BAC 2013

SÉRIE ES

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2013

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2013

AMÉRIQUE DU NORD 2013

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question la réponse exacte, on ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

   a. $-e^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ **c.** $\dfrac{1}{e^{a}}$ **d.** e^{a}

2. Pour tout réel a, le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

   a. $\sqrt{e^{a}}$ **b.** $\dfrac{e^{a}}{2}$ **c.** $\dfrac{e^{a}}{e^{2}}$ **d.** $e^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel $x<0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

   a. $\ln(x)$ **b.** $-\ln(-x)$ **c.** $-\ln(x)$ **d.** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$.
   La dérivée de f est définie sur $]0;+\infty[$ par :

   a. $f'(x)=1$ **b.** $f'(x)=\ln(x)$ **c.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ **d.** $f'(x)=\ln(x)+1$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart-type 12.
   a) Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.
   b) Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.
2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
   Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.
   a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
   b) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.
   Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
   c) Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

PARTIE A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
   Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

VARIABLES
U, N
INITIALISATION
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N
TRAITEMENT
Tant que $U < 100$
U prend la valeur $U \times 0{,}95+6$
N prend la valeur $N + 1$
Fin du Tant que
SORTIE
Afficher N

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

PARTIE B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
   On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et préciser son premier terme w_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel n $w_n = -38 \times 0{,}95^n$.
   a) Déterminer la limite de (w_n).
   b) En déduire la limite de (v_n).
   c) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.
On considère que :

— Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.

— Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour. On a donc $a_n + b_n = 1$.
Le 1^er^ jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   b) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

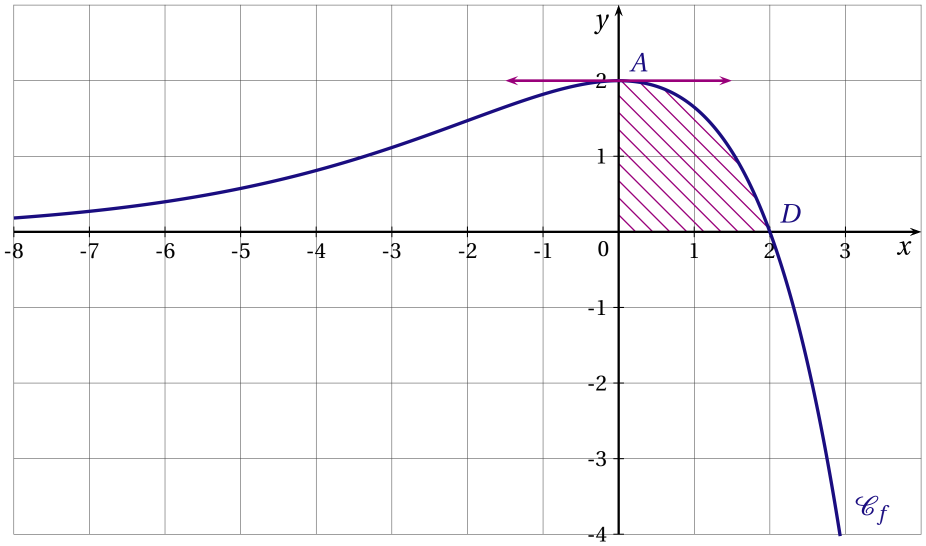


FIGURE 1

PARTIE A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes. On sait que :

— Les points $A(0;2)$ et $D(2;0)$ appartiennent à la courbe C_f.

— La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant $\left\{\begin{array}{lcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$
4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

PARTIE B

On admet que $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.
2. a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Parmi les trois courbes C_1,C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

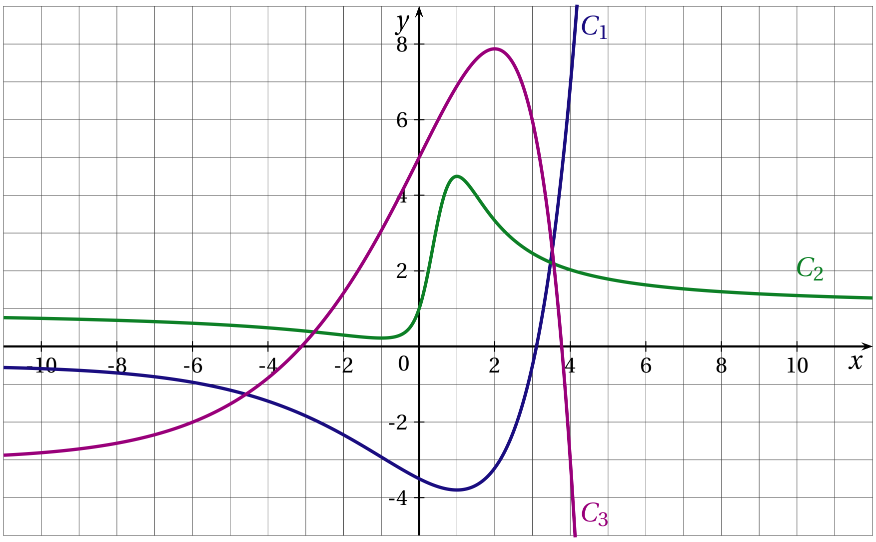


FIGURE 2

AMÉRIQUE DU SUD 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

   AFFIRMATION 1 : « Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget de 30 % sur la période de 5 ans ».

2. La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.
   Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $B(x) = -x^2 + 10x - 9$ où x représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.

   AFFIRMATION 2a : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB, le bénéfice est positif ».

   AFFIRMATION 2b : « Lorsque l'entreprise produit et vend 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

   AFFIRMATION 2c : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 et 8 000 clés USB, son bénéfice mensuel moyen est égal à 78 000 euros ».

3. Pour contrôler la qualité du stock formé des milliers de clés USB fabriquées chaque année, on sélectionne au hasard un échantillon de 4 000 clés. Parmi ces clés, 210 sont défectueuses.
   Le directeur des ventes doit stopper toute la chaîne de fabrication des clés USB si la borne supérieure de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, dépasse 7 %.

   AFFIRMATION 3 : « À l'issue du contrôle, le directeur des ventes stoppera toute la chaîne de fabrication ».

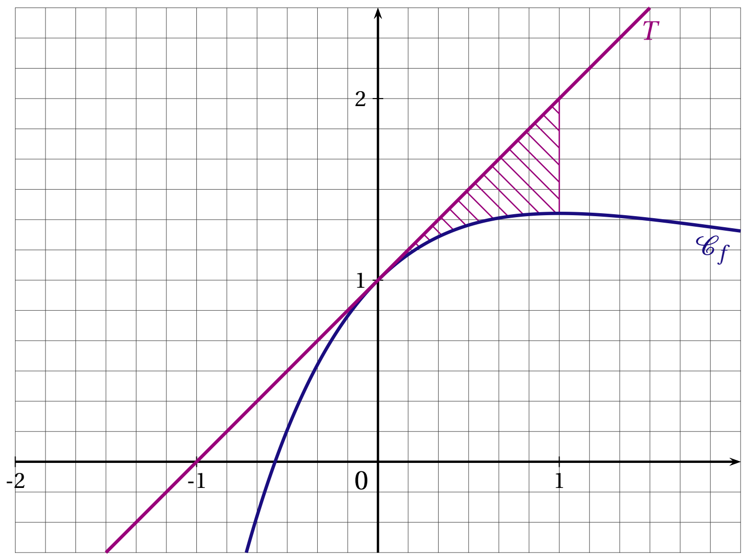
EXERCICE 2 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1;0]$.
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x+1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	Réponse
1	$f(x) = x * \exp(-x) + 1$	$xe^{-x} + 1$
2	$f''(x) =$ dérivée seconde $\left[f(x)\right]$	$e^{-x}(x-2)$
3	résoudre $[e^{-x}(x-2) \geqslant 0]$	$x \geqslant 2$

   a) Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
   c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty;2]$.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



   a) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{-x}(-1-x) + x$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

— 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus;

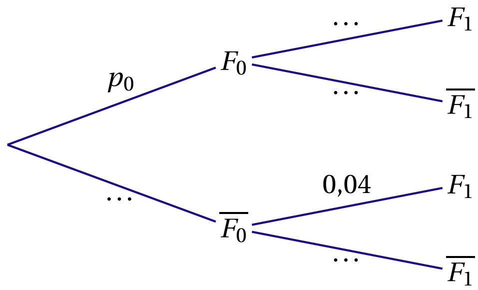
— 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

— F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire;

— F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1er mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



   b) Montrer que $p_1 = 0,9p_0 + 0,04$.

