Surligner en couleur cet ensemble sur la figure 1.

   Pour des raisons de stockage et de rentabilité, la fabrication de x centaines de litres de glace et de y centaines de litres de sorbet engendre la contrainte : $x + y = 10$.
   On note (E) l'ensemble des points du plan vérifiant cette contrainte.

   a) La figure 2 donnée en annexe 2, représente les lignes de niveau des coûts de production.
   Représenter l'ensemble (E) sur cette figure.

   b) Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 10$, z peut s'écrire sous la forme :
   $z = g(x)$, avec $g(x) = 4x^2 - 24x + 100$.

   Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

   Déterminer les quantités de glace et de sorbet (en centaines de litres) qu'il faudrait produire pour que le coût de production soit minimum.

ANNEXE 2 de l'exercice 3

Figure 1

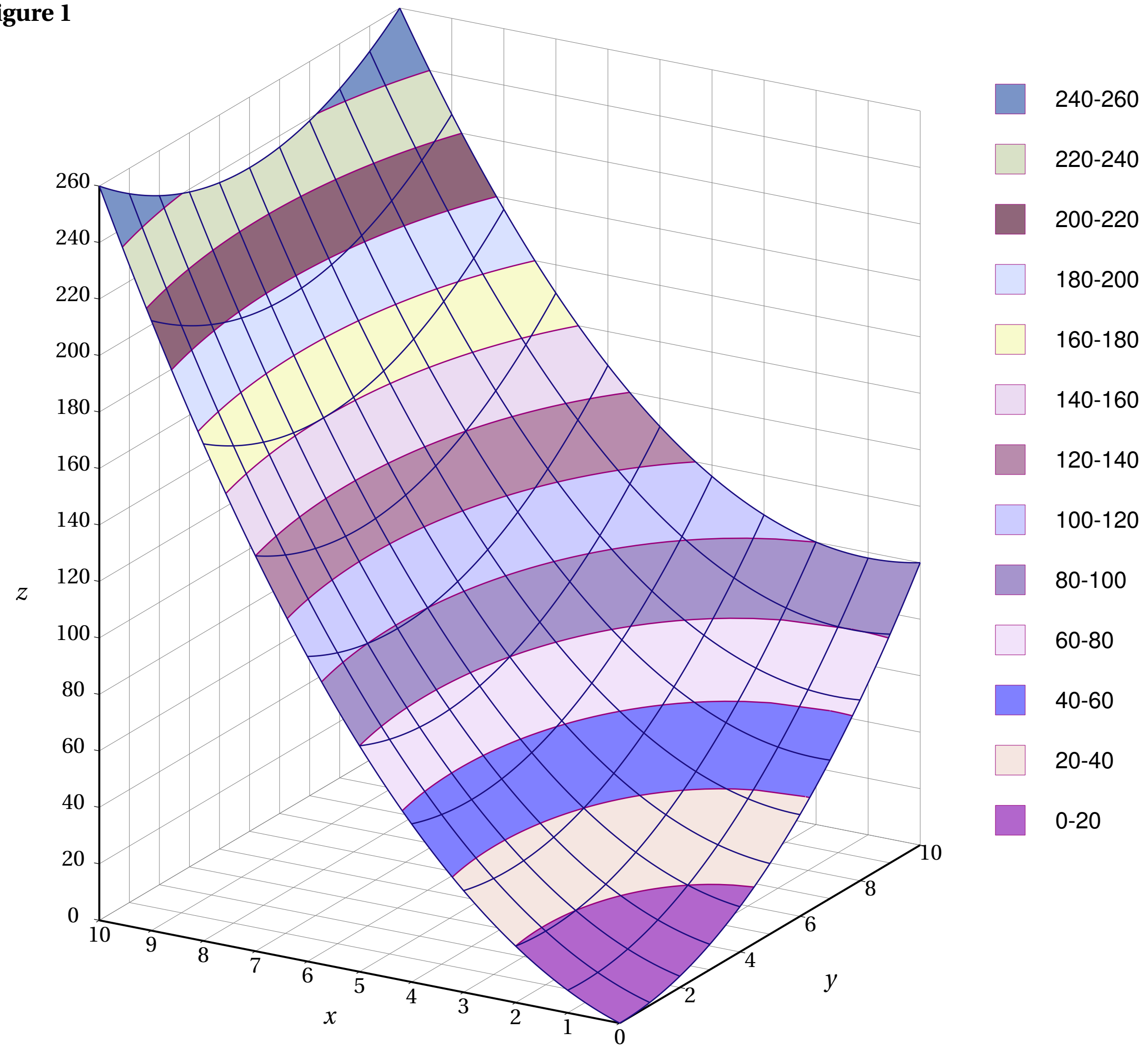
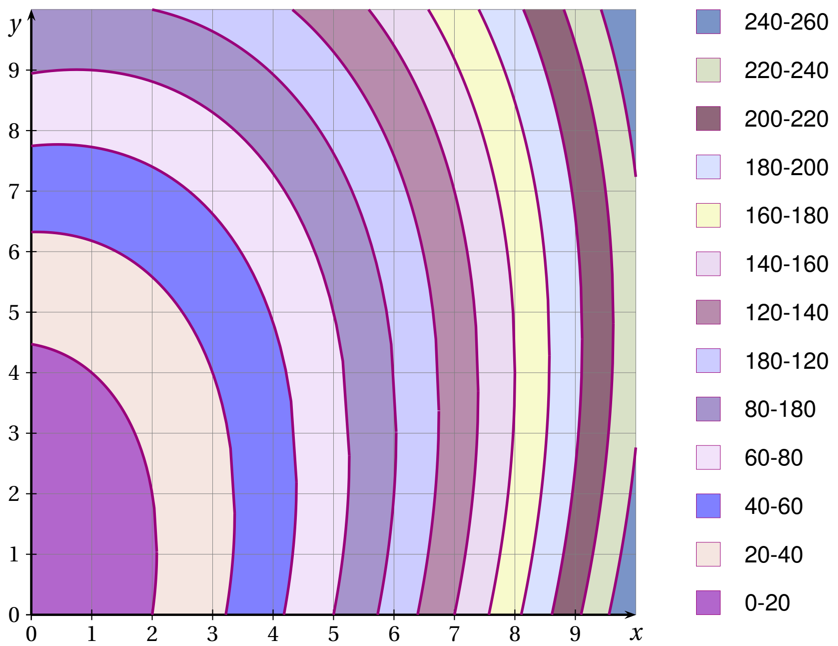


