BAC 2012

SÉRIE ES

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2012

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2012

AMÉRIQUE DU NORD 2012

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Nigeria, en millions d'habitants .

	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Population en millions (y_i)	45,158	50,414	56,467	63,948	74,523	85,151	97,338	110,449	124,842	140,879

Source : perspective monde, université de Sherbrooke. La banque mondiale

PARTIE A

1. Dans un premier temps, on décide de faire un ajustement affine. On note (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Déterminer en utilisant la calculatrice, une équation de (d). On arrondira les coefficients au millième.
2. À l'aide de cet ajustement, faire une estimation de la population du Nigeria en 2010. On arrondira la réponse au millier d'habitants.

PARTIE B

Dans cette partie, toutes les valeurs seront arrondies au millième.

1. En 2010 on a noté une population de 154,729 millions d'habitants au Nigeria. On décide alors de faire un ajustement exponentiel.
   Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln(y_i)$										

2. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. En déduire une expression de la population du Nigeria y en millions d'habitants en fonction du rang x de l'année sous la forme $y = k\text{e}^{mx}$.
4. Utiliser cet ajustement pour estimer la population du Nigeria en 2010.
5. D'après l'Institut National d'Études Démographiques (INED) la population du Nigeria devrait dépasser 430 millions d'habitants en 2050.
   Que peut-on penser de cette estimation ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un restaurateur propose trois formules à midi :

Formule A : Plat du jour / Dessert / Café

Formule B : Entrée / Plat du jour / Dessert / Café

Formule C : Entrée / Plat du jour / Fromage / Dessert / Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.

Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A, tandis qu'un client sur deux choisit la formule B.

On sait aussi que :

— Parmi les clients qui choisissent la formule A, une personne sur quatre commande du vin.

— Parmi les clients qui choisissent la formule B, deux personnes sur cinq commandent du vin.
— Parmi les clients qui choisissent la formule C, deux personnes sur trois commandent du vin.

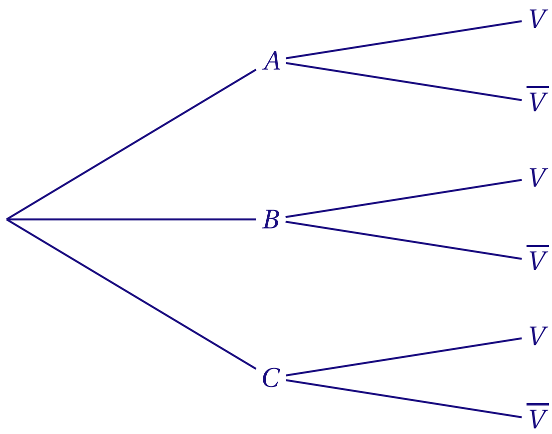
Un client se présente au restaurant pour le repas de midi. On considère les évènements suivants :

A : « le client choisit la formule A »
B : « le client choisit la formule B »
C : « le client choisit la formule C »
V : « le client commande du vin »

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé.

Les probabilités demandées seront arrondies, si c'est nécessaire, au centième.

1. Calculer $p(C)$.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous.



3. Montrer que $p(V) = 0{,}45$.
4. Le client commande du vin. Calculer la probabilité qu'il ait choisi la formule A.
5. La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger à midi dans ce restaurant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de D.
   b) Calculer la dépense moyenne par client en euro.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30% des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10% des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010+n$.
On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010+n$.
Enfin on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010+n$.

1. Déterminer P_0.
2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2. En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}1$.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n. En déduire a_n en fonction de n.
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

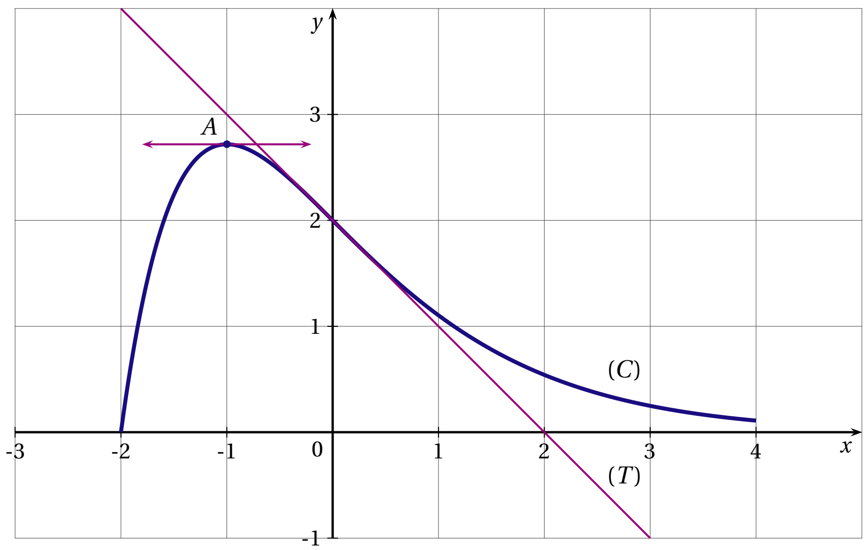
PARTIE A

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative (C) d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.
On nomme A le point de (C) d'abscisse -1 et B le point de (C) d'abscisse 0.

— La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2; -1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1; 4]$

— La tangente à (C) au point A est horizontale.

— La droite (T) est la tangente à (C) au point B et a pour équation $y = -x + 2$



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
   b) Déterminer le signe de $f'(2)$.
   c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.
2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unité d'aire.

PARTIE B

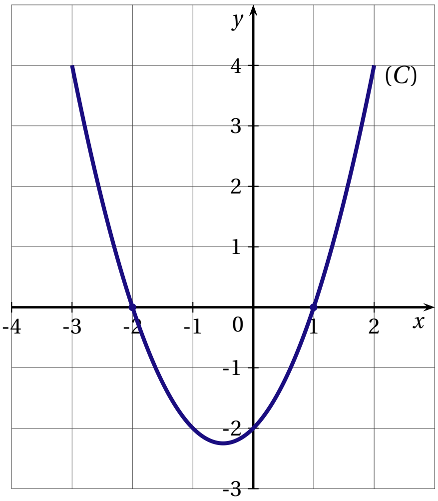
La fonction f de la Partie A a pour expression $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A de la courbe (C).
2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2;4]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $F(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.
4. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

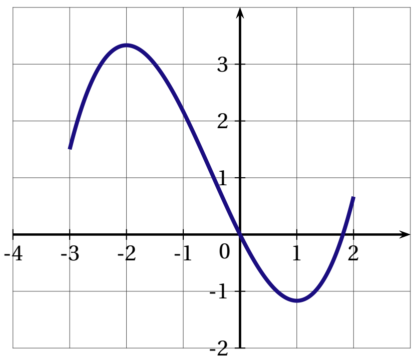
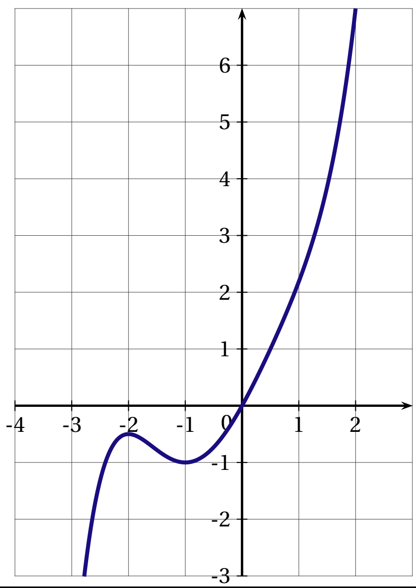
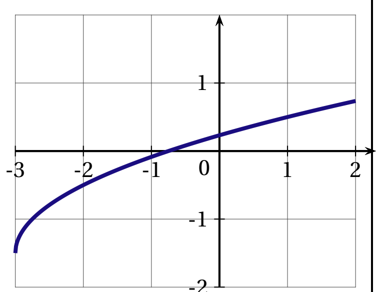
   b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question 2 de la partie A.

EXERCICE 4 (3 points) *commun à tous les candidats*

1. On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe (C) d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;2]$. La courbe (C) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse -2 et au point B d'abscisse 1.



   Parmi les trois courbes proposées ci-dessous, déterminer la seule qui représente une primitive de f sur l'intervalle $[-3;2]$.

(a)	**(b)**	**(c)**
		

2. On admet que l'équation $x\mathrm{e}^{2x-1} = 2$ n'a qu'une solution α dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Une entreprise produit des tentes. Le coût marginal, en milliers d'euros, pour la production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$ est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

   On note C la fonction qui représente le coût total exprimé en milliers d'euros pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.

   On assimile le coût marginal à la dérivée de la fonction coût total, c'est à dire à la dérivée de la fonction C.

   Sachant que les coûts fixes sont de 5 000 euros, déterminer le coût total en milliers d'euros, pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leqslant x \leqslant 20$.

AMÉRIQUE DU SUD 2012

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

QCM : *Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Le candidat portera sur sa copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 0,5 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

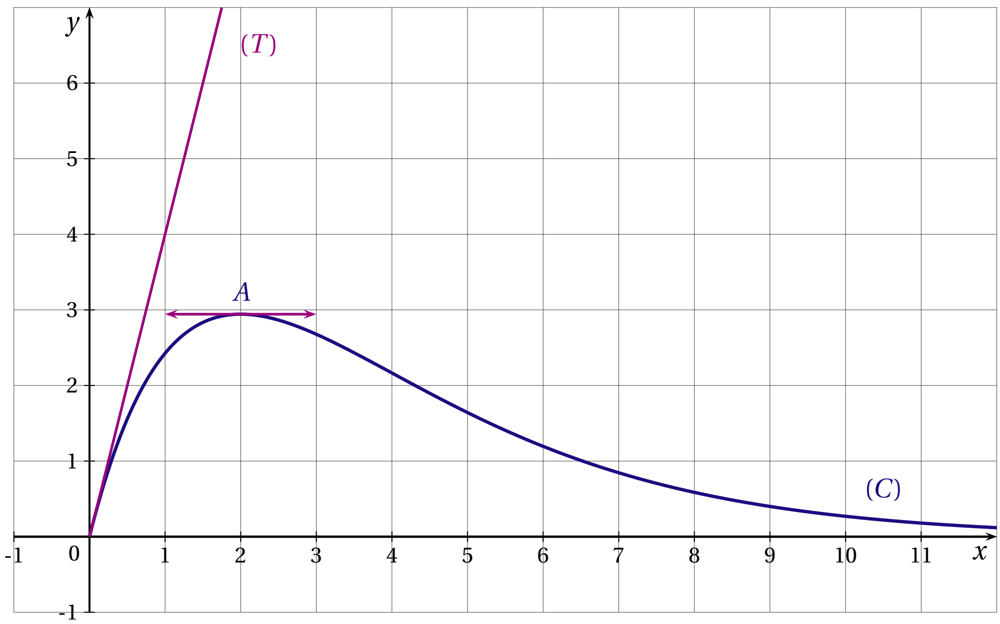
On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative (C) d'une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$. On sait que :

— la courbe (C) passe par les points $O(0;0)$ et $A\left(2;\dfrac{8}{e}\right)$,

— la tangente à (C) en O est la droite (T) qui passe par le point de coordonnées $(1;4)$,

— la tangente à (C) en A est parallèle à l'axe des abscisses,

— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.



1. La limite de f en $+\infty$ est :

   a. 0 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

2. Le nombre $f'(0)$ vaut :

   a. -1 **b.** 0 **c.** 4

3. L'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions :

   a. $[0;+\infty[$ **b.** $[0;2]$ **c.** $[0;2[$

PARTIE B

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = xe^{-2x}$. La dérivée de la fonction g est :

   a. $g'(x) = -2e^{-2x}$ **b.** $g'(x) = (1-2x)e^{-2x}$ **c.** $g'(x) = e^{-2x}$

2. La valeur exacte de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est :

   a. $\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$ **b.** $\mathrm{e}^{-2}-1$ **c.** $-\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right)$

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[1;3]$ par $h(x)=\frac{1}{x}$. La valeur moyenne de la fonction h sur $[1;3]$ est :

   a. $\ln 3$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\ln\left(\sqrt{3}\right)$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous donne le nombre de licenciés à la fédération française de badminton.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de licenciés (y_i)	70 589	79 049	85 712	91 782	96 706	108 762	114 725	115 643	124 894	134 886

Sources : Fédération Française de Badminton

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation, arrondi à l'unité, du nombre de licenciés entre les années 2000 et 2009.
2. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le plan (P) muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, défini de la façon suivante :
   — Sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on prendra 2 cm comme unité.
   — Sur l'axe des ordonnées, on placera 70 000 à l'origine et on prendra 1 cm pour 5 000 licenciés.
3. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à l'unité.
   b) En utilisant cet ajustement, calculer le nombre de licenciés que l'on peut prévoir en 2012.
4. On décide d'utiliser comme ajustement la courbe d'équation $y=k\mathrm{e}^{px}$. On suppose que cette courbe passe par les points $M(0;70589)$ et $N(9;134886)$.
   Déterminer les réels k et p (on arrondira p au millième).
5. On utilise comme ajustement dans cette question, la courbe d'équation $y=70589\mathrm{e}^{0,072x}$.
   Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre de licenciés en 2012 que l'on donnera arrondi à l'unité.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de l'évènement A, et $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé, avec $p(A)\neq 0$.

Pierre va courir aujourd'hui. On considère les évènements suivants :
A : « Pierre choisit le parcours A »
B : « Pierre choisit le parcours B »
C : « Pierre choisit le parcours C »
E : « Pierre fait une séance d'endurance »
V : « Pierre fait une séance de vitesse »
On sait que :

— Pierre choisit le parcours A dans 30 % des cas et le parcours B dans 20 % des cas ;

— si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;

— si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. a) Donner la valeur de $p_A(E)$.

   b) Calculer $p_B(V)$.
3. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours C.
4. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
5. On sait que $p(E) = 0{,}7$. Montrer que : $p(E \cap C) = 0{,}42$.
6. On sait que Pierre a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un employé se rend à son travail en bus et, soit il n'est pas en retard, c'est-à-dire qu'il est à l'heure ou en avance, soit il est en retard.
Le 1er jour, la probabilité que cet employé arrive en retard est de 0,2.

Pour les jours suivants :

S'il est en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de 0,05.
Si l'employé n'est pas en retard un jour donné, alors la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de 0,2.

Pour tout entier naturel n non nul, on note

R_n l'évènement « l'employé est en retard à son travail le n-ième jour ».

H_n l'évènement « l'employé n'est pas en retard à son travail le n-ième jour ».

On note également, pour tout entier naturel n non nul :

— r_n la probabilité que l'employé soit en retard le n-ième jour,

— h_n la probabilité que l'employé ne soit pas en retard le n-ième jour,

— $P_n = \begin{pmatrix} r_n & h_n \end{pmatrix}$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

   b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
3. Quelle est la probabilité que cet employé soit en retard le 3e jour. On donnera le résultat avec une valeur arrondie au centième.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable.

   a) Montrer que x et y vérifient la relation $y = 0{,}95x + 0{,}8y$.

   b) Déterminer l'état stable du système en arrondissant les valeurs au millième. Interpréter ces résultats.

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x) = 10\ln(x+1) - x$.

PARTIE A

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.

x	0		9		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(9)$	$\searrow$	$f(10)$

1. Justifier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;10]$.
2. Donner les valeurs de $f(9)$ et de $f(10)$ arrondies au centième.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet dans l'intervalle $[0;9]$ une unique solution α. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. On considère la fonction F définie et dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$F(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \frac{x^2}{2}.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique des puces pour des téléphones portables. Le coût marginal pour une production de x centaines de puces $(0 \leqslant x \leqslant 10)$ est donné en centaines d'euros par $f(x) = 10\ln(x+1) - x$.

1. En utilisant la partie A, déterminer le nombre de puces que l'entreprise doit fabriquer pour que le coût marginal soit maximum.
2. Pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$, on note $C(x)$ le coût total de production, en centaines d'euros, de x centaines de puces.

   On assimile le coût marginal à la dérivée du coût total, c'est-à-dire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$, $C'(x) = f(x)$.

   Les coûts fixes s'élèvent à 1500 euros, c'est-à-dire que $C(0) = 15$.

   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$, $C(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \dfrac{x^2}{2} + 15$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0;10]$.

ANTILLES GUYANE 2012

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On donne le prix moyen en euros d'un litre de gasoil en France, entre 1998 et 2007 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prix moyen y_i du litre de gasoil (en euros)	0,77	0,81	0,73	0,79	0,8	0,85	0,99	1,06	1,1	1,11

Source : *Annuaire statistique de la France*

1. Calculer le pourcentage d'évolution, arrondi à 0,1% près, du prix moyen d'un litre de gasoil en euros entre 1998 et 2007.
2. a) Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;y_i\right)$, avec i compris entre 0 et 9, associé à cette série statistique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

   On choisira les unités graphiques suivantes :

   1 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses.

   1 cm pour 10 centimes d'euros sur l'axe des ordonnées.

   b) Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série et le placer dans le repère précédent.
3. On modélise l'évolution du prix moyen d'un litre de gasoil en euros à l'aide d'un ajustement affine, obtenu par la méthode des moindres carrés.