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0,55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N P prend la valeur $0,9P + 0,04$ Fin Pour
Sortie :	Afficher P

   a) Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$.

   b) Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,4$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0.

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

   c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leqslant 0,45$.

   b) Interpréter le résultat trouvé.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

— Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.

— Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

— p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;

— q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;

— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
   b) Calculer M^2.
   c) Déterminer l'état probabiliste P_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
1	J et N sont des entiers naturels
2	p est un nombre réel
Entrée :	
3	Saisir N
Initialisation :	
4	p prend la valeur 1
Traitement :	
5	Pour J allant de 1 à N
6	p prend la valeur ...
7	Fin Pour
Sortie :	
8	Afficher p

Recopier et compléter la ligne 6 de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

PARTIE B

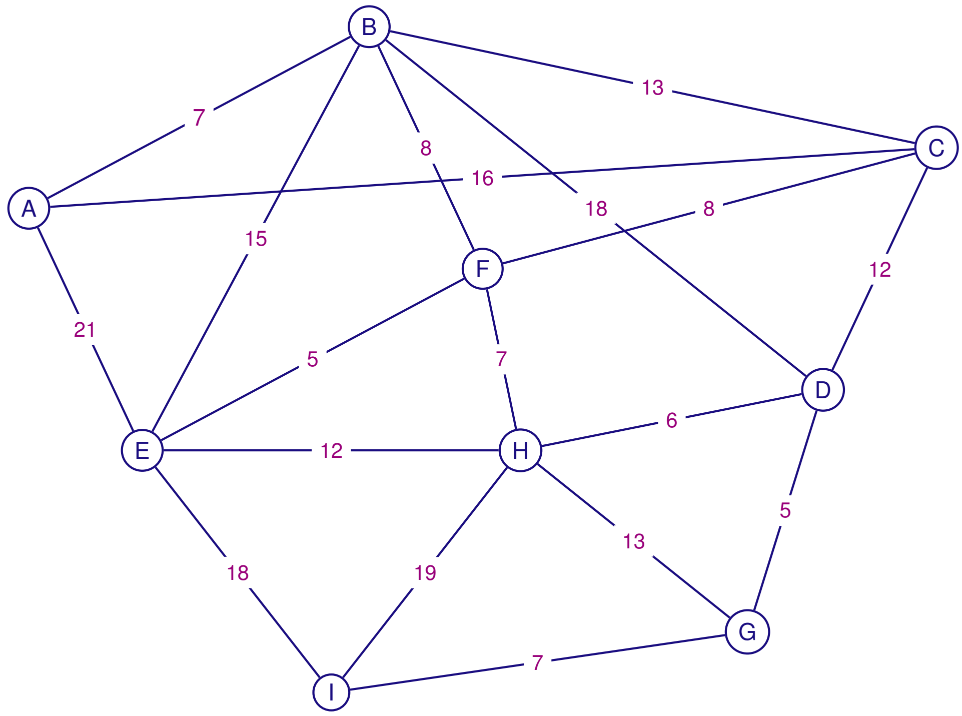
On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p\left(S_n\right)$. On a donc $p_n = p\left(S_n\right)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de u_0.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

PARTIE C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous. Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas. Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et arrondis à 10^{-3} *près.*
Les parties A et B sont indépendantes.

Dans un cabinet d'assurance, une étude est réalisée sur la fréquence des sinistres déclarés par les clients ainsi que leur coût.

PARTIE A

Une enquête affirme que 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.

1. Dans le cadre d'une étude approfondie, on choisit au hasard et de manière indépendante 15 clients.
   On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
   a) Justifier que la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,3$.
   b) Calculer $P(X \geqslant 1)$.
2. Un expert indépendant interroge un échantillon de 100 clients choisis au hasard dans l'ensemble des clients du cabinet d'assurance.
   a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année.
   b) L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année.
   Déterminer, en justifiant, si l'affirmation du cabinet d'assurance : « 30 % des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année » peut être validée par l'expert.

PARTIE B

Selon leur gravité, les sinistres sont classés en catégorie.

On s'intéresse dans cette question au coût des sinistres de faible gravité sur le deuxième semestre de l'année.
On note Y la variable aléatoire donnant le coût, en euros, de ces sinistres.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 1\,200$ et d'écart-type $\sigma = 200$.

1. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1 000 € et 1 500 €.
2. Calculer la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1 000 €.

ANTILLES, GUYANE 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

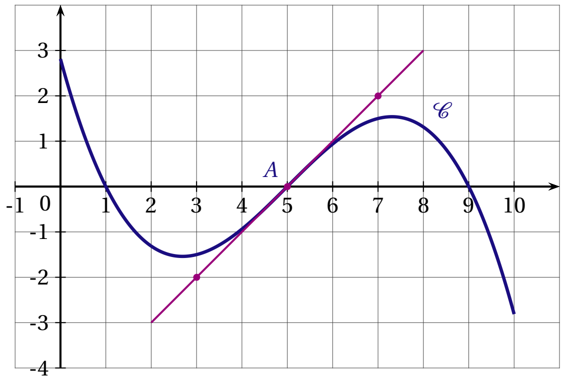
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées; une seule de ces réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

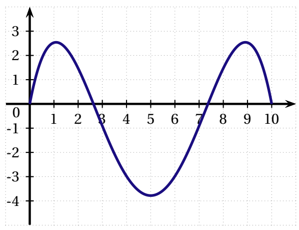
Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. Une augmentation de 20 % suivie d'une augmentation de 15 % est équivalente à une augmentation globale de :

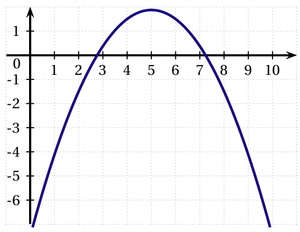
   a. 17,5 % **b.** 30 % **c.** 35 % **d.** 38 %

2. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0;10]$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 5 est tracée.
   Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f.