Figure 2



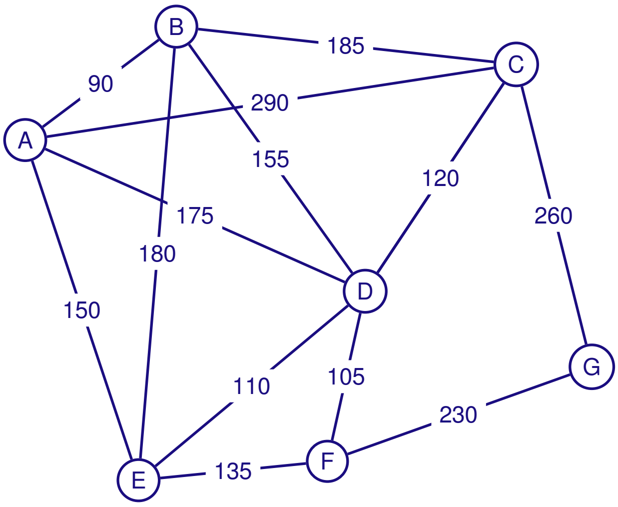
V. 2 GRAPHES

EXERCICE 1

Asie 2011 (2)

Les parties I et II sont indépendantes

Le graphe Γ suivant représente le plan d'un zoo.
Le sommet A représente son accès. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les différents secteurs animaliers de ce zoo.
Une arête représente l'allée reliant deux secteurs et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux secteurs.
AB = 90, AC = 290, AD = 175, AE = 150, BC = 185, BD = 155, BE = 180, CD = 120, CG = 260, DE = 110, DF = 105, EF = 135, FG = 230.



PARTIE I :

Pour mieux visualiser sur le plan les différents secteurs du zoo, on veut les colorier de telle sorte que deux secteurs adjacents ne soient pas de la même couleur.

1. Quel est le nombre minimun de couleurs nécessaires à la réalisation de ce plan? Justifier la réponse,
2. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe Γ.
   Justifier la réponse.
3. Proposer alors une telle coloration.

PARTIE II :

1. Pour nettoyer les allées, les services techniques du zoo utilisent une balayeuse automobile.
   Est-il possible que cette balayeuse n'emprunte chaque allée qu'une fois et une seule? Si oui, proposer un tel chemin, sinon justifier votre réponse.
2. Les services de sécurité basés au point A doivent intervenir dans le secteur G. Déterminer, à l'aide d'un algorithme, l'itinéraire le plus court.