   Donner l'équation de la droite de régression de y en x ainsi obtenue, en arrondissant les coefficients au millième.

   Tracer cette droite dans le repère défini à la question 2.
4. Avec ce modèle, calculer l'estimation du prix moyen d'un litre de gasoil en euros en 2010. Arrondir le résultat au centime d'euros.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   En supposant que le modèle reste valable durablement, à partir de quelle année le prix moyen du litre de gasoil aura-t-il augmenté de 30% par rapport au prix moyen de l'année 2007 ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un restaurant propose une formule « entrée + plat » pour laquelle chaque client choisit entre trois entrées (numérotées 1, 2 et 3) puis entre deux plats (numérotés 1 et 2).
Chaque client qui choisit cette formule prend une entrée et un plat.

On a constaté que :
30% des clients choisissent l'entrée n° 1, 24% choisissent l'entrée n° 2 et les autres clients choisissent l'entrée n° 3.
Par ailleurs, le plat n° 1 est choisi par : 72% des clients ayant opté pour l'entrée n° 1, 58% des clients ayant opté pour l'entrée n° 2 et 29 % des clients ayant opté pour l'entrée n° 3.

On choisit au hasard un client du restaurant ayant opté pour la formule « entrée + plat ».
On note E_1 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 1 », E_2 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 2 » et E_3 l'évènement : « Le client choisi l'entrée n° 3 ».
On note enfin P_1 l'évènement : « Le client choisi le plat n° 1 » et P_2 l'évènement : « Le client choisi le plat n° 2 ».

1. Traduire la situation étudiée à l'aide d'un arbre pondéré, en indiquant sur cet arbre les probabilités données dans l'énoncé.

2. Quelle est la probabilité que le client choisisse l'entrée nº 3 et le plat nº 1 (on donnera la valeur exacte de cette probabilité) ?
3. Montrer que la probabilité de l'évènement P_1 est égale à 0,4886.
4. Quelle est la probabilité qu'un client ait choisi l'entrée nº 1 sachant qu'il a pris le plat nº 1 (on arrondira le résultat à 10^{-4} près) ?
5. On choisit trois clients au hasard parmi ceux ayant opté pour la formule ; on suppose le nombre de clients suffisament grand pour assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise. Dans cette question, on arrondira les résultats au millième.

   a) Déterminer la probabilité qu'exactement deux de ces clients aient pris le plat nº 1.

   b) Déterminer la probabilité qu'au moins un client ait pris le plat nº 1.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans une grande entreprise, tous les agents commerciaux ont une voiture de fonction, qu'ils doivent choisir entre deux marques A et B. Le parc de véhicules (en location) est renouvelé tous les ans.
On suppose que le nombre d'agents commerciaux de l'entreprise ne varie pas, et que le deux marques A et B restent les seules possibilités pour les voitures de fonction proposées dans l'entreprise.

On a constaté que, chaque année :

— 5 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque A changent l'année suivante pour B ;

— 15 % des agents commerciaux utilisant un véhicule de marque B changent l'année suivantes pour A ;

— les autres agents poursuivent l'année suivante avec un véhicule de même marque.

On appelle a_n la probabilité qu'un agent commercial choisi au hasard utilise un véhicule de marque A au début de l'année $2010+n$, et b_n la probabilité qu'il utilise un véhicule de marque B au début de cette même année.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$.
En 2010, la moitié des agents commerciaux possédaient un véhicule de marque A ; ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, et donner la matrice de transition M (on considèrera les sommets du graphe dans l'ordre alphabétique).
2. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ et donner une interprétation concrète des coefficients de cette matrice.
3. Déterminer l'état probabiliste stable du système et interpréter les résultats obtenus.
4. a) Que vaut, pour tout entier naturel n, la somme $a_n + b_n$?

   b) On sait, pour tout entier naturel n, que $P_{n+1} = P_n \times M$; démontrer, pour tout entier naturel n, que

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = a_n - 0,75$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8 dont on précisera le premier terme.

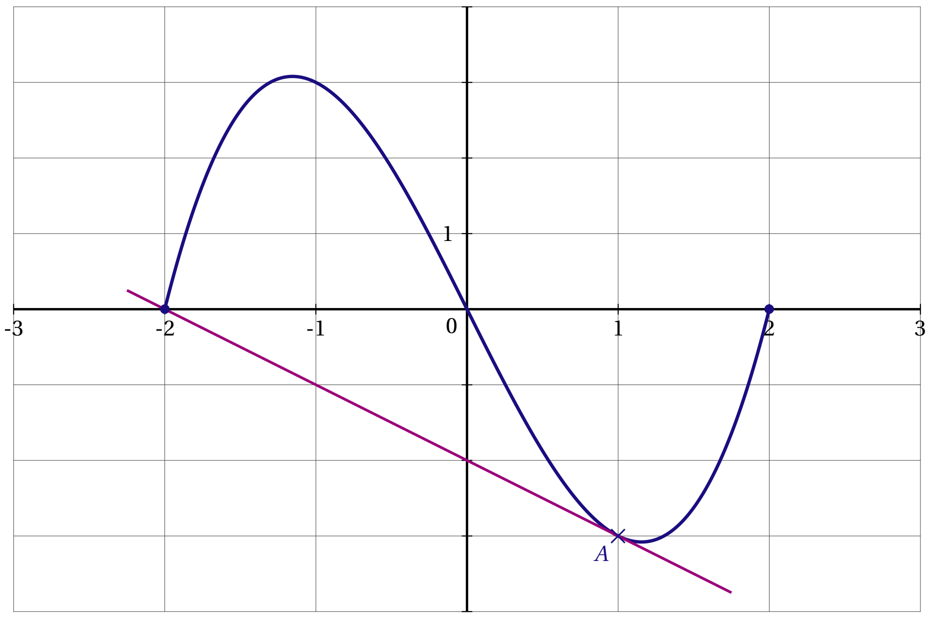
   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,75.$$

   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;2]$, et sa tangente en son point A d'abscisse 1 ; cette tangente passe par le point de coordonnées $(0;-2)$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-2;2]$.



Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exacte ; préciser laquelle sur la copie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Le nombre dérivé noté $f'(1)$ est égal à :

   a) 1 **b)** $-\dfrac{1}{3}$ **c)** -1 **d)** 3

2. La fonction u telle que $u(x) = \ln\left[f(x)\right]$ est définie sur :

   a) $[-2;0]$ **b)** $]-2;0[$ **c)** $]0;2[$ **d)** $[0;2]$

3. On considère F une primitive de f sur l'intervalle $[-2;2]$.

   La fonction F est décroissante sur :

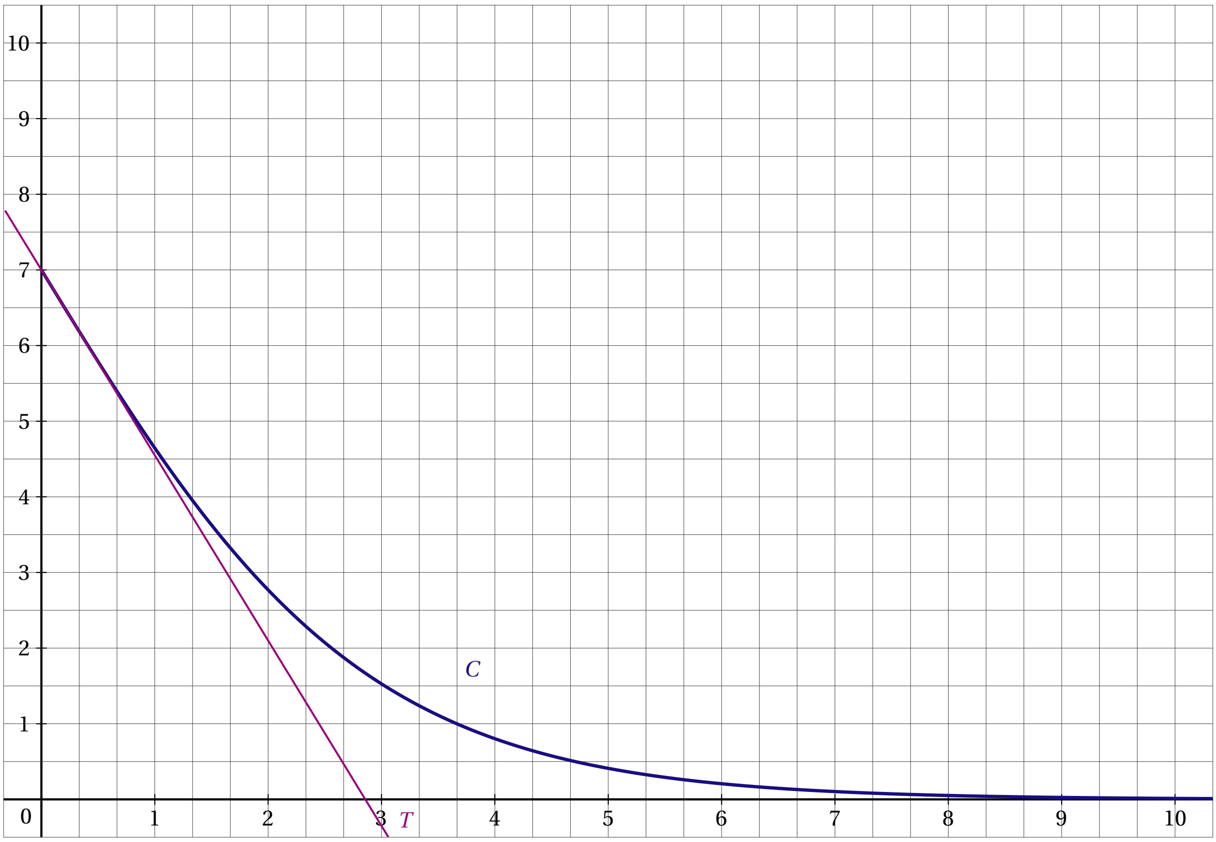
   a) $[-2;0]$ **b)** $[-2;2]$ **c)** $[0;2]$ **d)** $[-1;1]$

4. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. On a :

   a) $I < 0$ **b)** $0 \leqslant I \leqslant 1$ **c)** $1 < I < 3$ **d)** $I \geqslant 3$

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On a représenté ci-dessous la courbe C d'une fonction g définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ ainsi que la tangente T à cette courbe en son point de coordonnées $(0;7)$. On admet que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de de $+\infty$. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.



PARTIE A

1. Préciser la valeur du réel $g(0)$.
2. On admet que la tangente T passe par le point de coordonnées $(4;-2,8)$. Justifier que la valeur exacte de $g'(0)$ est $-2,45$.
3. Préciser la valeur de la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. On admet que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{a}{e^{bx}+1}$$

où a et b sont des nombres réels.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a $g'(x)=\dfrac{-abe^{bx}}{\left(e^{bx}+1\right)^2}$.

b) En utilisant les résultats des questions 1 et 2, déterminer les valeurs des réels a et b.

PARTIE B

On considère un objet manufacturé dont le prix unitaire est x, en centaines d'euros.
D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ pour cet objet, en centaines d'unités, sont définies pour tout x positif ou nul par :

$$f(x)=e^{0,7x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{14}{e^{0,7x}+1}$$

1. Si le prix de vente unitaire de l'objet est 300 €, combien d'objets (à l'unité près) les consommateurs sont-ils prêts à acheter.
2. Calculer le prix de vente unitaire de l'objet, arrondi à l'euro près, pour que la demande soit de 350 objets.

3. a) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = g(x)$, et donner une valeur approchée au centième de cette solution.

   On appelle « prix d'équilibre » le prix permettant l'égalité entre l'offre et la demande. Quel est le prix d'équilibre, arrondi à l'euro près ?

   b) Au prix d'équilibre, quelle est la valeur commune de l'offre et de la demande, arrondie à l'unité près ? Quel est le chiffre d'affaire généré par les ventes au prix d'équilibre ?

ANTILLES GUYANE SEPTEMBRE 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples).
Pour chaque question, une seule proposition exacte. Indiquer sur la copie le numéro de chaque question, et recopier la réponse choisie; aucune justification n'est demandée.
Barème : une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - \mathrm{e}^{2x-\ln(3)}$$

et soit C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. La fonction f :

   a. est croissante sur $\mathbb{R}$ b. est décroissante sur $\mathbb{R}$ c. n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$

2. Le réel $f(1)$ est égal à :

   a. $5-\mathrm{e}^2$ b. $\dfrac{6-\mathrm{e}^2}{3}$ c. $-0,46$ d. $\dfrac{\ln(3)}{2}$

3. La limite de f en $+\infty$ est égale à :

   a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. 2 d. 0

4. La tangente à la courbe C au point d'abscisse $\ln(3)$ a pour équation :

   a. $y=-3x+3\ln(3)-1$ b. $y=-3x-1$ c. $y=-6x+6\ln(3)-1$ d. $y=-x+\ln(3)-3$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

L'entreprise E produit un modèle de lave-vaisselle. La production de ce lave-vaisselle est répartie sur trois sites industriels A, B, C, qui sont d'importances inégales.

— Le site A assure 60 % de la production.

— Le site B assure 30 % de la production.

— Le site C assure le reste de la production.

Après plusieurs années de commercialisation, on note que 37 % des lave-vaisselles en provenance du site A connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation; 25 % des lave-vaisselles provenant du site B connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation, et 12 % de ceux provenant du site C connaissent une panne avant 5 ans d'utilisation.
On choisit au hasard un lave-vaisselle produit par l'entreprise E.

Dans la suite on désigne par A, (respectivement par B, C) l'évènement « le lave-vaisselle choisi est issu du site de production A (respectivement B, C) ».
On désigne par S, l'évènement « le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans »; $\overline{S}$ désigne l'évènement contraire de S.
Dans cet exercice les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

   b) On note $p_A(S)$ (respectivement $p_B(S)$, $p_C(S)$) la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A (respectivement B, C) est réalisé; calculer $p_A(S)$, $p_B(S)$ et $p_C(S)$.

c) Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur les branches adéquates les probabilités données dans l'énoncé.

2. Quelle est la probabilité que le lave-vaisselle provienne du site A et connaisse une panne avant 5 ans ?
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est 0,309.
4. Le lave-vaisselle est tombé en panne avant 5 ans d'utilisation ; quelle est la probabilité qu'il provienne du site B ?
5. *Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   L'entreprise E assure le service après-vente : si le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans d'utilisation, elle finance la réparation, dont le prix est estimé à 110 euros par appareil réparé.

   Déterminer, pour l'entreprise, le coût moyen par lave-vaisselle de ces réparations.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les employés d'une grande zone commerciale ont le choix entre deux types de restaurants : un « self » ou un restaurant « traditionnel » avec service à la place. On admet que tous les employés mangent chaque jour dans l'un des deux restaurants. On a constaté que :

— si un employé mange au « self » un jour donné, alors le lendemain il y mange également avec une probabilité de 0,8 ;

— si un employé mange dans le restaurant « traditionnel » un jour donné, alors le lendemain il change pour le « self » avec une probabilité de 0,4.

On choisit au hasard un employé de la zone commerciale.
Si n est un entier naturel non nul, on appelle s_n la probabilité que l'employé choisi mange au « self »le n-ième jour, et par $t_n = 1 - s_n$ la probabilité qu'il mange au restaurant « traditionnel » le n-ième jour.
Pour l'état initial, on admet que $s_1 = t_1 = 0,5$, c'est-à-dire que le premier jour, les probabilités de choix du « self » ou du restaurant « traditionnel » sont égales.
Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la matrice $P_n = \begin{pmatrix} s_n & t_n \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$ où M désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ et n un entier naturel non nul.
3. Déterminer la probabilité que l'employé tiré au sort mange au « self »le deuxième jour.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Démontrer que pour tout entier nature n non nul, on a : $s_{n+1} = \dfrac{2}{5}s_n + \dfrac{2}{5}$.
6. Dans la suite, pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = s_n - \dfrac{2}{3}$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{1}{6}$.

   b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $s_n = -\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}$.

   d) Déterminer la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Afin de mesurer l'évolution de l'utilisation du vélo, une communauté urbaine organise le comptage régulier des vélos en plusieurs points de l'agglomération.
Le tableau ci-dessous indique le nombre moyen, sur un mois, de vélos comptés par jour.

Mois	Mars 2005	Juin 2005	Décembre 2005	Juin 2006	Décembre 2006	Juin 2007
Rang du mois : x_i	0	3	9	15	21	27
Nombre moyen de vélos comptés par jour (en milliers) : y_i	3,9	4,4	5,1	6,4	7,1	7,6

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
   On prendra pour unités graphiques : en abscisse, 1 centimètre pour représenter 3 mois et en ordonnées, 1 centimètre pour représenter 1 millier.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la représentation graphique.
3. Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients obtenus à 10^{-2} près.
   Tracer la droite d'ajustement sur la représentation graphique.
4. À l'aide de l'ajustement réalisé, déterminer une estimation du nombre moyen de vélos que l'on pouvait prévoir par jour au mois de décembre 2007 (on arrondira le résultat à 10^{-1}).
5. On sait qu'en décembre 2007, le nombre moyen de vélos observés a été de 7600.
   Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise dans l'estimation précédente.