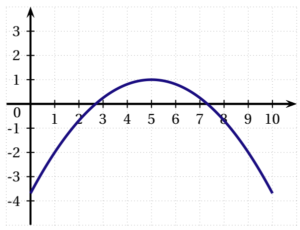




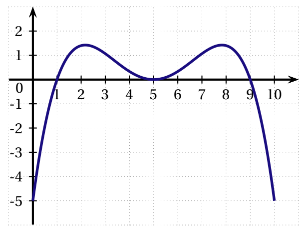
a. Courbe 1



b. Courbe 2



c. Courbe 3



d. Courbe 4

3. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et f' sa fonction dérivée. On a :

   a. $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x^2}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

4. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$.
   La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :

   a. $S = 2 \times \dfrac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}$ **b.** $S = 2 \times \dfrac{1-1{,}05^{13}}{1-1{,}05}$ **c.** $S = 1{,}05 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2}$ **d.** $S = 1{,}05 \times \dfrac{1-2}{1-2^{12}}$

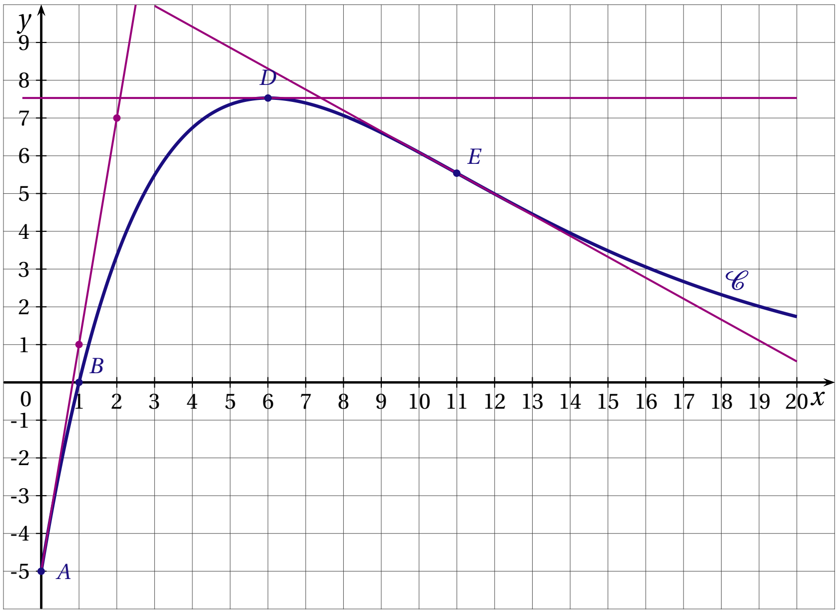
5. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 22 et d'écart-type 3.
   Une valeur approchée à 10^{-2} de la probabilité de l'évènement $\{(X \in [22;28]\}$ est :

   a. 0,2 **b.** 0,28 **c.** 0,48 **d.** 0,95

EXERCICE 2 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;20]$. On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

PARTIE B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x) = (5x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (-x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;20]$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;20]$.
   b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0;6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4. a) Montrer que la fonction F définie sur $[0;20]$ par $F(x) = (-25x-100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0;20]$.
   b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4;8]$. Donner sa valeur exacte.

PARTIE C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0;20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6;20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets. Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes, et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.
Le responsable constate que 28 % des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48 % pour un ordinateur portable.
Dans cet exercice, on suppose que chaque acheteur achète un unique produit entre tablette, ordinateur portable, ordinateur fixe, et qu'il peut souscrire ou non une extension de garantie.
Parmi les acheteurs ayant acquis une tablette, 5 % ont souscrit une extension de garantie et, parmi ceux ayant acquis un ordinateur fixe, 12,5 % ont souscrit une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs.
On note :

T l'évènement « l'acheteur a choisi une tablette » ;

M l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur portable » ;

F l'évènement « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe » ;

G l'évènement « l'acheteur a souscrit une extension de garantie ».

On note aussi $\overline{F}$, $\overline{M}$, $\overline{T}$, $\overline{G}$ les évènements contraires.

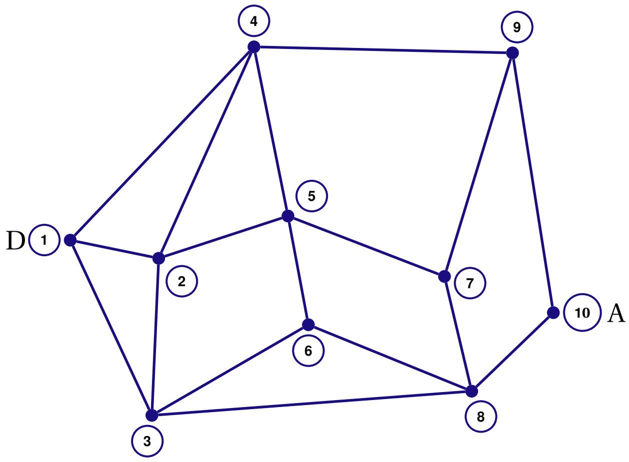
1. Construire un arbre pondéré en indiquant les données de l'énoncé.
2. Calculer $P(F)$ la probabilité de l'évènement F, puis $P(F \cap G)$.
3. On sait de plus que 12 % des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie.
   Déterminer la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.
4. Montrer que $P(G) = 0{,}164$.
5. Pour tous les appareils, l'extension de garantie est d'un montant de 50 euros. Quelle recette complémentaire peut espérer le responsable du rayon lorsque 1 000 appareils seront vendus ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

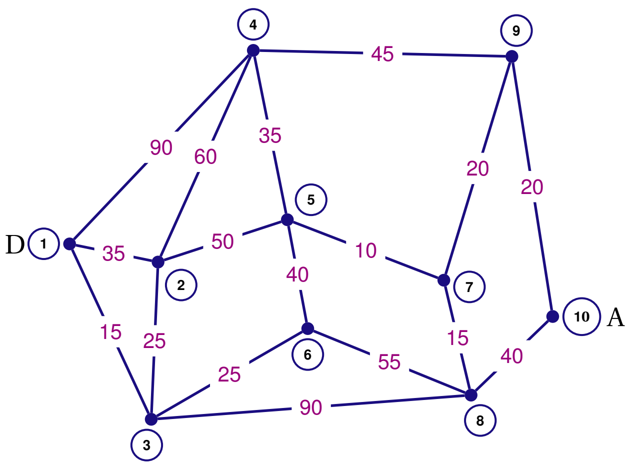
1	Départ	2	Passerelle
3	Roche percée	4	Col des 3 vents
5	Pic rouge	6	Refuge
7	Col vert	8	Pont Napoléon
9	Cascade des anglais	10	Arrivée



1. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers.
2. Existe-t-il un itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois ?
   Justifier votre réponse.
3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne ci-contre M^5.
   a) Que représente le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne ?
   b) Déterminer le nombre d'itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers. Citer un tel itinéraire passant par le pic rouge.

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.
   Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.
   On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.



EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes.
Les résultats décimaux seront arrondis au millième pour tout l'exercice.

PARTIE A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

— 80 % de CDI (contrat à durée indéterminée)

— 20 % de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Calculer le pourcentage de CDI sur chaque site de production.
2. Pour une proportion $p = 0,8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % relatifs aux échantillons de taille n, pour $n = 421$ et pour $n = 68$.
3. Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

PARTIE B

Dans cette partie, on convient que l'on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ *et* $n(1-p) \geqslant 5$, *où* p *désigne la proportion dans une population, et* n *désigne la taille d'un échantillon de cette population.*

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.
2. S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.
3. Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

ANTILLES, GUYANE SEPTEMBRE 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Deux roues sont disposées sur le stand d'un forain. Elles sont toutes deux partagées en 10 secteurs identiques.

La première comporte 5 secteurs rouges, 3 bleus et 2 verts.

La deuxième comporte 7 secteurs noirs et 3 jaunes.

Quand on fait tourner une de ces deux roues, un repère indique, lorsqu'elle s'arrête, un secteur. Pour chacune des deux roues, on admet que les 10 secteurs sont équiprobables.
Le forain propose le jeu suivant : on fait tourner **la première roue** et, lorsqu'elle s'arrête, on considère la couleur du secteur indiqué par le repère.

— Si c'est le rouge, le joueur a perdu et la partie s'arrête.