EXERCICE 2

Nouvelle Calédonie 2011 (2)

Joanne est éducatrice canin : elle donne des leçons d'éducation le samedi après-midi.
Neuf chiots sont présents : Allegro, Bronx, Chouchou, Delco, Euclide, Falbala, Galipette, Homère et Indigo.
Joanne souhaite réaliser des exercices d'apprentissage par petits groupes de deux ou trois chiens. Falbala ne pense qu'à jouer si elle est trop proche de Bronx, Chouchou ou Euclide.
De même, Delco est très inattentif si Bronx ou Falbala sont à proximité!
Indigo ne supporte pas le caractère trop fougueux de Galipette.
Enfin le turbulent Allegro ne supporte la présence d'aucun autre chiot, sauf Euclide et Homère.

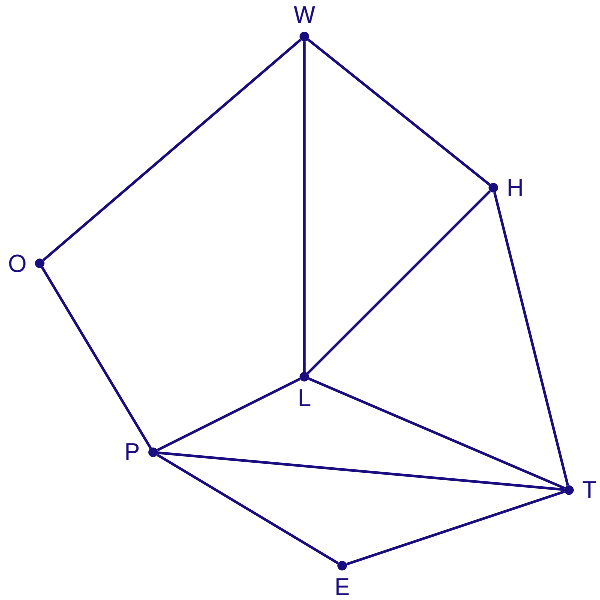
1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G dont les sommets sont les noms des chiots et relier entre eux les chiots que l'on ne peut pas mettre ensemble pour ce travail de groupe.
2. Le graphe G est-il connexe ? Expliquer.
3. Déterminer un sous graphe complet d'ordre maximal du graphe G.
   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
4. Donner la valeur du nombre chromatique du graphe G.
5. Peut-on proposer une répartition des chiots en groupes de deux à trois chiots pouvant travailler ensemble ?

EXERCICE 3

Polynésie 2011 (3)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

On considère le graphe Γ ci-dessous :

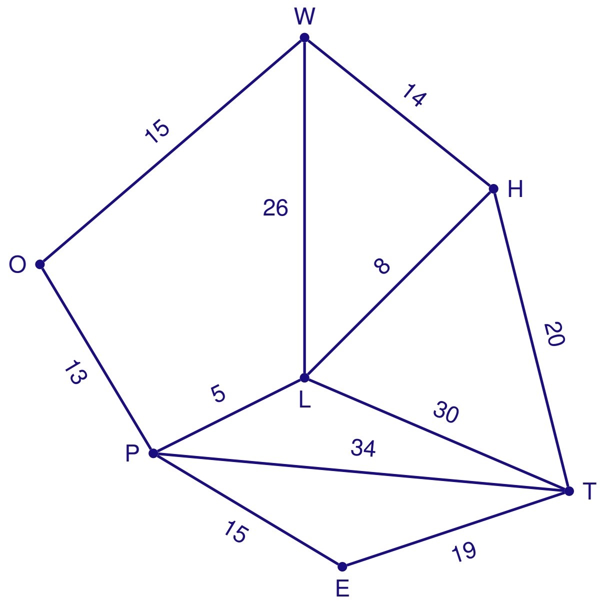


PARTIE A : Étude d'un graphe

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E; H; L; O; P; T; W).

PARTIE B : Voyage scolaire

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre.
Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres.
Les sites retenus dans Londres sont les suivants : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe Γ donné ci-dessus (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).
Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leurs familles. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.