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5;18]$ par :

$$f(x) = 4\ln(3x+1) - x + 3$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur $[0,5;18]$. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0,5;18]$, on a :
$$f'(x) = \frac{-3x+11}{3x+1}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,5;18]$.
3. Vérifier que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution dans $[0,5;18]$, que l'on note α.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.
4. On note F la fonction définie sur l'intervalle $[0,5;18]$ par :
$$F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x.$$
   a) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0,5;18]$.
   b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

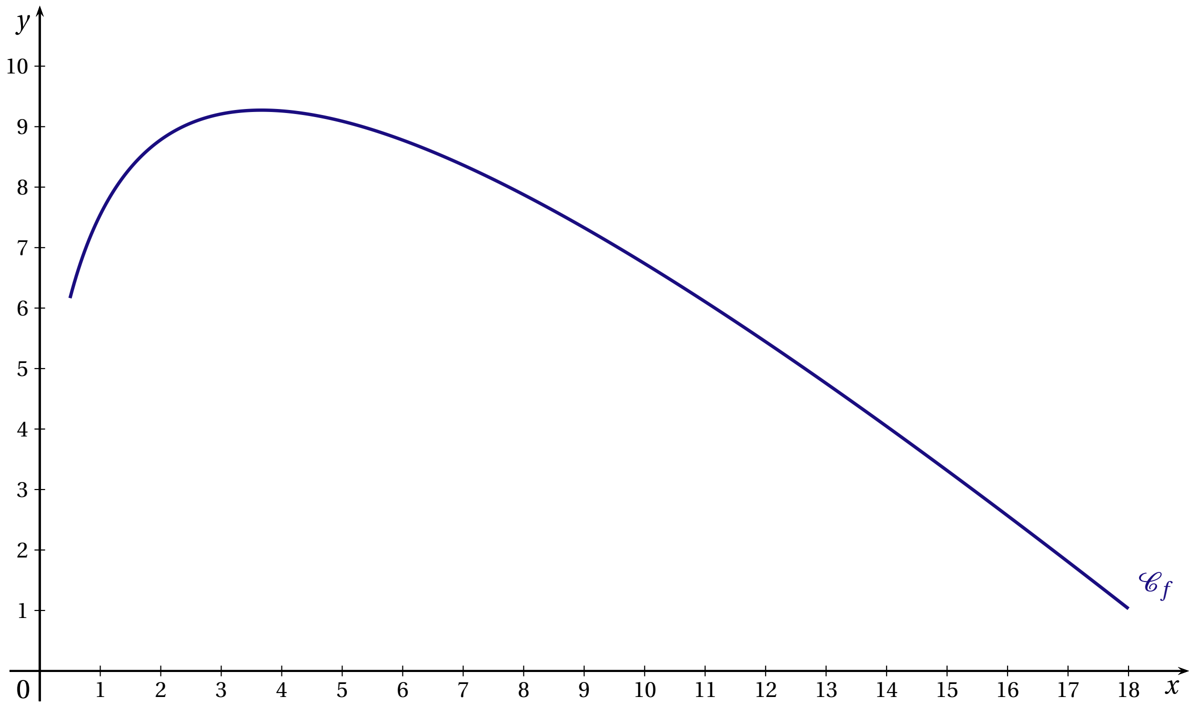
PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
En utilisant les résultats précédents et en justifiant, répondre aux questions suivantes.

1. Pour quelle quantité de pièces produites, arrondie à l'unité, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, arrondi à la dizaine d'euros ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice supérieur ou égal à 6000 euros ?
3. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces.
   On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

ANNEXE

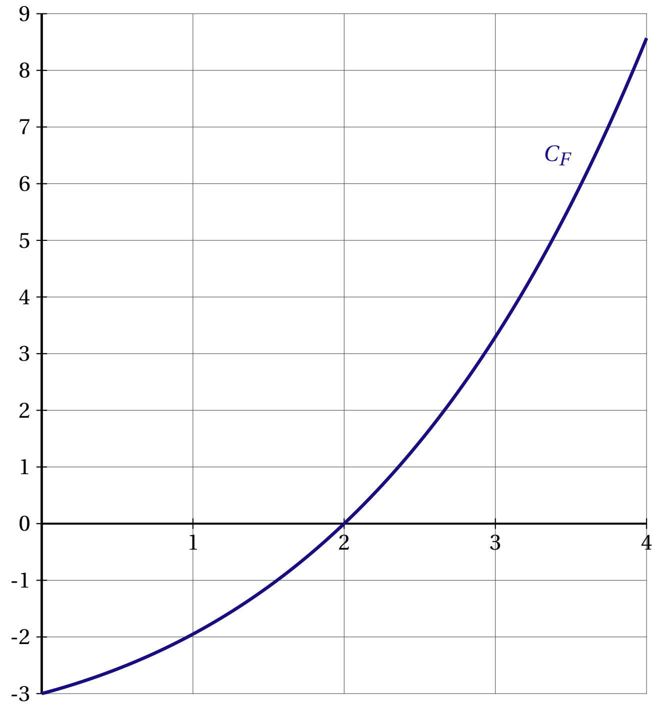


ASIE 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et **la réponse choisie** correspondante.

1. Le prix d'un article a augmenté de 20 % puis a baissé de 20 %. Ce prix :
   - a baissé de 2 %
   - a augmenté de 4 %
   - n'a pas bougé
   - a baissé de 4 %
2. La fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2(\ln x+3)$ est la fonction f' définie sur $]0;+\infty[$ par :
   - $f'(x) = 2x\ln x+7$
   - $f'(x) = 2x\ln x+5x$
   - $f'(x) = x(2\ln x+7)$
   - $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{x}$
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x - 1 \leqslant 0$ est :
   - $]-\infty;1]$
   - $]-\infty;\mathrm{e}]$
   - $]0;\mathrm{e}]$
   - $]0;+\infty[$
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   La fonction F est une de ses primitives sur cet intervalle et la courbe représentative de la fonction F est tracée dans le repère ci-dessous :



   L'intégrale $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :
   - $\dfrac{\ln 3}{3}$
   - $\ln 3$
   - $-\ln 3$
   - $3\ln 3$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le ministère de l'Écologie, du Développement durable, des Transports et du Logement précise les enjeux d'une parité homme-femme (égalité de leur représentation) :
« Viser une amélioration de la parité homme-femme [...] peut être vu comme une manière d'aider la société à évoluer en mobilisant toutes les compétences ».
Le tableau suivant présente la part des femmes dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public de 1998 à 2008, à l'exception de 2007 :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Part des femmes y_i en %	23,2	23,4	24,2	24,9	24,7	24,9	25,4	25,4	26		27,2

Sources : ministère de l'Intérieur - DGAFP - Insee - Juillet 2010

Ce même tableau est donné en annexe et est complété par les indices des parts des femmes dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public, en prenant 1998 comme année de référence. On a aussi, en annexe, représenté le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$, avec $1 \leqslant i \leqslant 11$ associé à la série statistique.
On se propose d'étudier l'évolution de la part des femmes dans les emplois de cadre.

1. **Calcul d'indices et de pourcentages** :
   a) Vérifier que la part des femmes dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public en 2007 est, arrondi au dixième, égale à 26,7 %.
   b) Calculer l'indice correspondant à l'année 2000. On précisera les calculs sur la copie.
   c) Calculer le pourcentage d'augmentation de la part des femmes entre 2005 et 2006.
   Si l'évolution amorcée entre 2005 et 2006 s'était poursuivie au même rythme, quelle aurait été la part des femmes, en pourcentage, dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public en 2008 ?
2. **Ajustement affine**
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de y en x pour l'ensemble des onze points du nuage. *Les coefficients seront arrondis au centième.*
   b) Tracer cette droite sur le graphique donné en annexe **à rendre avec la copie**.
3. **Modélisation** :
   On admet que cet ajustement affine permet de faire des prévisions au moins jusqu'en 2013.
   a) Estimer la part des femmes, en pourcentage, dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public en 2012.
   b) Chloé affirme : « La parité homme-femme dans ce type d'emploi à responsabilité sera atteinte à partir de 2071 ».
   Confirmer par un calcul l'affirmation de Chloé.
   Son affirmation est-elle pertinente ?

ANNEXE DE L'EXERCICE À RENDRE AVEC LA COPIE

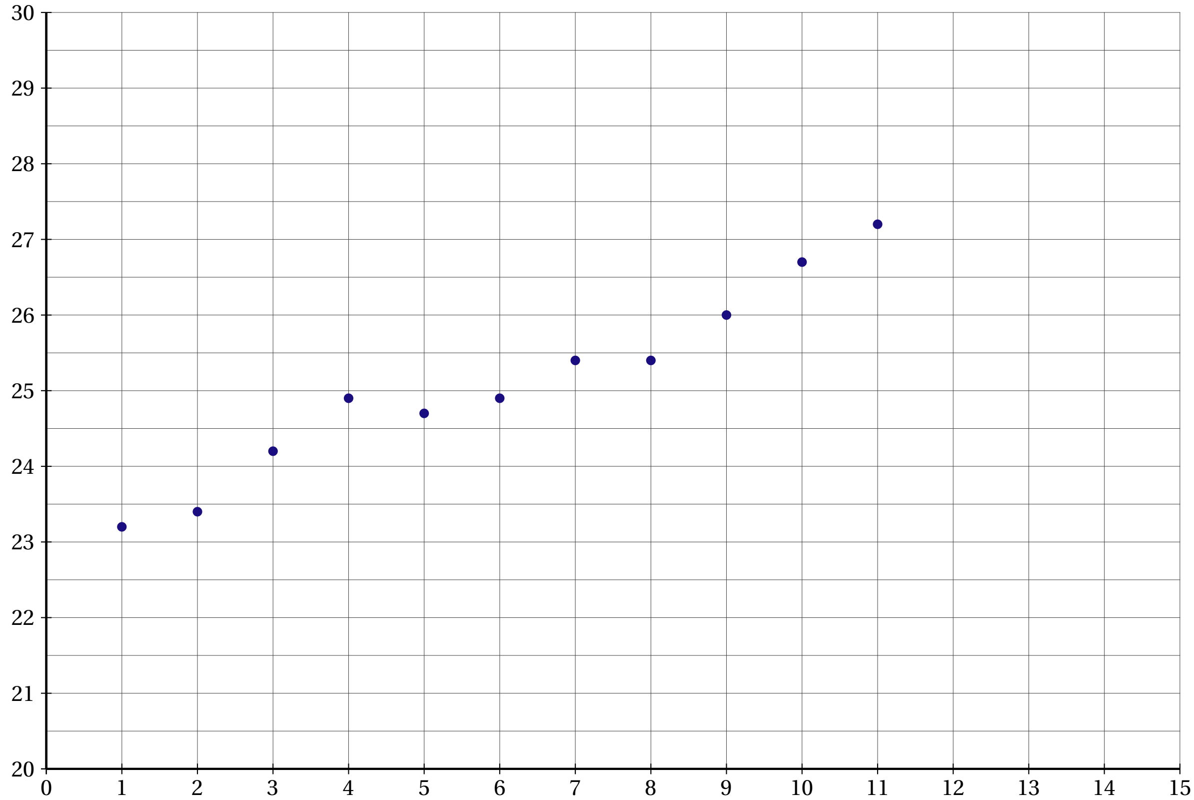
TABLEAU :

Ce tableau présente la part des femmes dans les emplois de cadre du secteur privé ou semi-public ainsi que les indices de ces parts en prenant 1998 comme année de référence.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Part y_i en %	23,2	23,4	24,2	24,9	24,7	24,9	25,4	25,4	26		27,2
Indice des parts arrondi à l'unité	100	101		107	106	107	109	109	112	115	117

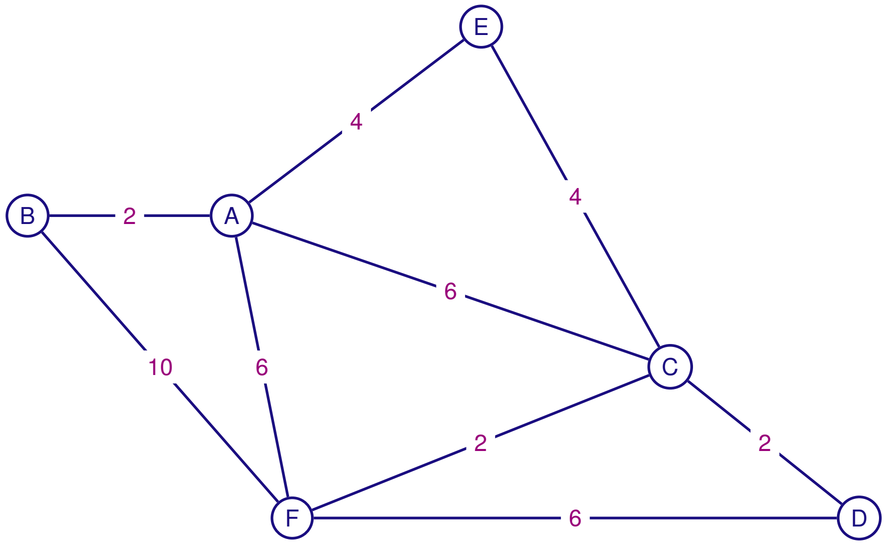
Sources : ministère de l'Intérieur - DGAFP - Insee - Juillet 2010

NUAGE DE POINTS :



EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont déterminées et sont reliées par des chemins.
Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins.
Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins.
Les candidats sont positionnés initialement sur la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale.
Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?
2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).

   a) Écrire la matrice M.

   b) On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

   Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D et on lui signale qu'il a oublié son dossard au point B. Devant le récupérer, il souhaite emprunter au maximum trois chemins. Combien a-t-il de possibilités ?

   c) Donner, le trajet correspondant à la distance la plus courte lui permettant d'aller récupérer son dossard.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

L'opérateur téléphonique Boomtel propose à ses abonnés deux types d'accès internet à haut débit :

— un accès internet sur ligne fixe ;

— un accès 3G sur téléphone portable.

Aujourd'hui, l'entreprise fait les constats suivants sur les accès internet à haut débit de ses abonnés :

— 58 % des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe. Parmi ceux-là, 24 % ont également un accès 3G sur téléphone portable;

— parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 3G sur téléphone portable.

Rappels de notation : Soient A et B deux évènements,

— *la probabilité de l'évènement A est notée* $p(A)$ *;*

— *si* $p(B) \neq 0$, $p_B(A)$ *désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé;*

— *l'évènement contraire de l'évènement A est noté* $\overline{A}$.

Pour une enquête de satisfaction, la fiche d'un abonné est prélevée au hasard.
Dans cet exercice on note :

— F l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe »;

— G l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès 3G sur téléphone portable ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(F)$, de $p_F(G)$ et de $p_{\overline{F}}(G)$.
2. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
3. Calculer $p\left(F \cap \overline{G}\right)$. Interpréter ce résultat.
4. a) Vérifier que la probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable est de 0,8062.

   b) Peut-on affirmer qu'au moins 25 % des abonnés ont un accès 3G sur téléphone portable?
5. On prélève successivement les fiches de trois abonnés. On admet que le nombre de fiches est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler le tirage à un tirage avec remise.
   Calculer la probabilité qu'exactement une des fiches tirées soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On s'intéresse à une entreprise de détergents industriels. Elle produit chaque jour une quantité q en tonnes comprise entre 0 et 20. On rappelle que :

— Le coût marginal $C_m(q)$ est la variation du coût obtenue par la production et la vente d'une tonne supplémentaire de détergent sachant qu'on en a déjà vendu une quantité de q tonnes.

— Le bénéfice marginal $B_m(q)$ est la différence entre le prix unitaire et le coût marginal $C_m(q)$.