— Si c'est le bleu, la partie continue; le joueur fait tourner **la deuxième roue** : si le repère indique un secteur jaune, le joueur a gagné un lot et s'il indique un secteur noir, le joueur a perdu.

— Si c'est le vert, la partie continue; le joueur fait tourner **la deuxième roue** : si le repère indique un secteur noir, le joueur a gagné un lot et s'il indique un secteur jaune, le joueur a perdu.

PARTIE A

Le joueur fait une partie.
On note les évènements suivants :

R : « Le repère de la première roue indique la couleur rouge »;

B : « Le repère de la première roue indique la couleur bleue »;

V : « Le repère de la première roue indique la couleur verte »;

N : « Le repère de la deuxième roue indique la couleur noire »;

J : « Le repère de la deuxième roue indique la couleur jaune »;

G : « Le joueur gagne un lot ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité $P(B \cap J)$ de l'évènement $B \cap J$.
3. Démontrer que la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne un lot est égale à 0,23.

PARTIE B

Un joueur fait quatre parties successives et indépendantes. On rappelle que la probabilité de gagner un lot est égale à 0,23.
Déterminer la probabilité que ce joueur gagne un seul lot sur ces quatre parties.

PARTIE C

Durant le week-end, un grand nombre de personnes ont tenté leur chance à ce jeu.
On note X le nombre de parties gagnées durant cette période et on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Déterminer :

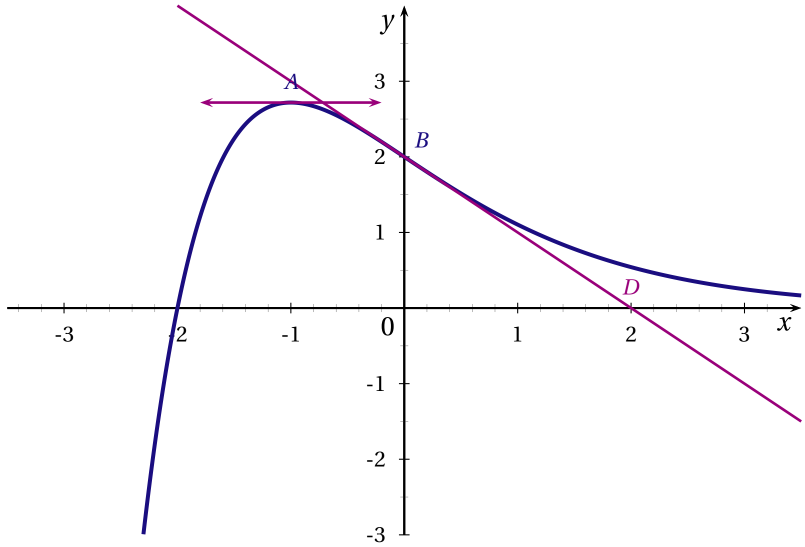
1. la probabilité : $P(40 < X < 50)$;
2. la probabilité qu'au moins 50 parties soient gagnées durant le week-end.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points $A(-1;\mathrm{e})$ et $B(0;2)$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2;0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2;3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1;3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$.
5. $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1;3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1;3]$.

PARTIE B

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.

Une bonne réponse rapporte 1 point; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0{,}2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[\mathrm{e};+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
   La fonction g est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une entreprise de produits cosmétiques fait réaliser une étude marketing sur une population donnée.

Cette étude montre que lors de la sortie d'une nouvelle crème hydratante, la probabilité qu'une cliente l'achète lors de la première vente promotionnelle est de 0,2.
De plus, lorsqu'une cliente a acheté une crème hydratante lors d'une vente promotionnelle, la probabilité qu'elle en achète à nouveau lors de la vente promotionnelle suivante est de 0,8. Lorsqu'une cliente n'a pas acheté de crème hydratante, la probabilité pour qu'elle en achète à la vente promotionnelle suivante est de 0,3.
n étant un entier naturel non nul, on note :

— a_n la probabilité qu'une cliente achète une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.

— b_n la probabilité qu'une cliente n'achète pas une crème hydratante lors de la n-ième vente promotionnelle.

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste à la n-ième vente promotionnelle.

1. a) Déterminer P_1.

   b) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets :

      V quand il y a achat ;

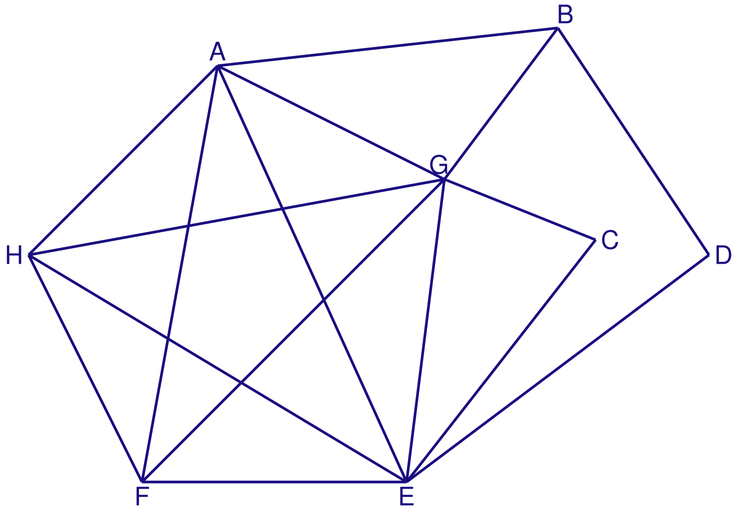
      $\overline{V}$ quand il n'y a pas achat.

2. a) Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe.

   b) Calculer P_2 et P_3. D'après ces résultats, quel est l'effet de ces trois premières ventes promotionnelles ?

3. Justifier qu'il existe un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ pour cette situation. Le déterminer.

4. L'étude marketing montre que certains produits ne sont jamais achetés simultanément. On représente les incompatibilités par le graphe suivant, où deux sommets reliés représentent deux produits qui ne sont jamais dans une même commande. Par exemple, les produits A et B, représentés par des sommets reliés, ne sont jamais dans une même commande.



   L'entreprise souhaite répartir les produits dans des lots constitués de produits ne présentant aucune incompatibilité d'achat.

   Combien de lots doit-elle prévoir au minimum ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme et proposer une répartition des produits.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

— 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club;

— 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

PARTIE A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 {Initialisation} Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0{,}9X+20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur $n=2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n=2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

PARTIE B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}9a_n+20$. Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$.
   a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique; préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer b_n en fonction de n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=200-120\times 0{,}9^n$.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n)?

PARTIE C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable?
2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0;10]$ par

$$B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5,$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.

1. a) Déterminer $B'(x)$, où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
   b) Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x = \ln(4)$.
   c) Calculer les valeurs exactes de $B(0); B(10)$ et $B(\ln(4))$.
   d) Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur $[0;10]$.
2. a) Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4);10]$.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

ASIE 2013

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. On choisit au hasard un réel de l'intervalle $[-2;5]$.
   Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[-1;1]$?

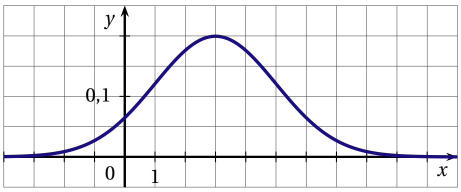
   a. $\dfrac{1}{5}$ **b.** $\dfrac{2}{7}$ **c.** $\dfrac{1}{2}$ **d.** 0,7

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart type 2.
   Quelle est la valeur arrondie au centième de la probabilité $P(X \leqslant 1)$?