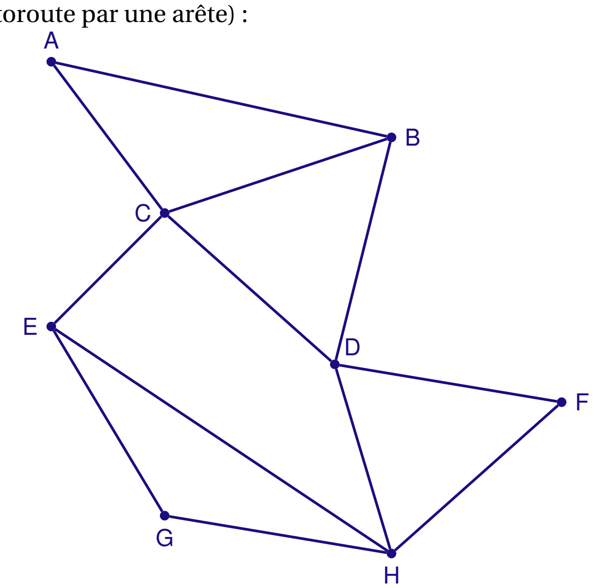
Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ? Arthur sera-t-il en retard ?

EXERCICE 4

Pondichéry 2011 (3)

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute ? (la réponse sera justifiée).
   Si oui citer un trajet de ce type.
2. On appelle M la matrice associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   On donne la matrice M^3 :

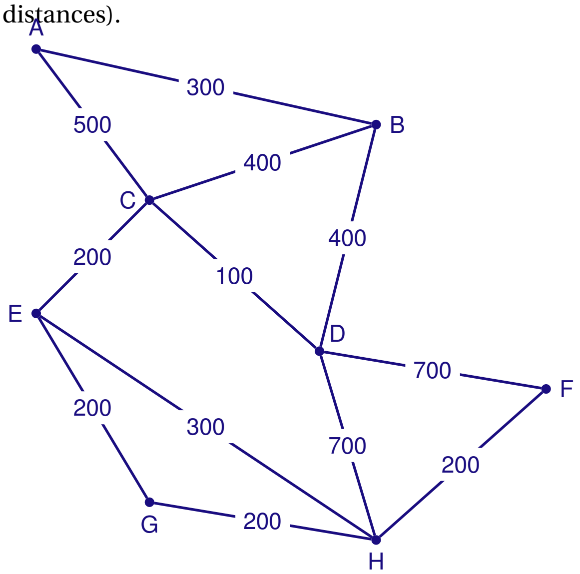
$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H ? (la réponse devra être justifiée).

Préciser ces chemins.

3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.

   Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



   Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

   Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

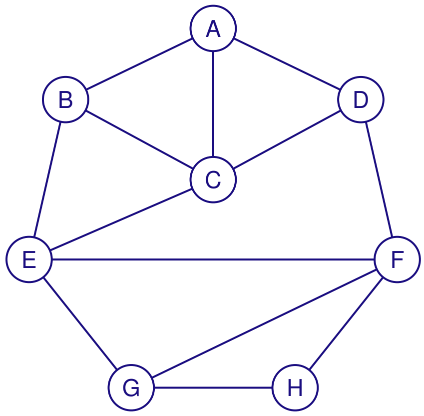
V. 3 GRAPHES PROBABILISTES

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2011 (3)

PARTIE A : Étude d'un site

Un site internet comporte 8 pages, notées A, B, C, D, E, F, G, H reliées entre elles suivant le graphe ci-dessous.



Ainsi, par exemple, à partir de la page A on peut directement accéder aux pages B, C et D.
Par contre, la page A ne permet pas d'accéder directement à la page F.

1. Le technicien souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ? Justifier la réponse.
2. Pour marquer les changements de page, l'administrateur du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.
   On note N le nombre minimum de couleurs nécessaires.
   a) Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.
   b) En utilisant la question 2. a. et à l'aide d'un algorithme, montrer, que $N = 3$.

PARTIE B : Étude de propagation d'un virus d'un site à l'autre

Le site précédent, appelé site N° 1, propose un unique lien vers un site partenaire, appelé Site N° 2, sans retour possible. De même, le site N° 2 propose un unique lien vers un site N° 3, sans retour possible et ainsi de suite…(voir le schéma ci-dessous) :

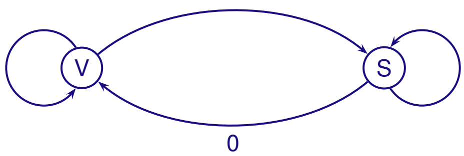
$$\text{Site N}^\circ\,1 \longrightarrow \text{Site N}^\circ\,2 \longrightarrow \text{Site N}^\circ\,3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Site N}^\circ\,n \longrightarrow \text{Site N}^\circ\,n+1 \longrightarrow \cdots$$

Le site N° 1 vient d'être infecté par un virus informatique qui utilise les liens entre les sites pour essayer de se propager, les autres sites n'étant pas encore touchés.
Face à ce nouveau virus, les antivirus ne sont efficaces qu'à 80 %. On note :

— V l'état « le site est infecté par le virus »

— S l'état « le site est sain (non infecté par le virus) ».