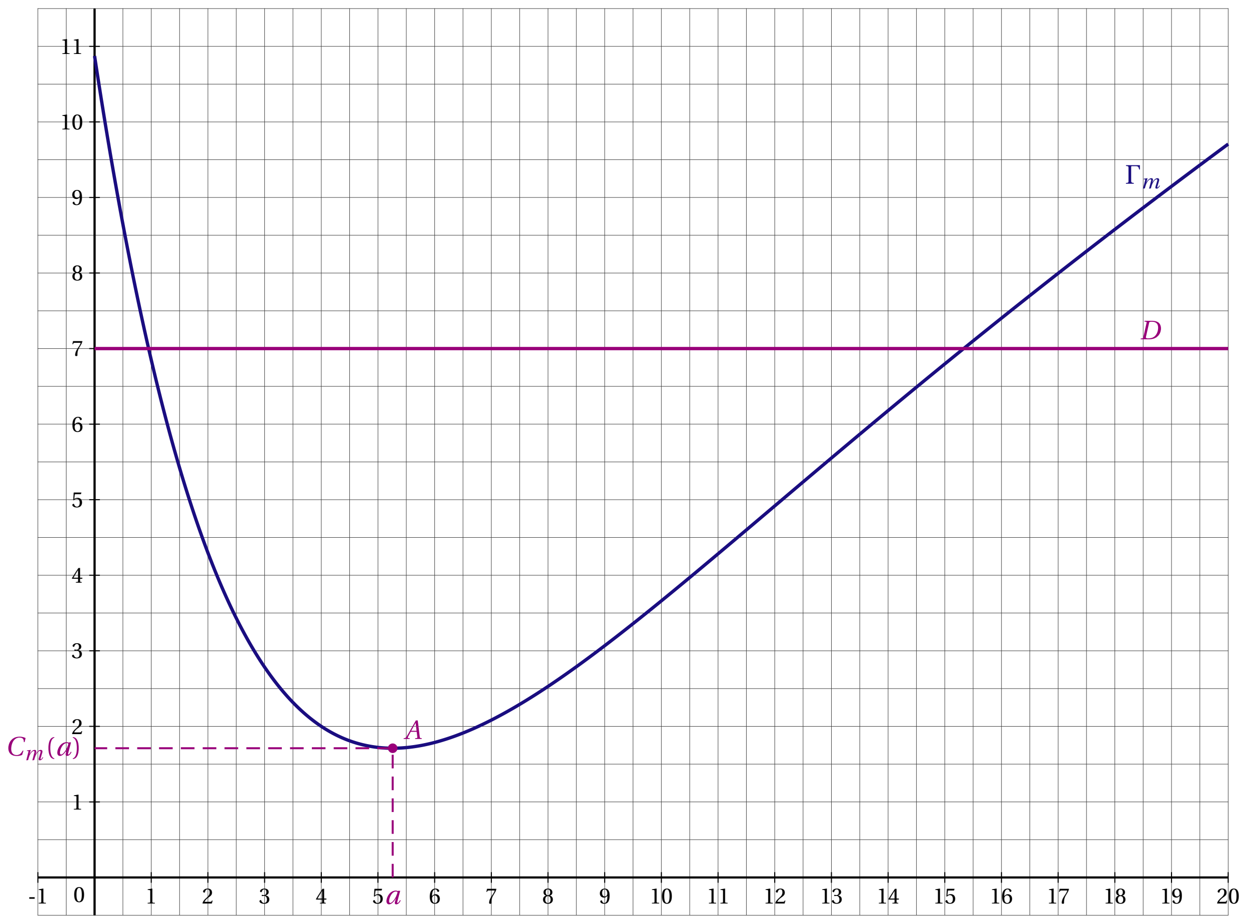
PARTIE A : ASPECT GRAPHIQUE

Dans le repère suivant, on donne :

— la courbe représentative Γ_m de la fonction C_m correspondant au coût marginal en milliers d'euros;

— la courbe représentative D de la fonction U correspondant au prix de vente unitaire en milliers d'euros;

— Le point $A(a; C_m(a))$, sommet de la courbe Γ_m.



Répondre aux questions suivantes sans justifier :

1. Déterminer graphiquement $C_m(4)$.
2. Déterminer graphiquement $B_m(4)$.
   Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'entreprise.
3. Pour quelle(s) quantité(s), en tonnes, le bénéfice marginal est-il nul ?
   (*les valeurs seront données à la demi-tonne près*).
4. En déduire un encadrement de la quantité à produire, en tonnes, pour obtenir un bénéfice marginal positif.

PARTIE B : ASPECT ALGÉBRIQUE

Dans cette partie, le coût marginal est donné par $C_m(q) = 0{,}5q + (4 - q)\mathrm{e}^{(1-0{,}25q)}$ pour q appartenant à l'intervalle $[0;20]$ et le prix de vente unitaire est donné par $U(q) = 7$ pour q appartenant à l'intervalle $[0;20]$.
On admet que la fonction C_m est dérivable sur l'intervalle $[0;20]$.
Le tableau de variation de la fonction C_m est donné ci-dessous. On admet que le nombre réel a est compris entre 5 et 6.

<table>
<tr><td>q</td><td>0</td><td></td><td>a</td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td>$C'_m(q)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$C_m(q)$</td><td>$C_m(0)$</td><td>↘</td><td>$C_m(a)$</td><td>↗</td><td>$C_m(20)$</td></tr>
</table>

1. a) Justifier que l'équation $C_m(q) = 7$ admet une unique solution q_0 dans l'intervalle $[10;20]$.

b) À l'aide de votre calculatrice, donner un arrondi de q_0 au dixième.

c) Donner, en justifiant, la valeur de $B_m\left(q_0\right)$.
Ce résultat est-il cohérent avec la question 3 de la partie A?

2. Vérifier que la fonction C, définie sur l'intervalle $[0;20]$ par :

$$C(q) = 10 + 0,25q^2 + 4q\mathrm{e}^{[1-0,25q)}$$

est une primitive de la fonction C_m. Cette fonction C est la fonction coût total.

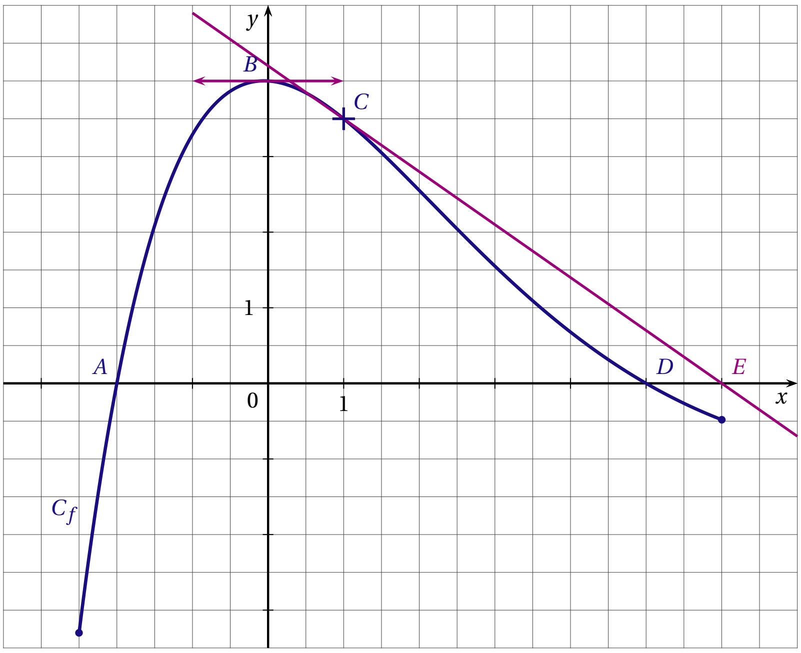
3. Déterminer le bénéfice total obtenu pour la fabrication et la vente de 15,3 tonnes de détergent.

CENTRES ÉTRANGERS 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Pour chaque question, indiquer par a), b), c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2};6\right]$.
La courbe C_f tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Le point A a pour coordonnées $(-2;0)$, le point B a pour coordonnées $(0;4)$, le point C a pour coordonnées $\left(1;\frac{7}{2}\right)$, le point D a pour coordonnées $(5;0)$ et le point E a pour coordonnées $(6;0)$.
On précise que la droite (CE) est tangente à la courbe C_f au point C et que la courbe C_f admet au point B une tangente horizontale.



On note g et h les fonctions définies respectivement par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$ et $h(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.

1. La fonction g est définie sur l'intervalle :

   a) $]-2;5[$ **b)** $[-2;5]$ **c)** $\left[-\frac{5}{2};6\right]$

2. Le nombre $g(1)$ est égal à :

   a) $\frac{\ln 7}{\ln 2}$ **b)** $\ln 7 - \ln 2$ **c)** $\frac{7}{2}$

3. On note f' la fonction dérivée de f, le nombre $f'(1)$ est égal à :

   a) 3,5 **b)** $-\frac{10}{7}$ **c)** $-0{,}7$

4. On note h' la fonction dérivée de h, le nombre $h'(0)$ est égal à :

   a) e^0 **b)** 0 **c)** e^4

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau suivant donne la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention au baccalauréat, série ES, entre 2002 et 2009.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Proportion y_i en %	25,5	28,6	30	33,1	36,8	41	41,1	44,1

Source : ministère de l'Éducation nationale et ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

1. Calculer le taux d'évolution de la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention au baccalauréat ES entre 2002 et 2009. On exprimera le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi à l'unité.
2. Dans cette question, on envisage un ajustement affine et on admet qu'une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $y = 2{,}73x + 25{,}47$ (les coefficients étant arrondis à 0,01 près).
   En supposant que ce modèle reste valable pour les années suivantes :
   a) Estimer la proportion de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES en 2012.
   b) Estimer l'année à partir de laquelle la proportion de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES dépassera 60%.
3. Dans cette question, on envisage un ajustement exponentiel et on pose $z = \ln y$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$								

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 0,01 près.
   c) En déduire que $y = A \times B^x$ où A et B sont deux réels à déterminer. On arrondira à 0,01 près.
   d) En supposant que ce modèle reste valable pour les années suivantes, calculer la proportion, arrondie à 0,1%, de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES en 2012.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Un sondage a été effectué auprès des anciens élèves d'un lycée quelques années après l'obtention de leur baccalauréat.
Ce sondage révèle que 55% d'entre eux poursuivent leurs études à la faculté, 10% ont intégré une école d'ingénieur et le pourcentage restant est sur le marché du travail (en activité ou en recherche d'emploi).

Ce sondage révèle aussi que :

— 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études à la faculté ont fait le choix de vivre en colocation.

— 30% des anciens élèves qui ont intégré une école d'ingénieur ont fait le choix de vivre en colocation.

— 15% des anciens élèves sur le marché du travail ont fait le choix de vivre en colocation.

On interroge au hasard un ancien élève du lycée et on note :

F l'évènement : « l'ancien élève poursuit ses études à la faculté » ;

I l'évènement : « l'ancien élève a intégré une école d'ingénieur » ;

T l'évènement : « l'ancien élève est sur le marché du travail » ;

C l'évènement : « l'ancien élève vit en colocation ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'évènement $F \cap C$ puis calculer la valeur exacte de sa probabilité.
   b) Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,33.
3. Un ancien élève vit en colocation. Calculer la probabilité qu'il poursuive ses études à la faculté.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le responsable du sondage affirme : « Plus de la moitié des élèves n'ayant pas fait le choix de la colocation poursuivent des études ».
   Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier.
5. On interroge au hasard trois anciens élèves. On suppose que le nombre d'anciens élèves est suffisament important pour considérer que ce choix est fait de manière indépendante.
   Calculer la probabilité pour qu'au moins un des anciens élèves vive en colocation. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.

Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.
Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

— Lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5.
— Si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8.
— Si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.
On considère que lors du match, n transformations sont tentées avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état : « Basile réussit sa transformation ».

Pour $n \geqslant 1$, on note :

— p_n la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation.
— q_n la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation.
— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\text{T}}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste P_2.

PARTIE B

1. a) En utilisant l'égalité $P_{n+1} = P_n\text{M}$, montrer que $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6q_n$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
   b) En déduire que la suite (p_n) converge et donner sa limite.
   c) Interpréter le résultat précédent.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (a-b-ax)\mathrm{e}^{-x}$
2. On donne $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$. En déduire a et b.

PARTIE B

Dans cette partie, on admettra que $a = 4$ et $b = 1$. Donc pour tout réel x, $f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (On pourra utiliser le fait que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$).
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine.
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.

1. Quel est le coût de production maximal hebdomadaire ? On arrondira le résultat à l'euro près.
2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0;5]$ par $F(x) = (-4x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur ce même intervalle.
3. a) Calculer $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
   b) Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

FRANCE MÉTROPOLITAINE 2012

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Sur le site http ://www.agencebio.org, on a extrait des informations concernant l'agriculture en France métropolitaine.

Document 1

En 2008, la surface agricole utilisée (SAU) était de 27537688 hectares dont 583799 hectares en mode de production biologique.

Document 2

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface en mode de production biologique (en hectares)	419750	517965	550990	534037	550488	552824	557133	583799
Part (en %) de la surface en mode de production biologique dans la SAU : y_i	1,4	1,75	1,87	1,93	1,99	2	2,02	2,12

PARTIE A

1. D'après le document 2, la part de la surface en mode de production biologique dans la SAU est de 2,12 % en 2008. En utilisant le document 1, justifier par un calcul cette information.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de la surface en mode de production biologique entre 2007 et 2008. Ce pourcentage sera arrondi à 0,01 %.

PARTIE B

On a représenté, sur l'annexe, partie B, à rendre avec la copie, le nuage de points représentant la série statistitique $(x_i ; y_i)$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2}.
2. Tracer cette droite dans le repère fourni sur l'annexe, partie B.
3. À l'occasion d'un TPE, un groupe d'élèves a trouvé sur une autre page du site qu'en 2009 et en 2010, les parts de la surface en mode de production biologique dans la SAU sont respectivement 2,46 % et 3,09 %. L'ajustement affine précédent est-il adapté à ces nouvelles données ?

PARTIE C

Pour la suite de ce TPE, les élèves ont modélisé à l'aide d'un logiciel l'évolution de la part de surface en mode de production biologique dans la SAU sur la période de 2001 à 2012 par la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 12]$ par

$$f(x) = 0,0096x^3 - 0,1448x^2 + 0,7132x + 0,813.$$

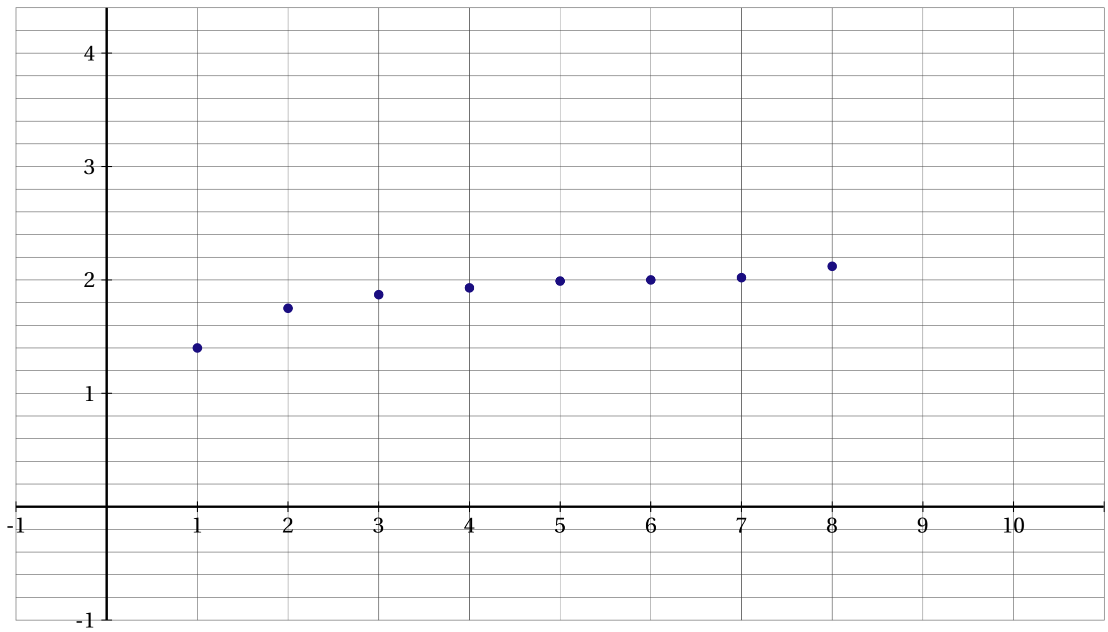
Cet ajustement est représenté sur l'annexe, partie C.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

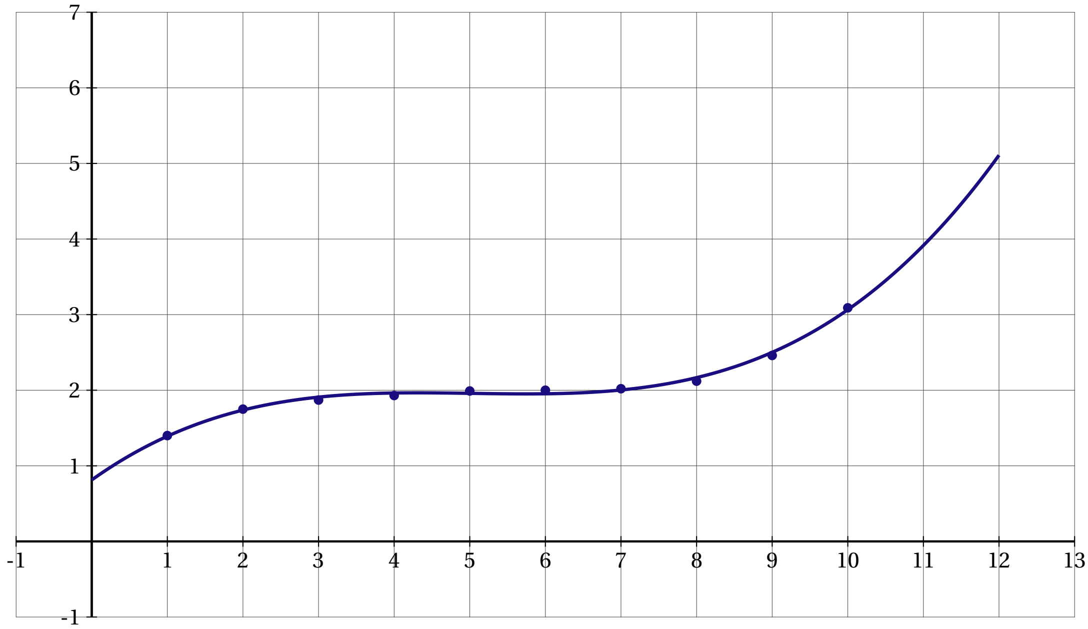
Le Grenelle de l'environnement s'est fixé comme objectif d'avoir 6 % de la SAU en mode de production biologique en 2012. Selon ce modèle, peut-on espérer que cet objectif soit atteint ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

PARTIE B

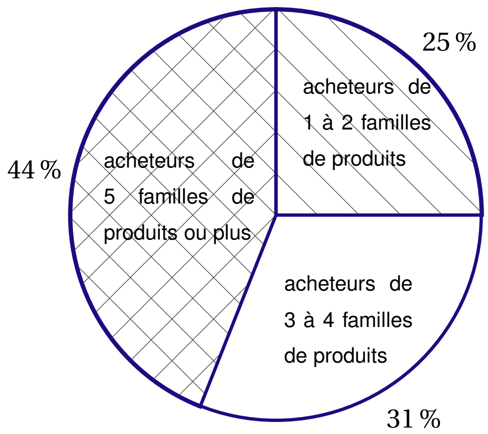


PARTIE C



EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2010 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Sur le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, informatique, loisirs, ...) achetés à distance au cours des 12 derniers mois.
L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :



Parmi les acheteurs de 1 à 2 familles de produits, 45 % sont retraités.