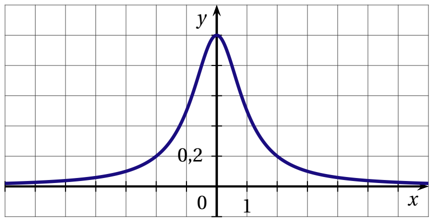
   a. 0,16 **b.** 0,68 **c.** 0,95 **d.** 0,99

3. Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$?

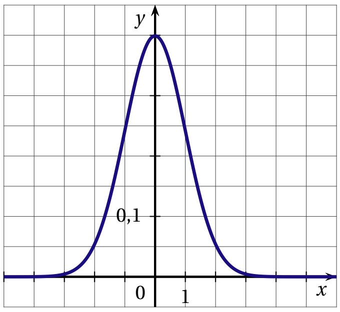
a.



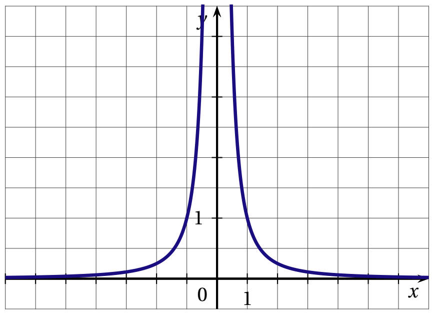
b.



c.



d.



4. Lors d'un sondage avant une élection, on interroge 800 personnes (constituant un échantillon représentatif). 424 d'entre elles déclarent qu'elles voteront pour le candidat H.
   Soit p la proportion d'électeurs de la population qui comptent voter pour H.
   Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la proportion p ?

   a. $[0,46;0,60]$ **b.** $[0,48;0,58]$ **c.** $[0,49;0,57]$ **d.** $[0,51;0,55]$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de terminale de séries générales selon la série et le sexe, à la rentrée 2010.

	Filles	Garçons
Littéraire (L)	40 872	11 080
Sciences économiques et sociales (ES)	63 472	40 506
Scientifique (S)	71 765	87 031
Total	176 109	138 617

Source : Ministère de l'Éducation nationale, DEPP

Notations :
p(A) désigne la probabilité d'un évènement A.
p_{A}(B) désigne la probabilité d'un évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.

On choisit au hasard un élève de terminale de série générale.
On note :

F : l'évènement « L'élève choisi est une fille ».

G : l'évènement « L'élève choisi est un garçon ».

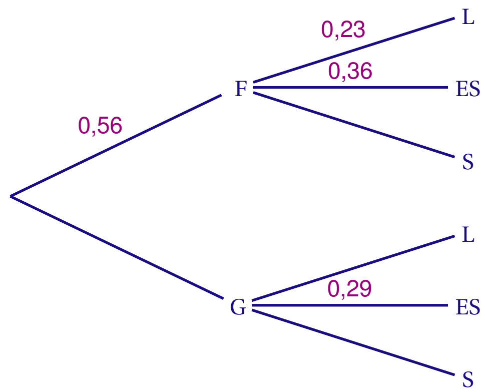
L : l'évènement « L'élève choisi est en série Littéraire ».

ES : l'évènement « L'élève choisi est en série Sciences Économiques et Sociales ».

S : l'évènement « L'élève choisi est en série Scientifique ».

Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. En utilisant les effectifs inscrits dans le tableau :
   a) Sachant qu'on interroge un garçon, calculer la probabilité qu'il soit en série Littéraire.
   b) Calculer p(S).
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



3. En utilisant l'arbre complété et les propriétés des probabilités :
   a) Montrer que la probabilité, arrondie au centième, que l'élève choisi soit un élève de la série Sciences Économiques et Sociales est égale à 0,33.
   b) Calculer p_{ES}(F).
4. On choisit successivement et au hasard 10 élèves de terminale de série générale. On admet que le nombre de lycéens est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.

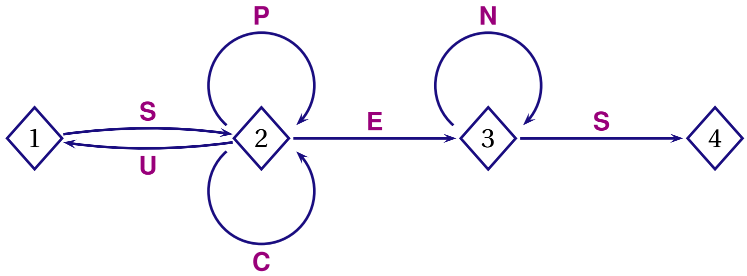
   Calculer la probabilité de choisir exactement trois élèves de la série ES.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

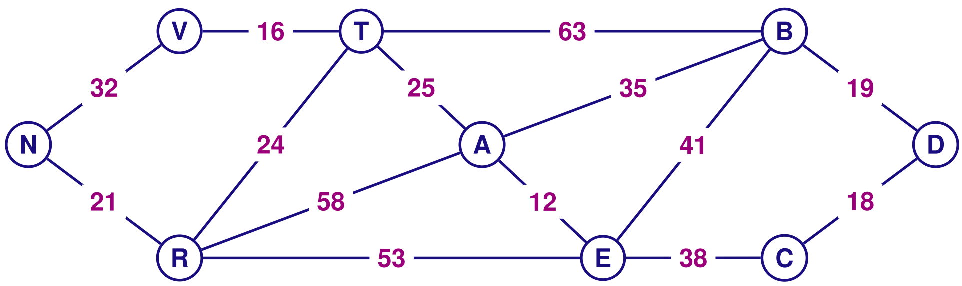
   SUCCES SCENES SUSPENS

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?

PARTIE B



Antoine décide d'aller visiter neuf châteaux de la Loire.
Il a construit le graphe ci-dessus où les sommets représentent :

A : Amboise	B : Blois	C : Cheverny	D : Chambord
E : Chenonceau	T : Tours	V : Villandry	R : Azay-le-Rideau
N : Chinon			

Sur les arêtes sont indiquées les distances en km

1. Antoine peut-il partir de Blois et y revenir, en parcourant une et une seule fois chacune des routes matérialisées par les arêtes de ce graphe ? On justifiera la réponse.
2. Déterminer le plus court chemin pour aller du château de Chambord au château de Chinon. On donnera le parcours ainsi que le nombre total de kilomètres.

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.
2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,7u_n + 210$.
   On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

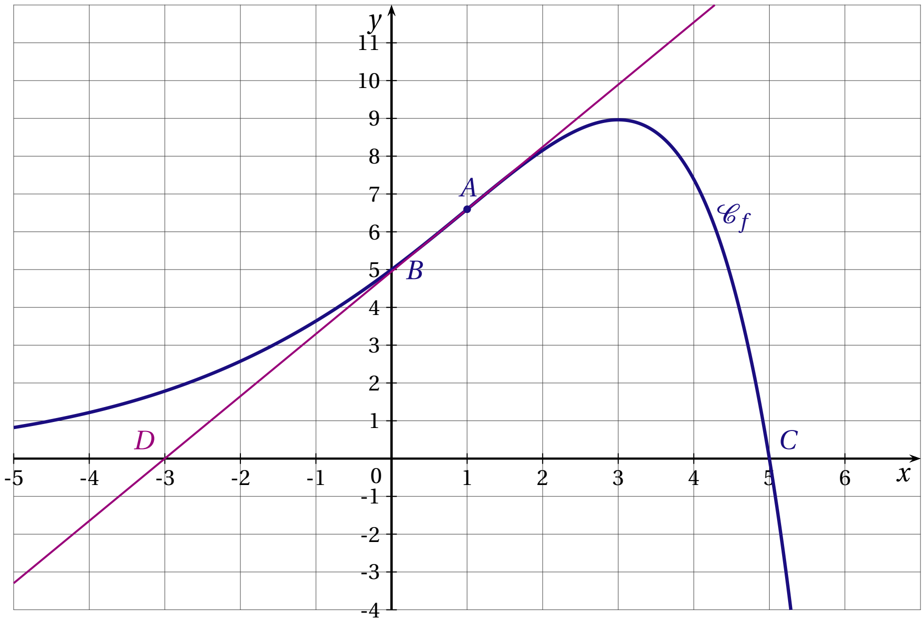
   Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
   Préciser son premier terme.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = 700 - 100 \times 0,7^n$.
4. a) Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geqslant 697$ est équivalent à $0,7^n \leqslant 0,03$.
   b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

Variables :	N est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à N la Valeur 0
	Affecter à U la valeur 1
Traitement :	Tant que $U > 0,03$
	Affecter à N la valeur $N+1$.
	Affecter à U la valeur $0,7 \times U$.
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N.

   Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).
   c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation $0,7^n \leqslant 0,03$.
   d) En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n), déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A\left(1;4\mathrm{e}^{0,5}\right)$, $B(0;5)$ et $C(5;0)$.
Le point $D(-3;0)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



PARTIE A - PAR LECTURE GRAPHIQUE

1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
3. a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aires.

   b) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :

   $0 \leqslant I \leqslant 9$ $\qquad$ $10 \leqslant I \leqslant 12$ $\qquad$ $20 \leqslant I \leqslant 24$

PARTIE B - PAR LE CALCUL

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\mathrm{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5-0,5x)\mathrm{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. a) Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = 0,25(-x+1)\mathrm{e}^{0,5x}$.

   b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.
2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)\mathrm{e}^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

CENTRES ÉTRANGERS 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012+n$.
On a donc $U_0 = 40000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1200$.
On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de U_1 est :

   a. 6 200 **b.** 35 000 **c.** 36 200 **d.** 46 200

2. La suite (V_n) est :

   a. géométrique de raison $-12,5\%$
   b. géométrique de raison 0,875
   c. géométrique de raison $-0,875$
   d. arithmétique de raison -9600

3. La suite (U_n) a pour limite :

   a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 200 **d.** 9 600

4. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :
    U, N
INITIALISATION :
    U prend la valeur 40 000
    N prend la valeur 0
TRAITEMENT :
    Tant que U > 10 000
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur 0,875 × U + 1 200
    Fin du Tant que
SORTIE :
    Afficher N
```

   Cet algorithme permet d'obtenir :

   a. la valeur de U_{40000}
   b. toutes les valeurs de U_0 à U_N
   c. le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leqslant 10000$
   d. le nombre de termes inférieurs à 1 200

5. La valeur affichée est :

   a. 33 **b.** 34 **c.** 9 600 **d.** 9970,8

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.
On sait que :

— 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.

— Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

— Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, l0% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».
L'évènement contraire de l'évènement A sera noté $\overline{\mathrm{A}}$.
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

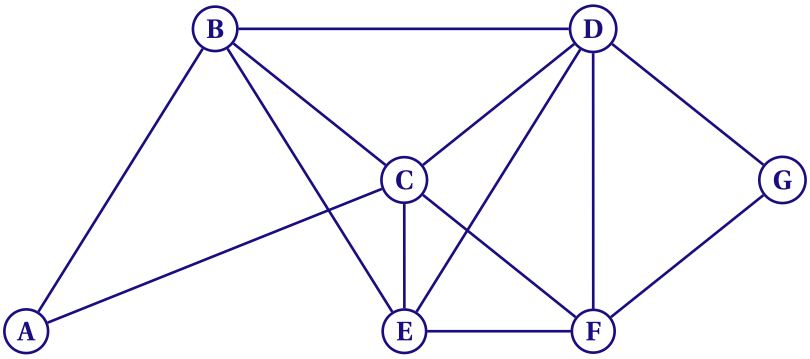
1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Définir par une phrase l'évènement $\mathrm{E} \cap \mathrm{V}$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à 0,205.
5. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété.

   Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à 0,001 près.
6. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de 45 000 sacs. Chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu 0,80 euro sur l'exploitation agricole et 3,40 euros dans des supermarchés.

   Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.

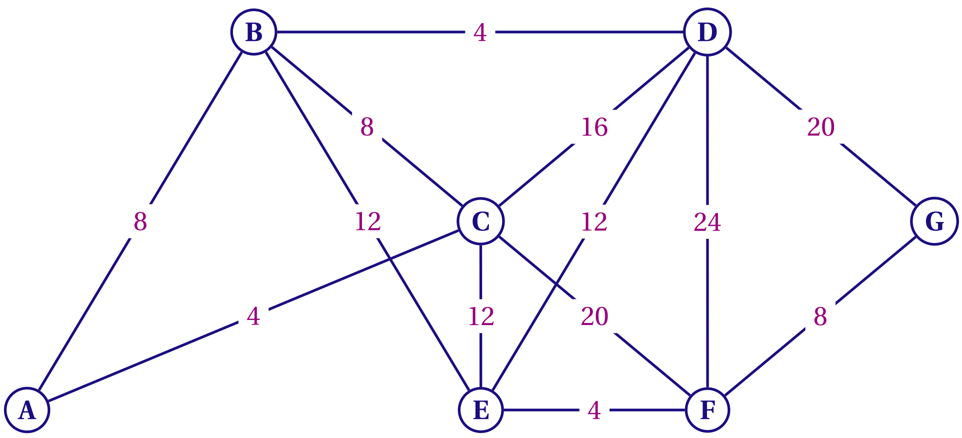


1. Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau où les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
2. a) Donner la matrice M associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

   b) On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.
3. Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie.

   Montrer qu'un tel parcours est possible.
4. Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

a) En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.

b) Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet ?

EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;8]$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2;8]$, on a :

$$f'(x)=\frac{-10x+32}{x^3}$$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;8]$.
   b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.
3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2;8]$.
   On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, on a :

$$f''(x)=\frac{20x-96}{x^4}$$

   a) Montrer que f est une fonction convexe sur $[4{,}8;8]$.
   b) Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.
4. On considère la fonction F définie sur $[2;8]$ par :

$$F(x)=-x+10\ln x+\frac{16}{x}$$

   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[2;8]$.
   b) Calculer $I=\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20; 120]$.
   a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
   b) Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.
2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,400)$.
   a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.
   b) Montrer l'équivalence :
   $$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$$
   c) On définit la variable aléatoire X par $X = \dfrac{J-120}{20}$.
   Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.
   d) Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

FRANCE MÉTROPOLITAINE (SUJET ANNULÉ) 2013

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-5		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

   a) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement positive.

   b) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est strictement négative.

   c) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$ est nulle.

   d) Le tableau de variations ne permet pas de connaître le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Dans une ville de 23 000 habitants, la municipalité souhaite connaître l'opinion de ses concitoyens sur la construction d'un nouveau complexe sportif. Afin de l'aider dans sa décision, la municipalité souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes favorables à la construction de ce complexe sportif, au niveau de confiance de 95 % avec un intervalle d'amplitude inférieure à 4 %.
   Le nombre minimum de personnes que la municipalité doit interroger est de :

   a. 625 **b.** 2 500 **c.** 920 **d.** 874

3. Soit f la fonction dérivable définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x+1} - 4$.
   Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 admet pour équation :

   a. $y = x+3$ **b.** $y = x-5$ **c.** $y = -x-3$ **d.** $y = 2x-6$

4. On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln 2 \geqslant \ln(3x-6)$.
   L'ensemble des solutions est :