On a dessiné ci-dessous le graphe probabiliste traduisant les risques de propagation du virus d'un site au suivant :



1. Justifier la valeur 0 indiquée sur le graphe probabiliste précédent, puis recopier et compléter ce graphe sur votre copie.
2. Préciser la matrice de transition M de ce graphe (première ligne pour V, deuxième ligne pour S)
   Pour tout entier naturel non nul n, on note :
   P_n la probabilité que le n-ième site soit infecté, Q_n la probabilité que le n-ième site soit sain et $X_n = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \end{pmatrix}$.
   On a donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (traduisant que le site N° 1 est infecté) et $X_{n+1} = X_n\, M$.

3. a) En utilisant la relation $X_{n+1} = X_n\ M$, montrer que $P_{n+1} = 0{,}2P_n$.
   b) En déduire P_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 2 *Amérique du Sud 2011 (3)*

Franck Geek est adepte de jeux vidéo en ligne. Afin de préserver son temps de travail scolaire, il essaye de se modérer. Il constate que :

— s'il a joué un jour, la probabilité qu'il ne le fasse pas le lendemain est de 0,6 ;
— s'il n'a pas joué un jour, la probabilité qu'il joue le lendemain est de 0,9.

Le jour de la rentrée (premier jour), Franck a décidé de ne pas jouer.

1. a) Quelle est la probabilité que Franck joue le deuxième jour ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour ?
2. On note D l'évènement : « Franck a joué » et E l'évènement : « Franck a su résister ».
   a) Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.
   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Soit n un entier naturel non nul. Soient D_n l'évènement : « Franck a joué le n-ième jour » et E_n l'évènement : « Franck a su résister le n-ième jour ».
   L'état probabiliste lors du n-ième jour est alors donné par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix}$ où d_n désigne la probabilité de l'évènement D_n et e_n celle de l'évènement E_n.
   On a ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer P_2.
   b) Donner la relation liant P_{n+1} et P_n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = -0{,}5d_n + 0{,}9$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = d_n - 0{,}6$.
   a) Démontrer que la suite u est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et la valeur de son premier terme.
   b) Exprimer alors u_n puis d_n en fonction de n.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$ et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 *France Métropolitaine 2011 (2)*

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

— 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
— 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
— 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

— parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
— parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,
— parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

— A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
— B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,

— C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0{,}2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0{,}15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

EXERCICE 4 *Liban 2011 (4)*

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

1. Catégorie A, composée des clients d'agence
2. Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

— a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010 + n$,

— i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010 + n$,

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & i_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n $P_{n+1} = P_n \times M$.

PARTIE A : État stable d'un graphe probabiliste

Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.

   On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.
3. a) Calculer la matrice P_1.

   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.
4. Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.

   Interpréter le résultat.

PARTIE B : Étude de la limite d'une suite récurrente

1. a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}94a_n + 0{,}01$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \dfrac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{113}{150} \times 0{,}94^n + \dfrac{1}{6}$.
   d) Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 5

Polynésie Septembre 2011 (2)

Deux enfants Alexis et Bilal jouent dans la cour de leur immeuble.
Ils décident d'entamer une compétition formée d'une série de parties (notées partie 1, partie 2, ...).
On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :

— Alexis a 65 % de chances de gagner la partie 1 ;
— si Alexis gagne la partie n, alors il a 10 % de chances de gagner la partie $n+1$;
— si Alexis perd la partie n, alors il a 60 % de chances de gagner la partie $n+1$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note :

— A_n l'évènement : « Alexis gagne la partie n » ;
— B_n l'évènement : « Bilal gagne la partie n »(on remarquera que : $B_n = \overline{A_n}$) ;
— a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n celle de l'évènement B_n.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

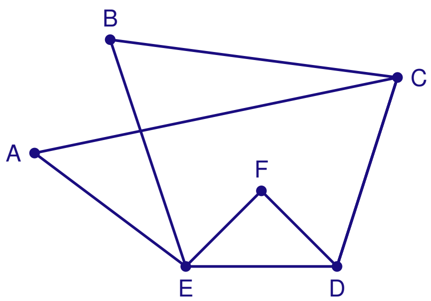
PARTIE A : Étude d'un graphe probabiliste

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste lors de la partie n.