Parmi les acheteurs de 3 à 4 familles de produits, 25 % sont retraités.

Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré.
On note :

— A l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 1 à 2 familles de produits. »
— B l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
— C l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
— R l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. a) Calculer la probabilité $p(A \cap R)$.
   b) Déterminer la probabilité de l'évènement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
   c) On sait de plus que 21,7 % des acheteurs interrogés sont des retraités. Vérifier que $p(C \cap R) = 0{,}027$.
3. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8 %.
   Quelle décision prendra-t-il?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une région se divise en deux zones :
une zone A à proximité d'une grande agglomération,
une zone B à proximité de la mer.

Chaque année, 20 % des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.
On sait de plus qu'en 2010, 40 % de la population habitait en zone A.
On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste correspondant à l'année $2010+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

   b) Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.

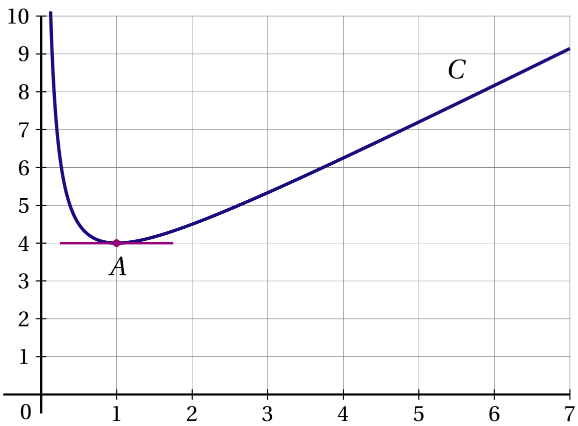
   a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.

   b) Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75 % de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;6]$. Le point $A(1;4)$ appartient à la courbe C. La tangente en A à la courbe C est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



1. Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à :

   a. 4 **b.** 0 **c.** -2 **d.** 1

2. Sur l'intervalle $]0;6]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet comme ensemble de solutions :

   a. $]0;1]$ **b.** $]0;6]$ **c.** $[1;6]$ **d.** $[4;9]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

   a. $12 < I < 13$ **b.** $0 < I < 2$ **c.** $5 < I < 8$ **d.** $-2 < I < 0$

4. On appelle F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;6]$. L'expression de F peut être :

   a. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ **b.** $F(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

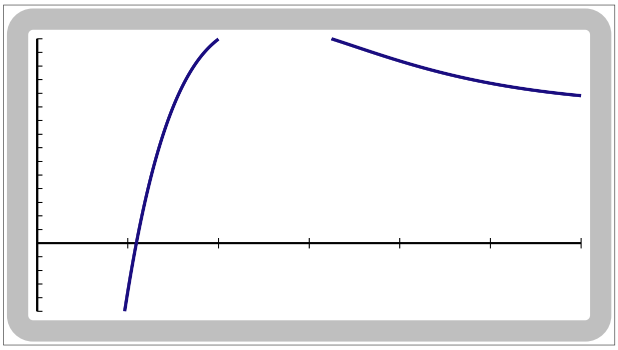
   c. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$ **d.** $F(x) = 2x + \ln x$

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par

$$f(x) = (200x - 300)\mathrm{e}^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.



PARTIE A : objectif « réaliser un bénéfice maximal »

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.
Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0;6]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;6]$,

$$f'(x) = (500 - 200x)\mathrm{e}^{-x-1}$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f.

PARTIE B : objectif « ne pas vendre à perte »

1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1;2]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

FRANCE MÉTROPOLITAINE SEPTEMBRE 2012

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes) une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

La fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$

On admet qu'elle est dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. L'image de $\ln 2$ par la fonction f est :
   - $\frac{1}{2} + \ln 2$
   - $-1 + \ln 2$
   - $3 - \ln 2$
   - $1 - 2\ln 2$
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 1 est :
   - $\mathrm{e} - 1$
   - e
   - $1 - \mathrm{e}$
   - 0
3. La limite de la fonction f en $-\infty$ est :
   - $-\infty$
   - 0
   - $+\infty$
   - 1
4. Une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction f est la fonction F définie sur l'ensemble des nombres réels par :
   - $F(x) = \mathrm{e}^x - 1$
   - $F(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 + x$
   - $F(x) = \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$
   - $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 1$
5. L'inéquation $f(x) \leqslant 1$ admet sur l'ensemble des nombres réels :
   - Aucune solution
   - Une solution
   - Deux solutions
   - Une infinité de solutions

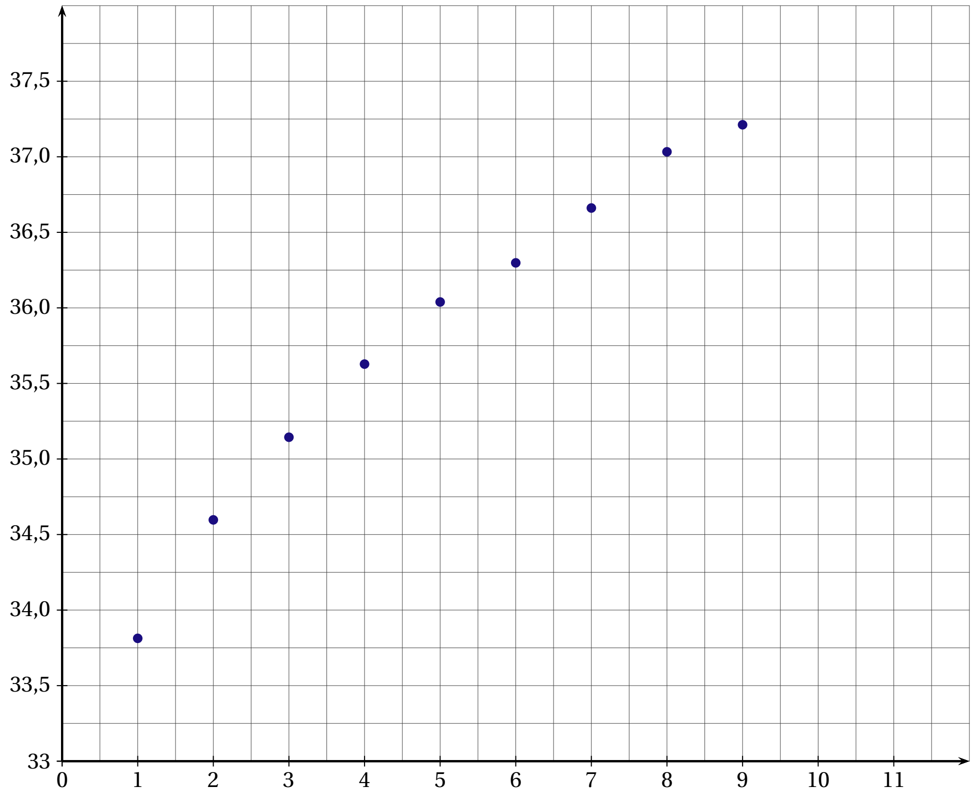
EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le tableau ci-dessous donne la structure du parc automobile français (véhicules particuliers et véhicules utilitaires) au premier janvier de chaque année, entre 2001 et 2009, en millions de véhicules.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de voitures y_i	33,813	34,597	35,144	35,628	36,039	36,298	36,661	37,033	37,212

Source : CCFA (statistiques de la construction automobile) juin 2010

Le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ pour i entier variant de 1 à 9, est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal.



PARTIE A : un premier ajustement

L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3}).
2. Tracer sur l'annexe à rendre avec la copie, la droite D d'ajustement affine.

PARTIE B : un deuxième ajustement

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[1;13]$ par :

$$f(x) = -0,03x^2 + 0,712x + 33,222.$$

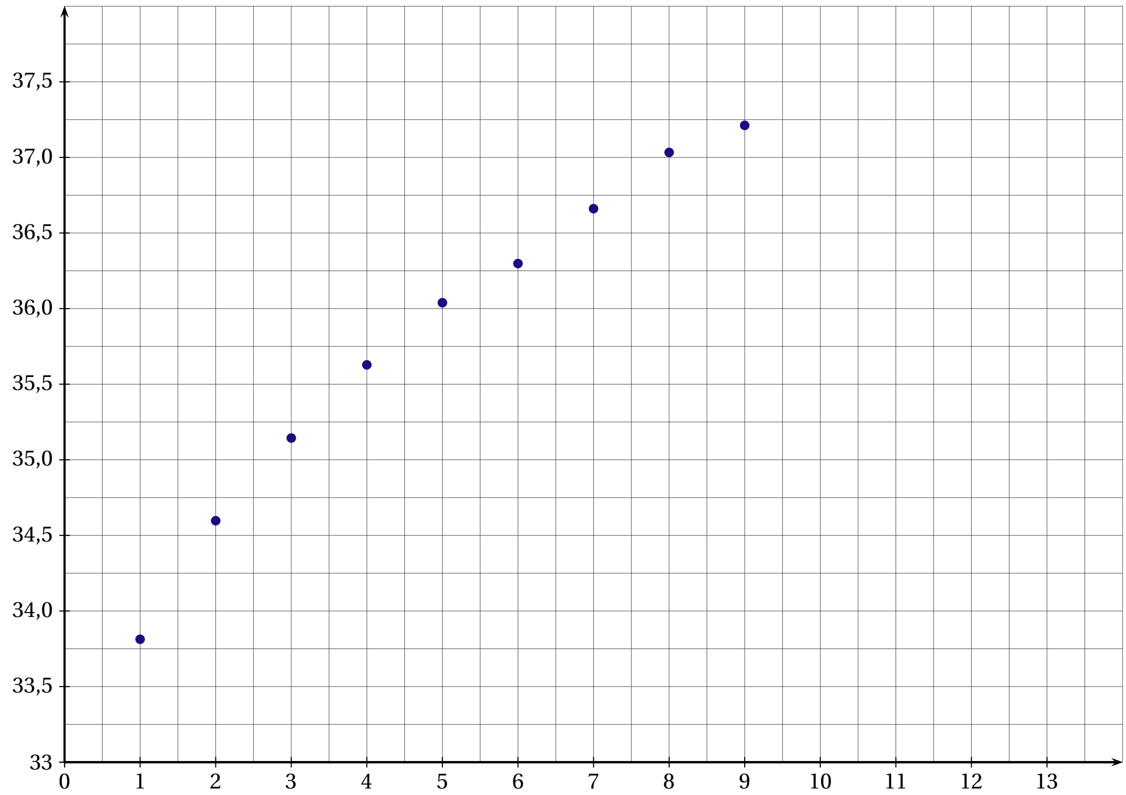
On suppose que f modélise sur l'intervalle $[1;13]$ l'évolution du nombre de véhicules du parc automobile exprimé en millions.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;13]$.
2. Tracer sur l'annexe à rendre avec la copie, dans le même repère, la courbe C représentative de la fonction f.

PARTIE C : comparaison des deux ajustements

Le premier janvier 2010, le nombre de véhicules du parc automobile était de 37,438 millions. Lequel de ces deux ajustements donne l'estimation la plus proche de la réalité ?

ANNEXE DE L'EXERCICE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.
À partir d'un sondage, on prévoit que :

— 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,

— le nombre de nouveaux abonnés sera de 20000 tous les ans.

1. Au premier janvier 2012, on comptait 50000 abonnés à ce jeu en ligne.
   Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60000.
2. a) Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année $2012+n$ est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = & 50000 \\ a_{n+1} & = & 0{,}8a_n + 20000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   b) Calculer a_2 et a_3.

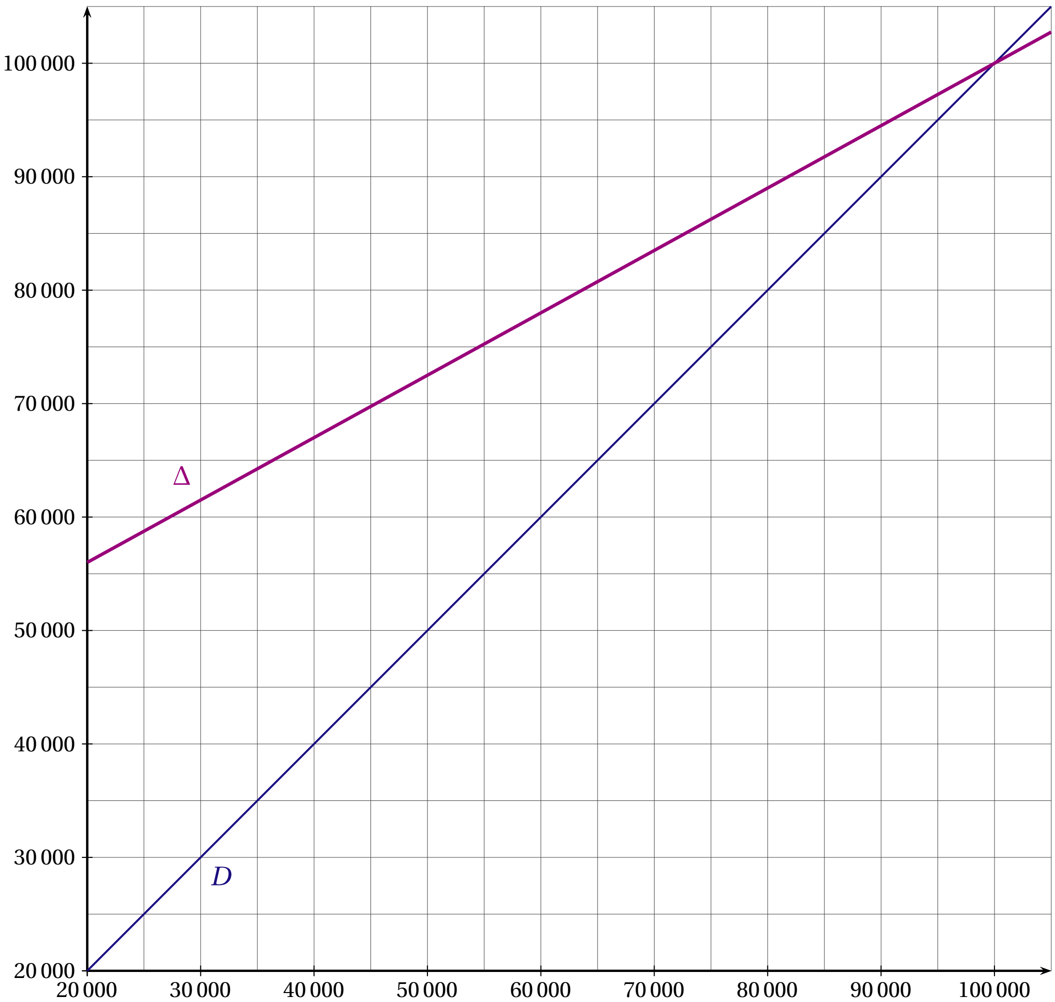
   c) Sur le graphique situé en annexe, à rendre avec la copie, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites D d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = 0{,}8x + 20000$.
   Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 puis construire a_1, a_2, a_3, a_4 en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.
   Laisser apparents les traits de construction.

   d) En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite (a_n).
3. On admet que pour tout nombre entier naturel n, $a_n = 100000 - 50000 \times 0{,}8^n$.

   a) Déterminer la limite de la suite (a_n).

b) *Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95000.

ANNEXE DE L'EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ) À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Le service qualité d'une entreprise textile contrôle systématiquement la texture et la couleur des tissus qu'elle produit.
Pour être déclaré de « qualité supérieure » un tissu doit subir avec succès les deux contrôles : le premier sur la texture, le second sur la couleur.
À cette fin, le service qualité effectue une étude statistique sur la production d'un mois. Cette étude a montré que :

— 90 % des tissus passent le contrôle sur la texture avec succès.
— Parmi ceux qui ne passent pas avec succès ce premier contrôle, 40 % ont passé le deuxième contrôle sur la couleur avec succès.
— 80 % des tissus sortant de cette entreprise sont déclarés de « qualité supérieure ».

Une machine de contrôle de qualité prélève au hasard un échantillon d'un des tissus produits par cette entreprise pendant le mois d'étude.
On considère les évènements suivants :

— T : « l'échantillon de tissu prélevé passe avec succès le premier contrôle sur la texture »,

— C : « l'échantillon de tissu prélevé passe avec succès le deuxième contrôle sur la couleur »,

— S : « l'échantillon de tissu prélevé est déclaré de qualité supérieure ».