1. a) Donner sans justification la matrice P_1.
   b) Traduire la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. On admet que la matrice de transition M associée au graphe probabiliste précédent est $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
   a) Donner M^2 (on pourra utiliser la calculatrice ; les coefficients de M^2 seront donnés sous forme décimale exacte).
   b) En déduire la probabilité que Bilal gagne la partie 3, en justifiant la réponse (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie à 10^{-2}).
3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable (x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$).
   a) Déterminer les nombres x et y.
   b) Interpréter ces deux valeurs.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique

Carlos (C), Dora (D), Edwige (E) et Farid (F), eux aussi intéressés par le jeu, décident de rejoindre Alexis (A) et Bilal (B) et de former ainsi des équipes.
Comme ils ne s'entendent pas tous entre eux, ils optent pour une répartition en équipe par affinité.
On donne ci-après le graphe G d'incompatibilité entre les différents enfants :



Par exemple, Alexis ne peut pas se trouver dans une équipe où il y aurait Carlos ou Edwige.
Cela est représenté dans le graphe par le fait que les sommets A et C, ainsi que les sommets A et E sont adjacents.

1. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
2. Donner en justifiant un encadrement du nombre chromatique du graphe G.
3. Proposer une coloration du graphe (sans justification) puis en déduire le nombre chromatique du graphe G.
4. Proposer une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes.

V. 4 SUITES

EXERCICE 1

Antilles Guyane 2011 (3)

Une entreprise du secteur « Bâtiments et Travaux Publics » doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30000 tonnes de déchets par an.
En 2007, l'entreprise rejetait 40000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2007+n)$. On a donc $r_0 = 40000$.

1. a) Calculer r_1 et r_2.
   b) Justifier que pour tout entier n naturel on a $r_{n+1} = 0{,}95r_n + 200$.
2. Soit (s_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $s_n = r_n - 4000$.
   a) Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer s_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $r_n = 36000 \times 0{,}95^n + 4000$.
   c) La quantité de déchets rejetée diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
   d) Déterminer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers l'infini.
   e) Calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité de rejets en 2011.
3. *Dans cette question, tout trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?

EXERCICE 2

Antilles Guyane Septembre 2011 (2)

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1^er^ septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $u_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 200$.
   Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n$.

   Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}95^n$.
   En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

EXERCICE 3 *France Métropolitaine Septembre 2011 (2)*

La société « Vélibre », spécialisée dans la location de vélos, a été créée en janvier 2010 avec un parc de 150 vélos neufs. Afin de conserver un parc de bonne qualité, le directeur de la société a décidé :

— de racheter 40 vélos neufs en janvier de chaque année ;

— de revendre 20% des vélos en janvier 2011 et en janvier 2012 ;

— de revendre 20% au moins des vélos les plus usagés en janvier de chaque année suivante.

1. Pour tout nombre entier naturel n, on modélise le nombre approximatif de vélos du parc en janvier de l'année $2010+n$ par les termes de la suite (U_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$U_{n+1} = 0{,}8U_n + 40 \text{ et } U_0 = 150$$

Vérifier que U_1 et U_2 correspondent bien au nombre prévu de vélos du parc pour janvier 2011 et janvier 2012.

2. Pour connaître l'évolution du nombre approximatif de vélos du parc, le directeur utilise un tableur. Voici un extrait de sa feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de U_n		Valeur de n	Valeur de U_n
2	0	150		18	199,10
3	1	160		19	199,28
4	2	168		20	199,42
5	3	174,4		21	199,54
6	4	179,52		22	199,63
7	5	183,62		23	199,70
8	6	186,89		24	199,76
9	7	189,51		25	199,81
10	8	191,61		26	199,85
11	9	193,29		27	199,88
12	10	194,63		28	199,90
13	11	195,71		29	199,92
14	12	196,56		30	199,94

a) Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).

b) Quelle semble être la limite de la suite (U_n) ?

3. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $V_n = U_n - 200$.

a) Prouver que la suite (U_n) est géométrique de raison 0,8. Déterminer son premier terme.

b) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction du nombre entier n.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

d) Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} - U_n = 10 \times 0{,}8^n$$

e) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La municipalité prévoit d'implanter de nouvelles bornes dans la ville afin d'offrir aux usagers 250 emplacements. La société « Vélibre » pourra-t-elle satisfaire cette demande ? Argumenter la réponse.

BACCALAURÉAT 2011

SÉRIE ES : INDEX DES DIFFÉRENTS SUJETS