Ainsi $S = T \cap C$.

Rappels de notation : Soient A et B deux évènements
- *la probabilité de l'évènement A est notée $p(A)$;*
- *si $p(B) \neq 0$, $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé;*
- *l'évènement contraire de l'évènement A est noté $\overline{A}$.*

1. À l'aide de l'énoncé, construire un arbre de probabilité décrivant la situation. Il sera complété au cours de la résolution de l'exercice.
2. Démontrer que $p_T(C) = \dfrac{8}{9}$.
3. Interpréter l'évènement $\overline{T} \cap \overline{C}$, puis calculer la probabilité de cet évènement.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement : « l'échantillon de tissu prélevé ne passe pas avec succès le contrôle sur la couleur » est égale à 0,16.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Une coopérative fabrique une huile précieuse qu'elle commercialise au prix de 100 euros le litre. Sa capacité maximale de production journalière est de 10 litres.
Le coût de production journalier pour la fabrication de cette huile précieuse est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$C(x) = 300\ln(x+1).$$

où x désigne la quantité d'huile produite exprimée en litres et $C(x)$ son coût de production journalier exprimé en euros.
La recette journalière de cette coopérative est modélisée par la fonction R définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$R(x) = 100x.$$

où x désigne la quantité d'huile exprimée en litre, produite et vendue, et $R(x)$ sa recette journalière exprimée en euros.
On suppose que toute la production d'un jour est vendue le même jour.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0;10]$.
2. Construire, sur une feuille de papier millimétré à rendre avec la copie, Γ et Γ' les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :

   — 1 cm pour un litre sur l'axe des abscisses,

   — 1 cm pour 100 euros sur l'axe des ordonnées.
3. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   Elle est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$, et on note B' sa fonction dérivée.

   a) Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;10]$,

   $$B'(x) = \frac{100x - 200}{x+1}.$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.

c) Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;10]$. Donner une valeur approchée du nombre réel α à 10^{-1} près.

d) En déduire l'étude du signe de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.

4. Lorsque $B(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice. Lorsque $B(x)$ est négatif, l'entreprise est en déficit.

a) Déterminer la quantité journalière minimale d'huile, au décilitre près, à produire et à vendre pour que la coopérative réalise un bénéfice journalier positif.

b) Préciser, à l'euro près, le bénéfice journalier maximal que peut réaliser cette coopérative.

c) À l'aide du graphique tracé à la question 2, interpréter les résultats des questions 4 a et 4 b.

LIBAN 2012

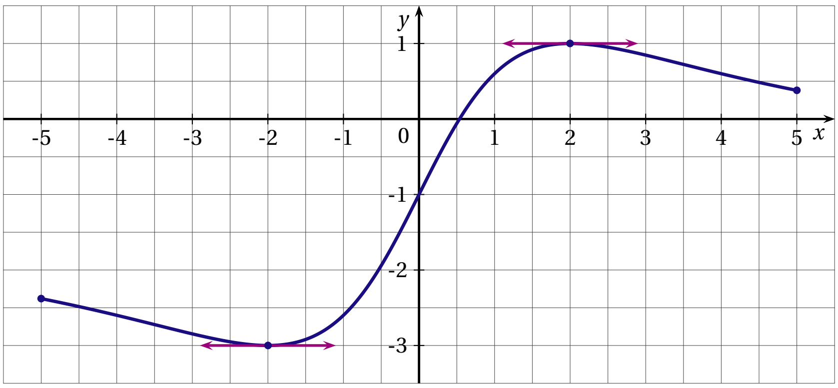
EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Pour chaque question, indiquer par a), b), c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.*

On considère la représentation graphique ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5;5]$ telle que :

— f s'annule en 0,5.

— La courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2 et une tangente horizontale au point d'abscisse 2.



On notera f' la fonction dérivée de f.

1. Sur $[-5;5]$, l'équation $f'(x)=0$ admet exactement :
   a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions
2. Sur $[-5;5]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :
   a) $[-2;2]$ b) $[0;5]$ c) $[0,5;5]$
3. La fonction g telle que $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ est définie sur :
   a) $[-2;2]$ b) $]0;1]$ c) $]0,5;5]$
4. On note $S=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ alors :
   a) $0<S<1$ b) $1<S<2$ c) $2<S<3$

EXERCICE 2 (6 points) *commun à tous les candidats*

1 ÈRE PARTIE : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-8$.

1. En écrivant que $f(x)=\mathrm{e}^x(x-1)-8$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x)=x\mathrm{e}^x$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0;+\infty[$.
4. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution a.
   b) Montrer que $2{,}040<a<2{,}041$.

c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0;+\infty[$.

5. a) Montrer que la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = xe^x - 2e^x - 8x$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

   b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

2 ÈME PARTIE : Application à une situation économique

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0;5]$.
La fonction f de la 1ère partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaines d'euros.
Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.
En utilisant les résultats de la 1ère partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. À partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices ?
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.
   Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur [3,5] (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

— une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur-soin »,

— des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

— 40% des clientes demandent une « couleur-soin ».

— parmi celles qui n'en veulent pas, 30% des clientes demandent un « effet coup de soleil ».

— de plus, 24% des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.
On notera C l'évènement « *la cliente souhaite une "couleur-soin"* ».
On notera M l'évènement « *la cliente souhaite un "effet coup de soleil"* ».

1. Calculer la probabilité de M sachant C notée $P_C(M)$.
2. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.
3. Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».
4. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,42.
5. Les évènements C et M sont-ils indépendants ?
6. Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

   a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

   b) Donner l'espérance E de cette loi.

   c) *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15% ?

EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

En pédiatrie (médecine des enfants), des études statistiques sur des enfants de moins de 36 mois ont permis de tracer les deux courbes fournies en annexe.
Pour un âge x donné en mois, la courbe inférieure C_1 donne le périmètre crânien minimal en centimètres, et la courbe supérieure C_2 donne le périmètre crânien maximal en centimètres.
Ces deux courbes sont souvent utilisées pour observer le développement des enfants.

A) LECTURES GRAPHIQUES

À l'aide du graphique fourni en annexe, répondre aux deux questions suivantes en laissant les traits de construction apparents :

1. Un enfant a un périmètre crânien égal à 41 cm.
   Déterminer l'âge minimum et l'âge maximum que peut avoir cet enfant.
2. Un enfant a un âge compris entre 15 et 21 mois.
   Déterminer le périmètre crânien minimum et le périmètre crânien maximum que peut avoir cet enfant.

B) ÉTUDE D'UN MODÈLE

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
Le pédiatre ne disposant pas de données d'individus de plus de 36 mois sur son lieu d'étude, il considère les valeurs moyennes des deux courbes précédentes.
Il obtient les mesures suivantes :

Âge x (en mois)	0	12	24	36
Périmètre crânien y (en cm)	36	46	48	50

1. On considère $z = \ln(54 - y)$.
   Recopier puis compléter le tableau suivant :

Âge x en mois	0	12	24	36
z				

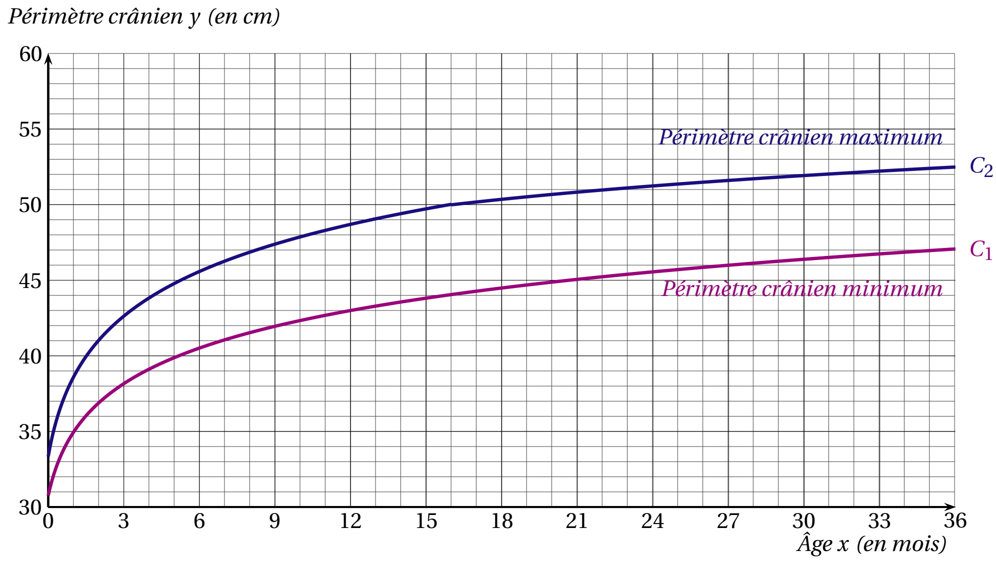
2. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en fonction de x, obtenue par la méthode des moindes carrés.
   b) En déduire que $y = 54 - \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a \approx -0{,}04$ et $b \approx 2{,}76$.

C) UTILISATION DU MODÈLE PRÉCÉDENT

Dans cette partie, on utilisera le modèle établi dans la question 2. b) de la partie B.

1. Un enfant a un périmètre crânien de 53 cm.
   Déterminer par le calcul une approximation de l'âge en mois de cet enfant.
2. Les scientifiques estiment que la structure osseuse crânienne se rigidifie dès l'âge de 15 ans, le périmètre crânien cesse alors de croître.
   Déterminer par le calcul une approximation du périmètre crânien correspondant. Arrondir au centimètre près.

Annexe à remettre avec la copie



Courbes obtenues à partir de l'étude séquentielle française de la croissance CIE-INSERM (M. Sempé)

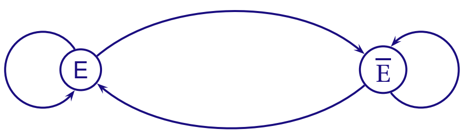
EXERCICE 4 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
Cet exercice consiste à étudier la propagation d'une information d'une personne à l'autre, thème souvent abordé en sciences sociales. Cette information se transmet avec un risque d'erreur, c'est-à-dire avec une probabilité de propagation de l'information contraire.
Dans cet exercice, on considère l'information suivante, notée E : « Paul a réussi son examen ».

PARTIE A : Propagation symétrique (de type « neutre »)

Dans cette partie, on suppose que, pour une information reçue (E ou $\overline{\text{E}}$), la probabilité de communiquer cette information à l'identique vaut 0,9 et la probabilité de relayer l'information contraire vaut 0,1.
On note p_n la probabilité de recevoir l'information E au bout de n étapes (n étant le nombre de personnes ayant transmis l'information) et on note q_n la probabilité de recevoir l'information $\overline{\text{E}}$ au bout de n étapes.
On suppose que Paul a réussi son examen, on pose $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Recopier puis compléter le graphe probabiliste relatif à la propagation de l'information suivant :



2. Préciser la matrice de transition M telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \text{M}$.
3. À l'aide de la calculatrice, trouver le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}8$.
4. Déterminer par le calcul, l'état stable.

PARTIE B : Propagation asymétrique (de type « rumeur »)

Dans cette partie, on suppose toujours que la probabilité de transmission correcte de l'information E est égale à 0,9. Toutefois, il circule la fausse rumeur $\overline{\text{E}}$. Dans ces conditions, on suppose que si l'information reçue est $\overline{\text{E}}$, la probabilité de transmettre cette information $\overline{\text{E}}$ est égale à 1.
On suppose de nouveau que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Préciser la matrice de transition N telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \mathrm{N}$.
3. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}9 p_n$. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Exprimer p_n en fonction de n.
5. Trouver par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}5$.
6. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$ puis interpréter le résultat obtenu.

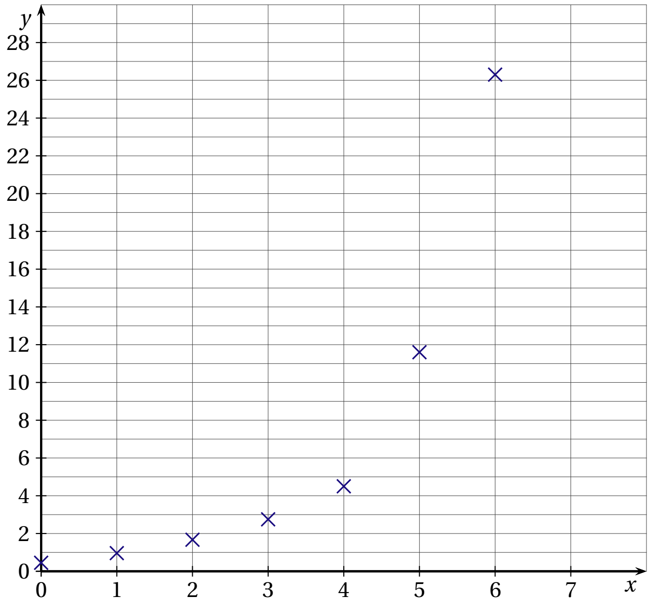
NOUVELLE CALÉDONIE 2012

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Un article paru en 2008 dans le journal *Les Échos* indiquait les coûts (en milliards d'euros) des derniers Jeux Olympiques depuis 1984. Ces données sont résumées dans le tableau suivant :

Lieu	Los Angeles	Séoul	Barcelone	Atlanta	Sydney	Athènes	Pékin
Année	1984	1988	1992	1996	2000	2004	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Coût y_i	0,45	0,96	1,67	2,75	4,5	11,6	26,3

1. On a tracé ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_1)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. Expliquer pourquoi un ajustement affine ne semble pas justifié.



2. Une première modélisation : ajustement exponentiel
   Pour $0 \leqslant i \leqslant 6$, on pose $z_i = \ln y_i$.
   a) Recopier le tableau ci-dessous et le compléter avec les valeurs z_i, arrondies au centième.

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$							

   b) À l'aide de la calculatrice, et en utilisant les données du tableau ci-dessus, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$ (les coefficients seront arrondis au millième).
   c) En déduire une approximation des coûts y, en milliards, sous la forme $y = Ae^{Bx}$ où les coefficients A et B seront arrondis au centième.
   d) On suppose que cette modélisation reste acceptable jusqu'en 2012. Quelle estimation des coûts peut-on alors faire pour les Jeux Olympiques de Londres de 2012 (le résultat sera arrondi au milliard).
3. Une deuxième modélisation :
   a) Trouver le pourcentage d'augmentation des coûts entre 1984 et 1988.
   b) Justifier qu'entre 1984 et 2008 le pourcentage moyen d'augmentation par olympiade (période de 4 ans), arrondi à l'unité, est de 97 %.

   c) Si cette évolution des coûts continue suivant la même progression, donner une estimation des coûts pour les Jeux Olympiques de Londres en 2012 (le résultat sera arrondi au milliard).

4. Un journal anglais a déclaré que les coûts des Jeux Olympiques de Londres approcheraient les 45 milliards d'euros. Laquelle des deux modélisations semble la plus cohérente avec cette affirmation ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Une enquête a été réalisée auprès de français s'étant rendus à Londres pour des raisons touristiques.
Cette enquête révèle que, pour se rendre dans la capitale anglaise, 30 % de ces touristes ont utilisé l'avion, 50 % ont utilisé le train passant par le tunnel sous la Manche et les autres touristes ont traversé la Manche par bateau.
Sur l'ensemble de tous les touristes interrogés, 40 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.
Parmi les touristes interrogés ayant utilisé l'avion, 20 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine et parmi ceux qui ont choisi le train, 60 % sont restés en Angleterre plus d'une semaine.
On interroge au hasard un touriste ayant répondu à l'enquête. On suppose que chaque touriste avait la même probabilité d'être choisi.
On note :

— A l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en avion ».
— T l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en train ».
— B l'évènement « Le touriste interrogé a voyagé en bateau ».
— S l'évènement « Le touriste interrogé est resté en Angleterre plus d'une semaine ».

1. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau pour se rendre en Angleterre.
2. a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'évènement $A \cap S$.
   b) Déterminer les probabilités $p(A \cap S)$ et $p(T \cap S)$. (On pourra utiliser un arbre pondéré).
3. Montrer que $P(B \cap S) = 0{,}04$.
4. Déterminer la probabilité que le touriste interrogé ait voyagé en bateau sachant qu'il est resté plus d'une semaine en Angleterre.
5. On interroge au hasard 3 touristes ayant répondu à l'enquête de façon indépendante. On suppose que le nombre de personnes ayant répondu à l'enquête est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard à un tirage avec remise.
   Déterminer la probabilité que parmi ces trois touristes se trouve un seul touriste étant resté en Angleterre plus d'une semaine.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Afin d'être performant lors d'une grande compétition, Christophe, champion d'athlétisme spécialiste du sprint, s'entraine chaque jour de l'année et réalise quotidiennement une course à pleine vitesse sur 100 mètres en tentant de courir en moins de 10 secondes.
On constate que :

— S'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,75.
— S'il ne réalise pas moins de 10 secondes sur 100 mètres un jour, la probabilité qu'il réalise moins de 10 secondes sur 100 mètres le lendemain est égale à 0,5.

Le premier jour de l'année, Christophe n'a pas réussi à réaliser moins de 10 secondes sur sa course à pleine vitesse.
Soit n un entier naturel non nul. On note :

— a_n, la probabilité que Christophe réalise moins de 10 secondes le n-ième jour.

— b_n, la probabilité que Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes le n-ième jour.

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

1. Écrire la matrice ligne P_1 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Christophe réalise moins de 10 secondes au 100 mètres », B représentant l'état « Christophe ne réalise pas moins de 10 secondes au 100 mètres »).
3. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
4. Déterminer la matrice ligne P_3. Comment peut-on interpréter ce résultat pour Christophe ?
5. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste stable.

   a) Justifier que a et b vérifient le système $\left\{ \begin{array}{lcl} 0{,}25a - 0{,}5b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array} \right.$.

   b) Lors d'une interview à un journaliste sportif, Christophe déclare : « Au vu de tous les entrainements effectués pour me préparer à ce grand évènement je suis confiant et je pense avoir deux chances sur trois de pouvoir réaliser moins de 10 secondes sur 100 mètres lors de la compétition ».

   Cette affirmation vous paraît-elle justifiée ?

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x + 5\ln x}$

1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 1.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout x de l'intervalle $[3;+\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{5(\ln x - 1)}{(x + 5\ln x)^2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[3;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.
4. Montrer que sur l'intervalle $[3;50]$ l'équation $f(x) = 0{,}5$ possède une unique solution α puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à l'entier supérieur par excès de α.

PARTIE B

L'organisation chargée de vendre les billets pour assister aux différentes épreuves d'un grand évènement sportif a mis en vente ces billets environ deux ans avant le début officiel des épreuves.
Une étude, portant sur la progression des ventes de ces billets, à partir du troisième jour de mise en vente, a permis de modéliser l'évolution des ventes des billets selon la fonction f étudiée dans la partie A.
La proportion des ventes effectuées par rapport à l'ensemble des billets x jours après le début de la mise en vente, est donnée par la valeur $f(x)$, arrondie au millième, pour tout x entier de l'intervalle $[3;700]$.
Ainsi la valeur approchée de $f(3)$, arrondie au millième, est 0,353 ; cela signifie que trois jours après le début de la mise en vente des billets, 35,3 % des billets étaient déjà vendus.

1. En utilisant la partie A, déterminer le nombre de jours nécessaires à la vente de 50 % de l'ensemble des billets.
2. On considère l'algorithme suivant (la fonction f est celle qui est définie dans la partie A).

Initialisation :	Affecter à X la valeur 3. Affecter à Y la valeur $f(X)$.
Saisie :	Afficher « Entrer un nombre P compris entre 0 et 1 ». Lire P.

Traitement :	Tant que $Y < P$
	    Affecter à X la valeur $X+1$.
	    Affecter à Y la valeur $f(X)$.
	Fin du Tant que

Sortie :	Afficher X.

a) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,9 comme valeur de P, la valeur de sortie de l'algorithme est 249. Que signifie ce résultat pour les organisateurs ?

b) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,5 comme valeur de P, quelle valeur de X apparaîtra à la sortie de l'algorithme ?

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x on a :

   a. $f'(x) = \mathrm{e}^x$ **b.** $f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ **c.** $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$

2. Le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = 2x$ est :

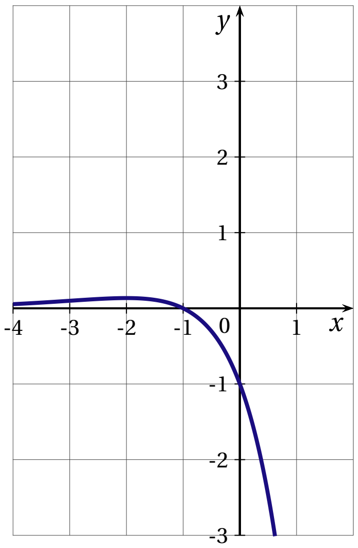
   a. 0 **b.** 1 **c.** 2

3. La valeur exacte de $f(-\ln 2)$ est :

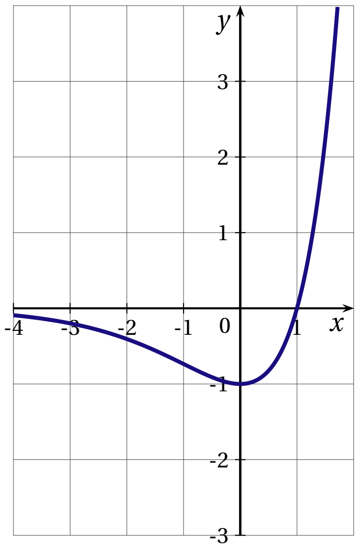
   a. $2\ln 2$ **b.** $-\dfrac{\ln 2}{2}$ **c.** $-0{,}346$

4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f. Laquelle ?

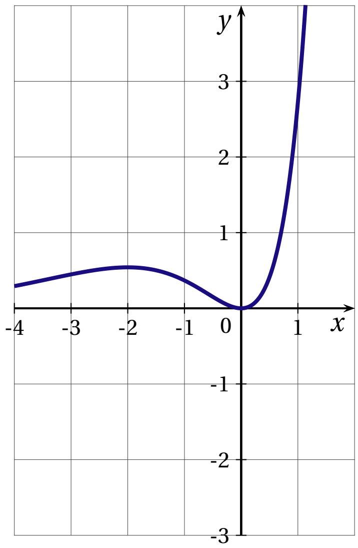
a.



b.



c.



POLYNÉSIE 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, **une seule des trois réponses proposées est exacte**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - x\ln x$.

1. $f(3\mathrm{e})$ est égal à :
   a) $6\mathrm{e} - 3\mathrm{e}\ln 3$
   b) $3\mathrm{e}(1 - \ln 3)$
   c) $3\mathrm{e}^2\ln(3\mathrm{e})$
2. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :
   a) $S = \{0;\mathrm{e}^2\}$
   b) $S = \{\mathrm{e}^2\}$
   c) $S = \{\ln 2\}$
3. La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :
   a) $+\infty$
   b) 2
   c) $-\infty$
4. Une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :
   a) $F(x) = 1 - \ln x$
   b) $F(x) = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2\ln x$
   c) $F(x) = x^2 - x^2\ln x$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

L'Etat du Wyoming, aux Etats-Unis, accueille chaque année près de 3,5 millions de touristes, notamment venus visiter les parcs nationaux de Yellowstone et de Grand Teton.
92% de ces touristes visitent le parc de Yellowstone; parmi ceux-là, 60% visitent aussi le parc du Grand Teton.
Enfin, 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu au Wyoming; on suppose que tous ces touristes ont la même probabilité d'être interrogés.
On note Y l'événement : « le touriste a visité le parc de Yellowstone »; $\overline{Y}$ désigne l'événement contraire de Y.
On note G l'événement : « le touriste a visité le parc du Grand Teton »; $\overline{G}$ désigne l'événement contraire de G.
On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A et, si B est un événement de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Que vaut $p\left(\overline{Y} \cap \overline{G}\right)$ la probabilité de l'événement "$\overline{Y}$ et $\overline{G}$" ?

2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée, en y indiquant les probabilités données par l'énoncé qui correspondent à certaines de ses branches.
3. Calculer $p_{\overline{Y}}\left(\overline{G}\right)$. Interpréter ce résultat par une phrase.
4. Montrer que $p(G) = 0{,}572$.
5. Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à 10^{-3} près).
6. Le billet d'entrée pour le parc de Yellowstone est de 10 dollars, celui pour le parc du Grand Teton est de 7 dollars.

   a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme, en dollars, dépensée pour la visite des parcs de Yellowstone et du Grand Teton par un touriste se rendant au Wyoming.

Somme en dollars	0			17
Probabilité				

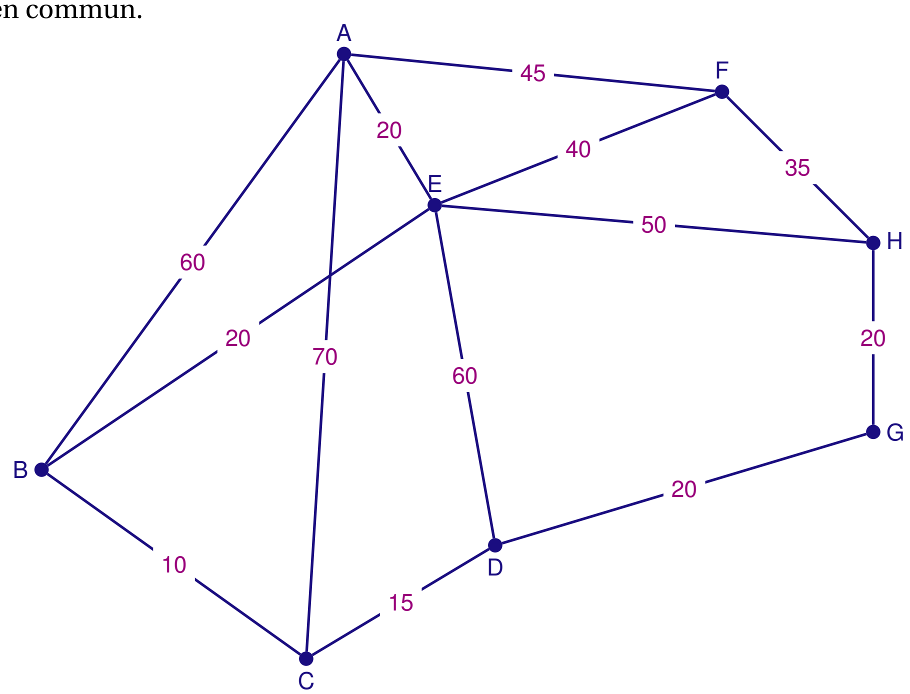
   b) Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km). Depuis le 1er janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois. Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

— S'il a terminé la course lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;

— S'il a abandonné lors de son précédent semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012. Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste du n-ième mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du n-ième mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du n-ième mois.
L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 . En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.
4. Soit P la matrice ligne $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ donnant l'état stable.
   a) Calculer les valeurs de x et de y arrondies à 10^{-3} près.
   b) Interpréter les résultats obtenus.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne les quantités de super sans plomb livrées et vendues en France de 2001 à 2009 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité (millions de tonnes) y_i	11,6	11,4	11,2	10,9	10,7	10,2	9,8	9,1	8,7

Source : INSEE

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i ; y_i\right)$, avec $1 \leqslant i \leqslant 9$, associé à cette série statistique. On prendra pour unités graphiques :
   — sur l'axe des abscisses : 1 centimètre pour une année,
   — sur l'axe des ordonnées : 2 centimètres pour un million de tonnes, en commençant la graduation à 7 millions de tonnes.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer ce point sur le graphique.
3. a) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est demandée). Les coefficients de l'équation de la droite seront arrondis à 10^{-2} près.
   b) Tracer la droite d'ajustement obtenue.
4. En supposant que cet ajustement reste valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation des quantités de Super Sans Plomb livrées et vendues pour l'année 2012.

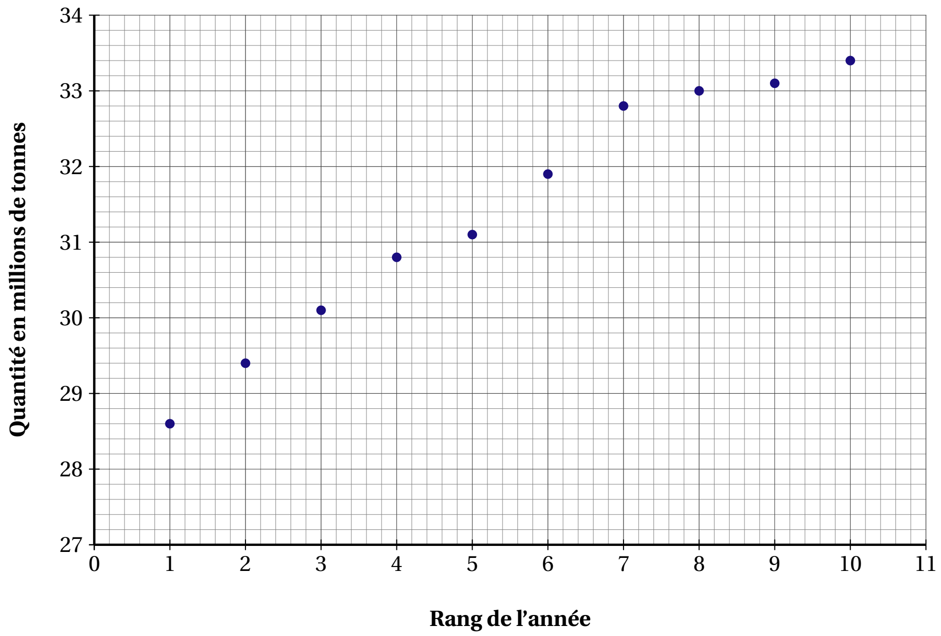
PARTIE B

Le tableau ci-dessous donne les quantités de gazole livrées et vendues en France de 2001 à 2010 (les quantités sont exprimées en millions de tonnes).

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantité (millions de tonnes) y_i	28,6	29,4	30,1	30,8	31,1	31,9	32,8	33	33,1	33,4

Source : INSEE

Le nuage de points $M_i\left(x_i; y_i\right)$ avec i variant entre 1 et 10 est représenté ci-dessous.



1. L'allure de ce nuage de points permet d'envisager un ajustement logarithmique. On pose, pour tout i compris entre 1 et 10 : $z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}}$
   Calculer les valeurs de z_3 et z_{10} (on arrondira à 10^{-2} près).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{10}}$	17,46	18,92		21,76	22,42	24,29	26,58	27,11	27,39	

2. On admet qu'une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $z = 1{,}25x + 16{,}56$.
   En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\ln(cx + d)$ où k, c, d désignent trois réels à déterminer.
3. En utilisant ce modèle, déterminer à partir de quelle année la consommation de gazole devrait dépasser 35 millions de tonnes.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

Soit d la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par : $d(x) = \dfrac{3x + 0{,}3}{\mathrm{e}^x} - 1{,}3$.

On note d' la fonction dérivée de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, $d'(x) = \dfrac{-3x + 2{,}7}{\mathrm{e}^x}$
2. Étudier, pour x variant dans l'intervalle $[0;4]$, le signe de $d'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$. (on donnera dans ce tableau des valeurs arrondies à 10^{-2} près).

3. En déduire le signe de la fonction d sur l'intervalle $[0;4]$.

PARTIE B

Soient f et g les fonctions définies sur $[0;4]$ par $f(x)=\dfrac{3x+3{,}3}{\mathrm{e}^x}$ et $g(x)=-1{,}3x+5{,}97$.
On admet que les fonctions f et g sont décroissantes sur $[0;4]$; la fonction f est représentée ci-dessous par la courbe C_f et la fonction g par le segment de droite D.

1. Soit h la fonction définie sur $[0;4]$ par : $h(x)=g(x)-f(x)$.
   a) Montrer que pour tout $x\in[0;4]$, $h'(x)=d(x)$ (d désigne la fonction étudiée dans la partie A).
   b) En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $[0;4]$.
   c) Montrer que l'équation $h(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;4]$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
2. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

PARTIE C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Les résultats de la partie B *pourront être utilisés pour répondre aux questions suivantes.*

Une entreprise prévoit de fabriquer et de commercialiser mensuellement entre 1 et 4 tonnes d'un produit cosmétique (toute la production est vendue).
Pour x tonnes de produit fabriquées mensuellement (avec $x\in[0;4]$), on admet que $f(x)$ désigne le coût de production par tonne (en centaines de milliers d'euros), et $g(x)$ le prix de vente par tonne (en centaines de milliers d'euros).

1. L'entreprise décide de produire 1 tonne par mois. Déterminer, en arrondissant à l'euro près, le coût de production de la tonne produite, son prix de vente, et le bénéfice mensuel ainsi réalisé.
2. Déterminer, en euros, le prix de vente moyen par tonne pour une production comprise entre 1 et 4 tonnes.
3. L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice par tonne d'au moins 100 000 euros. Quelles quantités doit-elle produire pour satisfaire cette contrainte ?

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Le tableau ci-dessous représente l'évolution de l'indice du PIB de la Chine de 1985 à 2005, base 100 en 1985

Année	1985	1988	1991	1994	1997	2000	2003	2005
Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	3	6	9	12	15	18	20
Indice du PIB : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	100	131,29	172,38	226,32	297,15	390,13	512,22	614,16

Source : Banque Mondiale

On veut étudier l'évolution de l'indice du PIB y en fonction du rang de l'année x.

1. a) Représenter le nuage de points $\left(x_i ; y_i\right)$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ associé à cette série dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :

   sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 1 année ;

   sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 50.

   b) Un ajustement affine semble t-il approprié ?
2. Pour $1 \leqslant i \leqslant 8$, on pose $z_i = \ln y_i$.
   Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies au centième).

Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	3	6	9	12	15	18	20
$z_i = \ln y_i$, $1 \leqslant i \leqslant 8$								

3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Aucune justification n'est demandée.
4. En déduire une estimation de l'indice du PIB de la Chine en 2012 d'après cet ajustement.
5. Dans le cas général donner un ajustement exponentiel de y en fonction de x, sous la forme $y = a\mathrm{e}^{bx}$, les coefficients a et b étant arrondis au centième.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne la récolte de bois en France en 2005 en milliers de m^3 suivant que l'on a affaire à des feuillus ou des conifères destinés au bois d'œuvre ou au bois d'industrie.

	Feuillus	Conifères	Total
Bois d'œuvre	6076	14803	20879
Bois d'industrie	5413	6805	12218
Total	11489	21608	33097

Source : Ministère de l'Agriculture et de la Pêche - SCEES 2005

Dans cette partie, les pourcentages seront arrondis à 1 %.

À l'aide du tableau ci-dessus :

1. Déterminer le pourcentage de feuillus dans la récolte totale.
2. Déterminer, parmi les conifères, le pourcentage de bois destiné à l'industrie.

PARTIE B

Chez un grossiste, les quatre catégories « feuillu - bois d'œuvre », « feuillu - bois d'industrie », « conifère - bois d'œuvre » et « conifère - bois d'industrie » sont réparties chacune dans différents lots de même volume. On sait par ailleurs que :

— 70 % des lots sont du bois de conifère ;

— Parmi les lots de feuillus, 45 % sont destinés à l'industrie ;

Le grossiste prélève au hasard un lot (on suppose que tous les lots ont la même chance d'être choisis). On considère les évènements :

F : « le lot est constitué de feuillus »,

C : « le lot est constitué de conifères »,

I : « le lot est destiné à l'industrie ».

1. Traduire toutes les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré (on ne demande aucune explication).

La probabilité qu'un lot pris au hasard soit destiné au bois d'œuvre est de 0,585.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $I \cap C$. Interpréter ce résultat.
3. Le lot pris au hasard est destiné à l'industrie. Quelle est la probabilité qu'il soit constitué de conifères ?
4. Quatre lots sont prélevés au hasard. Vue la grande quantité de lots présents chez le grossiste, on peut assimiler ce prélèvement à une succession de quatre tirages identiques et indépendants.
   Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un lot constitué de bois d'œuvre.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le centre commercial Commerce Plus est implanté dans une ville. La première semaine, 80 % des habitants de la ville viennent faire leurs achats dans ce centre commercial, puis on constate dans les semaines suivantes que :

— la probabilité qu'un habitant étant venu faire des achats dans le centre commercial y retourne la semaine suivante est égale à 0,55 ;

— la probabilité qu'un habitant n'étant pas venu faire des achats dans le centre commercial y aille la semaine suivante est égale à 0,6.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des visites des habitants dans le centre commercial sur plusieurs semaines.

1. On note A l'état : « l'habitant vient faire ses courses au centre commercial ».
   On note B l'état : « l'habitant ne vient pas faire ses courses au centre commercial ».
   a) Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.
   b) On note M la matrice de transition de ce graphe. Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
2. On appelle $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant la répartition des habitants selon leur venue au centre commercial au cours de la n-ième semaine :
   — a_n représente la proportion d'habitants qui vient faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine,
   — b_n représente la proportion d'habitants qui ne vient pas faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine.

Ainsi, on a $P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P_2 et P_3.

b) Donner une interprétation de P_3 en termes de répartition des habitants.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

a) Déterminer x et y. On donnera les valeurs exactes, puis les résultats arrondis au centième.

b) Interpréter ces résultats.

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle $[1;6]$.
Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5,6 \quad \text{pour } x \in [1;6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle $[1;6]$.
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1;6]$.
On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

a) Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.

b) On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $[1;6]$ et on appelle C'_M sa fonction dérivée.
Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 3,2 - 8\ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle $[1;6]$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;6]$ par $f(x) = x^2 - 3,2 - 8\ln x$.

a) On admet que f est dérivable sur $[1;6]$. Étudier les variations de f sur $[1;6]$.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[2;6]$; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.

c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1;6]$ (on ne demande pas de justification).

4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3. b.

a) En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1;6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).

b) Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?

5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?

EXERCICE 4 (7 points) *commun à tous les candidats*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, représentée en ANNEXE 1 dans un repère orthonormé. On appelle (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(0; -1)$.
On admet que la fonction f admet un maximum en $x = 3$.

PARTIE A

Cette partie est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte. Pour chacune des questions, indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Il n'est pas demandé de justification.
Dans cette première partie, une réponse exacte rapporte 0,5 *point; une réponse fausse enlève* 0,25 *point; l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.*

Question 1 :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Question 2 : sur l'intervalle $[-1; 7]$ $f'(x)$ vérifie :

- $f'(x) > 0$ sur $]1; 7]$
- $f'(x) < 0$ sur $[-1; 0]$
- $f'(x) < 0$ sur $]3; 7]$

Question 3 : l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est :

- $y = -1$
- $y = x + 1$
- $y = 1,5x - 1$

Question 4 :

- $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$
- $0,5 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1,5$
- $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ n'existe pas.

PARTIE B

On considère la fonction g définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, telle que

$$g(x) = (-2x - 2) \times \mathrm{e}^{-0,5x}$$

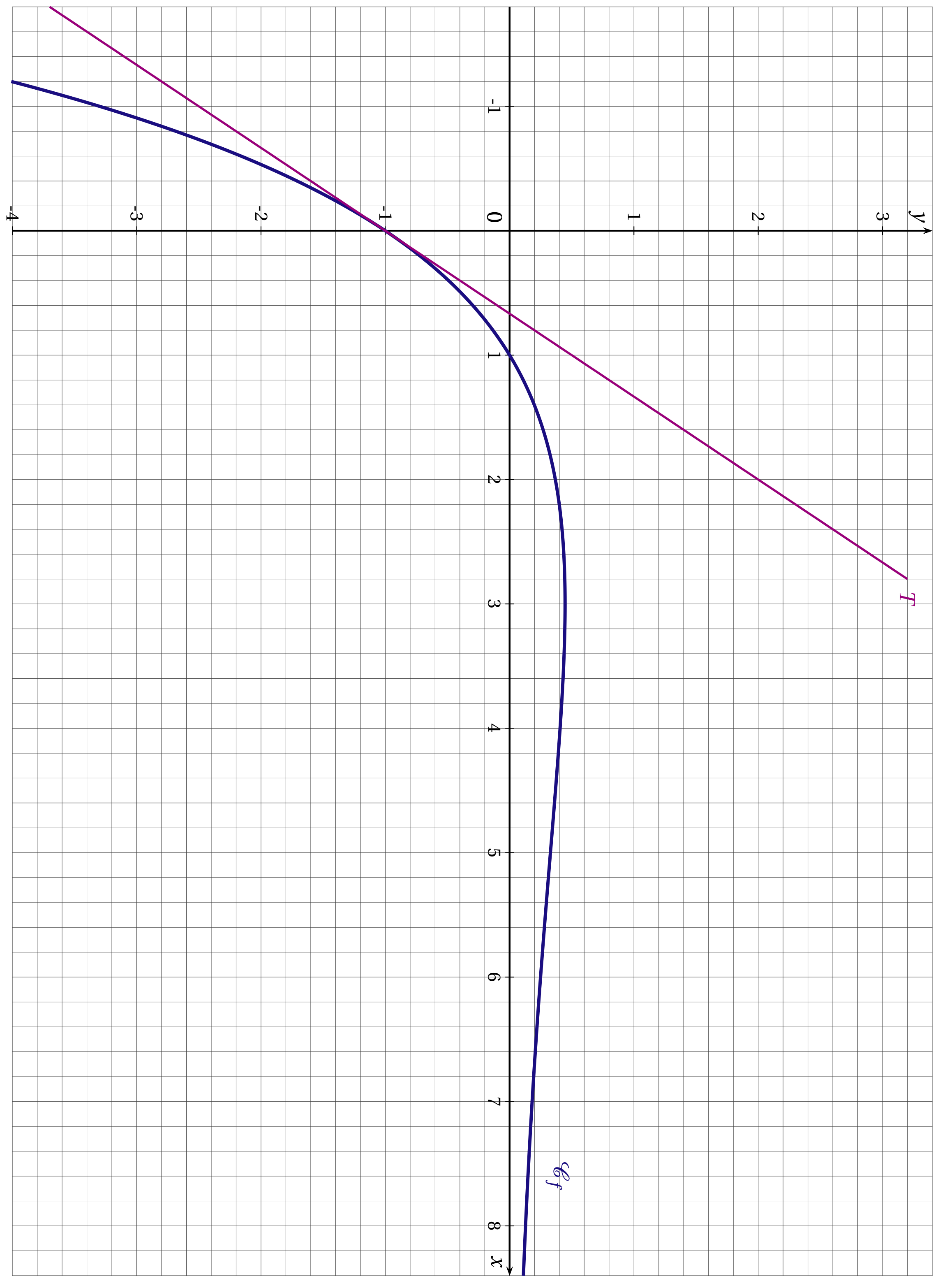
On note g' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x - 1) \times \mathrm{e}^{-0,5x}$.
2. Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. (On utilisera le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$).
4. Construire la courbe représentative de g, notée $\mathscr{C}_g$, dans le repère fourni en ANNEXE 1 (sur lequel est construite $\mathscr{C}_f$).
5. Donner graphiquement un encadrement par deux entiers consécutifs des coordonnées de I, point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
6. On admet maintenant que $g' = f$.
   Déterminer par le calcul les coordonnées exactes du point I.
7. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 1]$; on donnera d'abord sa valeur exacte puis sa valeur approchée à 10^{-2} près.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

EXERCICE 4

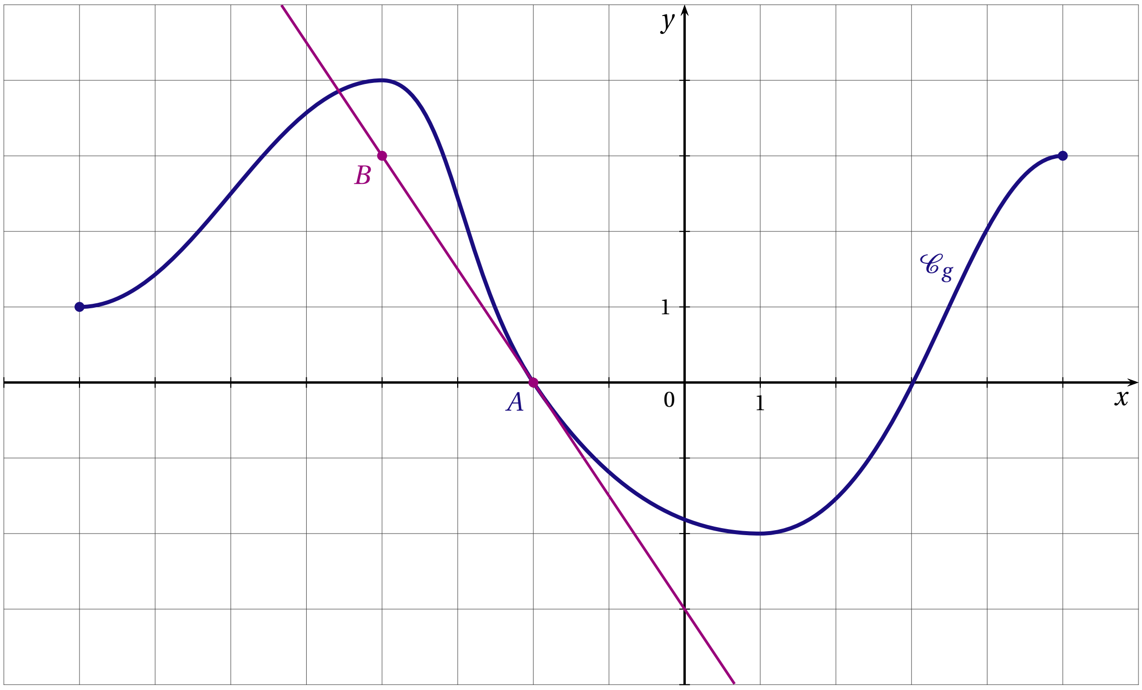


PONDICHÉRY 2012

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Il est constitué de quatre questions indépendantes.
Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. La courbe $\mathscr{C}_g$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-8;5]$. La droite (AB) tracée sur le graphique est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse -2.
   On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[-8;5]$.



   a) $g'(-2) = -1{,}5$
   b) $g'(-2) = 0$
   c) $g'(-2) = -\dfrac{2}{3}$.

2. On note G une primitive sur l'intervalle $[-8;5]$ de la fonction g introduite à la question 1;
   a) la fonction G admet un minimum en -2
   b) la fonction G est décroissante sur l'intervalle $[-4;1]$
   c) la fonction G est croissante sur l'intervalle $[-8;-2]$.

3. Soit $I = \displaystyle\int_2^7 \left(2x+1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$;
   a) $I = 50+\ln\left(\dfrac{2}{7}\right)$
   b) $I = 48{,}7$
   c) $I = 10-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{6x-5}{3x^2-5x+7}$$

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 1$.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln\left(3x^2-5x+7\right)$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln\left(3x^2-5x+7\right)+1-\ln(5)$

c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{(3x^2-5x+7)}+1$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1. a) Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.

   b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point G à l'unité près).

2. a) Pour cette question, les calculs pourront être effectués à l'aide de la calculatrice ; aucun détail n'est exigé à leur propos.

   Déterminer l'équation $y = ax+b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'entier le plus proche.

   b) Tracer la droite (D) dans le repère précédent.

   c) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.

3. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ».

   Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

   a) On donne le tableau suivant :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

   Préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

   b) On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z+184$.

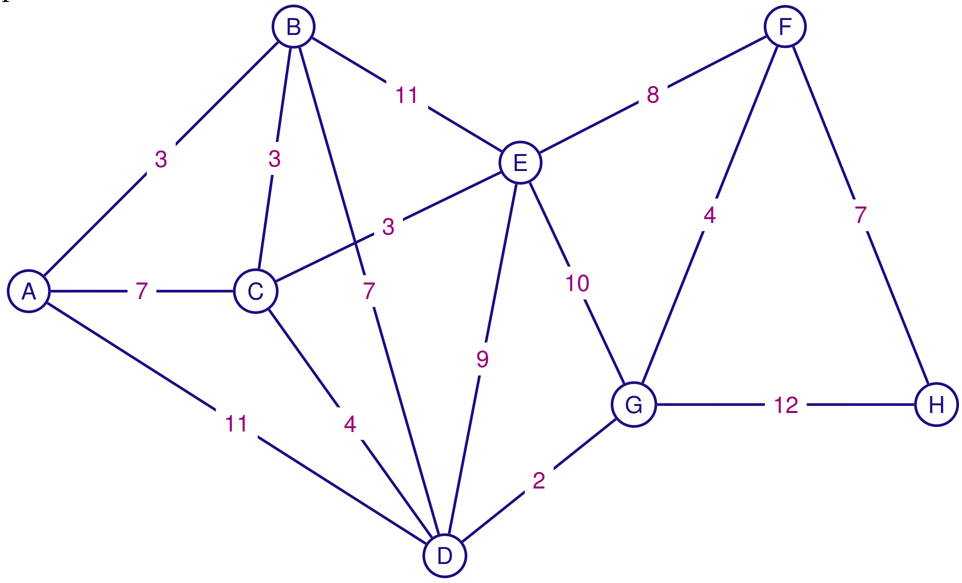
   En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).

   c) À l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier », ainsi que les temps de trajet (en minutes) entre ces différents points, sont représentés par le graphe nº 1.
Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

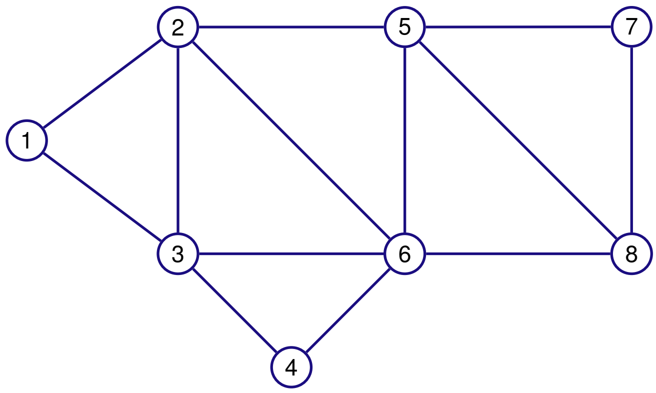
Graphe nº 1



1. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? Justifier.
2. On appelle M la matrice associée au graphe nº 1, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

   Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en quatre étapes ? Justifier la réponse.
3. Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.
4. Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe (non pondéré) ci-dessous. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.



a) Justifier que ce graphe est connexe.

b) Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 :
lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.
Parmi eux :

— 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.

— 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.

— les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

— 95 % des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.

— 50 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.

— 70 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les évènements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »

R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)

A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)

S : « le client se déclare satisfait ». $\overline{S}$ désigne l'évènement contraire de S.

1. a) Calculer les probabilités des évènements J, R et A.
   b) Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,7625.
4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?

5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(-4x^2+5\right)\mathrm{e}^{-x}+3$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   a) Démontrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$, on a :
   $$f'(x) = \left(4x^2-8x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$$
   b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2. a) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) = -\dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{5}{\mathrm{e}^x}+3$.
   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$).
   c) Interpréter graphiquement cette limite.
3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
   Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

PARTIE B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue.
Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :
pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5;8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).
Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.
Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
   b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.
   On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.
   Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

BACCALAURÉAT 2012

SÉRIE ES (OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ) : INDEX THÉMATIQUE