   a. $]2;6]$ **b.** $[6;+\infty[$ **c.** $]0;6]$ **d.** $]0;4]$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000+n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120000$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $U_n = 120000 \times 0{,}98^n$.
2. a) Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?
   b) Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.
   c) Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.
   Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

1	**Variables :**	A est un réel
2		n est un entier naturel
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à A la valeur 120 000
5		Affecter à n la valeur 0
6		
7	**Traitement :**	Tant que $A \geqslant 90000$
8		n prend la valeur …
9		…
10		Fin Tant que
11		
12	**Sortie :**	Afficher n

3. a) Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.
   b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
   Montrer que $S_n = 6000000 \times \left(1 - 0{,}98^{n+1}\right)$.
   c) En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.

La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :

— 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.

— 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

— c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;

— t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;

— P_n la matrice $\begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.
2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.
3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \end{pmatrix}$.

   Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.
4. a) Montrer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

   b) Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?
5. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   En déduire que pour tout entier n, on a $c_{n+1} = 0{,}95 \times c_n + 0{,}02$.

   b) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel
	i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n
	Affecter à A la valeur $0{,}95 \times A + 0{,}02$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

   En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.
   Que permet de déterminer cet algorithme ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis éventuellement au millième.

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles.

PARTIE A : Étude du processus de mise en bouteille

La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans 2 machines M_1 et M_2. La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon.
Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5 % des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8 % ont un bouchon. D'autre part, 4 % des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon.
On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

— R, l'évènement : « la bouteille est correctement remplie » ;

— B, l'évènement : « la bouteille a un bouchon ».

RAPPEL DES NOTATIONS :
Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
$\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.
3. Montrer que la probabilité que la bouteille ait un bouchon est égale à 0,916.
4. Sachant que la bouteille a un bouchon, déterminer la probabilité qu'elle soit correctement remplie.

PARTIE B : Production journalière

Une étude sur les dix premières années a montré que la production journalière de bouteilles de lait dans cette entreprise peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 2 000 et d'écart type 200.

1. Calculer la probabilité que la production journalière soit comprise entre 1 800 et 2 200 bouteilles.
2. Le service maintenance doit intervenir sur les machines si la production journalière devient inférieure à 1 600 bouteilles. Déterminer la probabilité que le service maintenance intervienne sur les machines.

RAPPEL :
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ alors :

— $P\left(X \in \left[\mu-\sigma;\mu+\sigma\right]\right) \approx 0{,}683$

— $P\left(X \in \left[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma\right]\right) \approx 0{,}954$

— $P\left(X \in \left[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma\right]\right) \approx 0{,}977$

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce.
L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(t) = 25\mathrm{e}^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

1. Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.
2. a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $F(t) = -50\mathrm{e}^{-0,5t}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

   b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^4 25\mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t$.

   c) En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

PARTIE B :

Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.
L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4;10]$ par :

$$g(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t^2} + t - 4,65.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
   Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[4;10]$, $g'(t) = -4t\mathrm{e}^{-0,1t^2} + 1$.
2. On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4;10]$.
   Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4;10]$.
   Donner la valeur arrondie au dixième de α.
3. a) En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4;10]$.

   b) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4;10]$.

   c) Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2013

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.
La production journalière de l'usine A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.
On note :

— D l'évènement : « le composant présente un défaut de soudure »

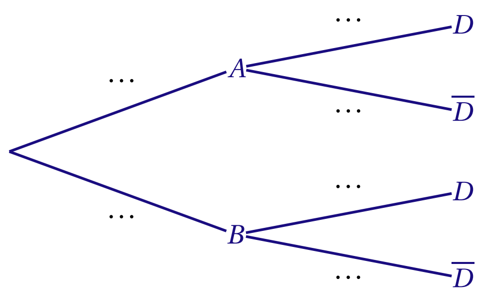
— A l'évènement : « le composant est produit par l'unité A »

— B l'évènement : « le composant est produit par l'unité B »

On note $p(D)$ la probabilité de l'évènement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé.

PARTIE A : GÉNÉRALITÉS

1. a) D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. a) Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.
   b) En déduire $p(D)$.
4. On prélève dans la-production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

PARTIE B : CONTRÔLE DE QUALITÉ

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms.
On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}5$.
On prélève un composant dans la production.
Les résultats seront arrondis à 0,0001 près; ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe 1.

1. Calculer la probabilité p_1 de l'évènement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».
2. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement :« La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».
3. On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84.
   Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

ANNEXE 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200{,}5$ et $\sigma = 3{,}5$.

t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

EXERCICE 2 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

QUESTION 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2 500 euros.
À partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2500$ sur un compte rapportant 0,2 % d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.
On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra : $c_1 = 1{,}002c_0 - 425 = 2\,080$ euros.
L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :

— $c_0 = 2500$

— Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}002 \times c_n - 425$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

QUESTION 2

Sur $I =]0;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$.

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I.

QUESTION 3

On définit sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$, $F(x) = 2x\ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver((2x) $*$ ln(x) $-$ 2x + 5) $2*\ln(\mathrm{x}) + \dfrac{2*\mathrm{x}}{\mathrm{x}} - 2$
2	simplifier$\left(2*\ln(\mathrm{x}) + \dfrac{2*\mathrm{x}}{\mathrm{x}} - 2\right)$ $\ln\left(\mathrm{x}^2\right)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2\ln x$.

QUESTION 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

PROPOSITION : $P(-0{,}6 \leqslant X \leqslant 0{,}6) \approx 0{,}68$

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0;3,6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

On a représenté, en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

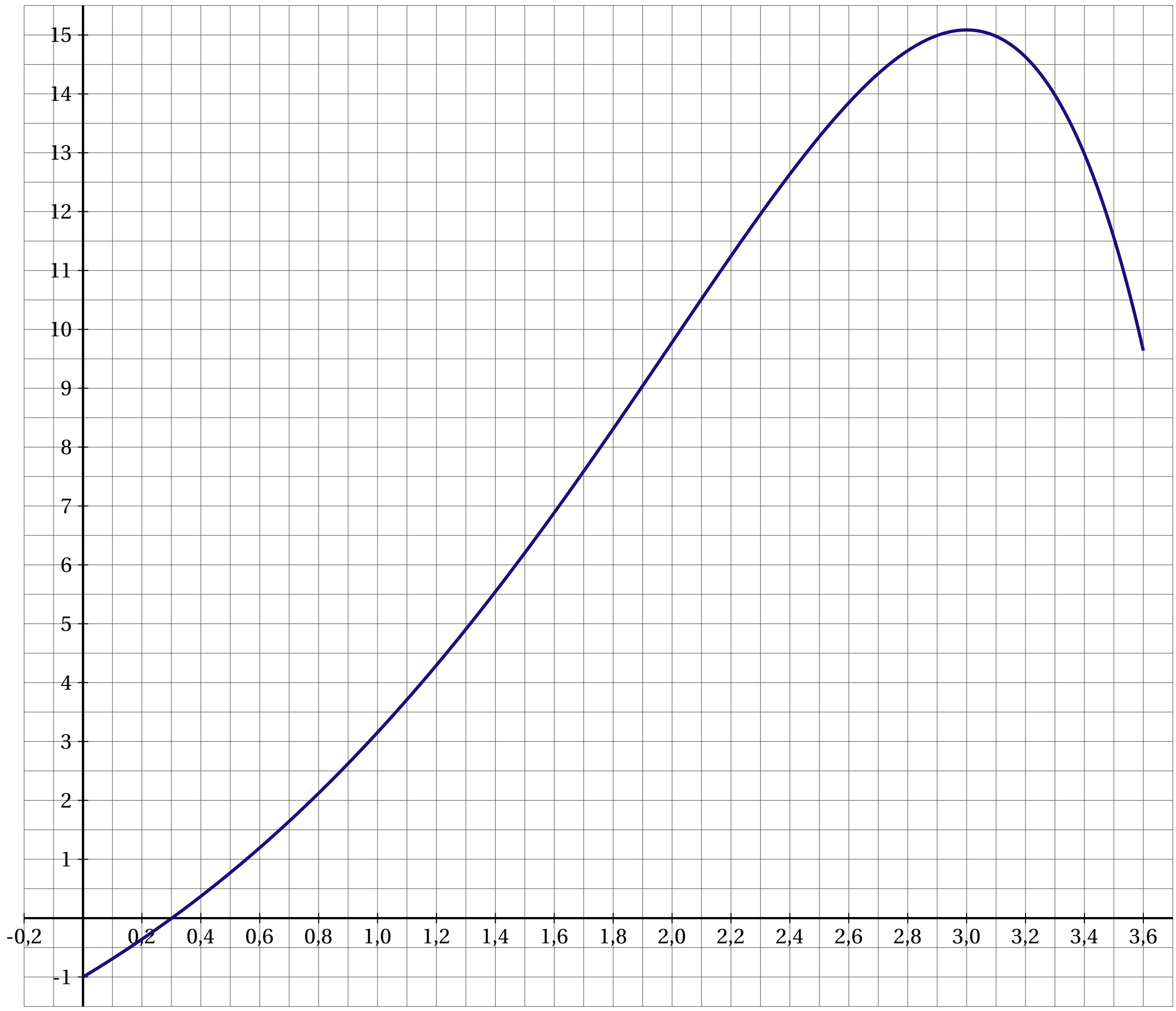
1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
   Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

PARTIE B : ÉTUDE THÉORIQUE

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4 - x)\mathrm{e}^x$.

1. a) On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0;3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x$.
   b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0;3]$ l'autre dans l'intervalle $[3;3,6]$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

ANNEXE 2


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-0,2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6

EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos, ...).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = -0{,}0032x^3 + 0{,}06x^2 + 5$.
Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.
2. Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

   (Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul : $p = \dfrac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1 % près.)
3. En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).
4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.

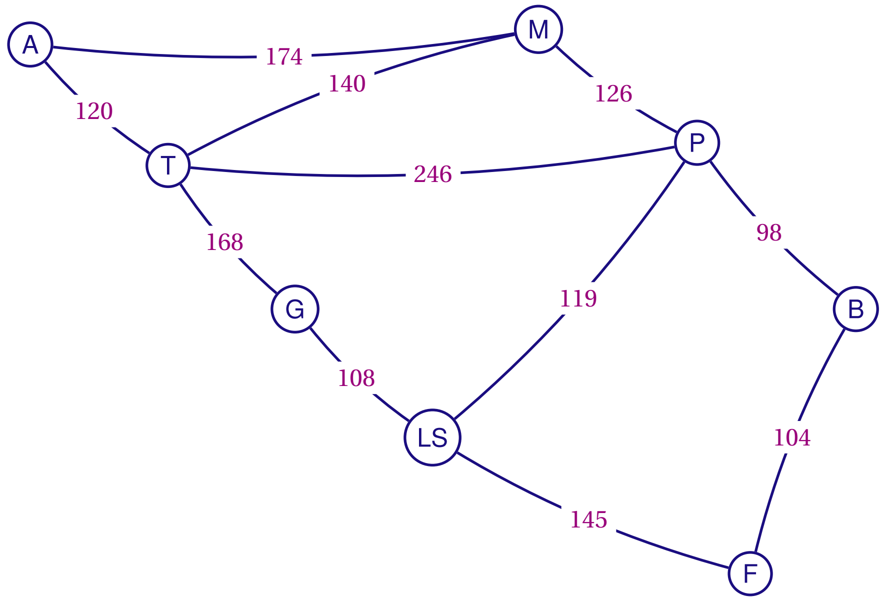
   On calcule pour cela $M = \dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.

   b) Calculer M.

EXERCICE 4 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A : ÉTUDE DU TRAJET

1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
   En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

PARTIE B : TRAVERSÉE DE PARME

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les évènements suivants :

— Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85.

— Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
2. Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
3. Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.)
   b) Conclure quant à la probabilité p de l'évènement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

FRANCE MÉTROPOLITAINE LA RÉUNION SEPTEMBRE 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

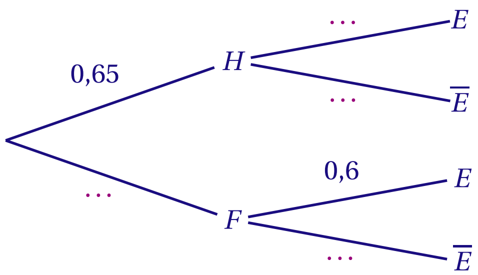
Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications.
On admet que ces proportions restent stables.

PARTIE A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note H l'évènement « la personne choisie est un homme », F l'évènement « la personne choisie est une femme », E l'évènement « la personne choisie écoute les explications du démarcheur » et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

Rappel des notations :
Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :



2. a) Traduire par une phrase l'évènement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
   b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.
   c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? (*On donnera le résultat arrondi au centième.*)

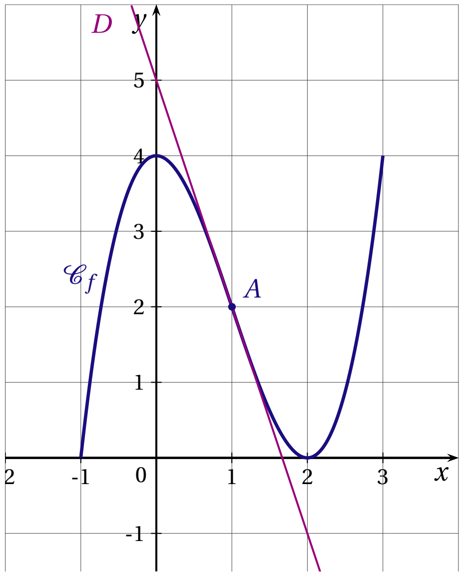
PARTIE B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).
3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. (*On donnera une valeur arrondie au dix millième*).

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1;3]$, deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.
On désigne par f' la fonction dérivée de f, par f'' la fonction dérivée seconde de f, par F une primitive de f (On admet l'existence de F).
La droite D est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1, seul point en lequel la courbe traverse la tangente.
L'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 4$.



Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la proposition choisie.
Une réponse juste apporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. a) f est convexe sur l'intervalle $[-1;0]$.
   b) f est concave sur l'intervalle $]1;2[$.
   c) f est convexe sur l'intervalle $]1;3[$.
   d) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse -1.
2. a) $f(1) = 5$
   b) $f'(1) = 2$
   c) $f''(1) = -3$
   d) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 5$.
3. a) $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]-1;2[$.
   b) f' est croissante sur l'intervalle $]1;2[$.
   c) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 2$
   d) $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $]-2;-1[$.
4. a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$
   b) $3 < \displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x < 6$
   c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
   d) La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;2]$ est égale à 1.
5. a) f' est croissante sur l'intervalle $]-1;2[$.
   b) F est croissante sur l'intervalle $]-1;2[$.
   c) f est croissante sur l'intervalle $]-1;2[$.
   d) $F(1) > F(2)$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée d'une grande ville de province organise un forum des grandes écoles de la région pour aider ses élèves dans leurs choix d'orientation post-bac.

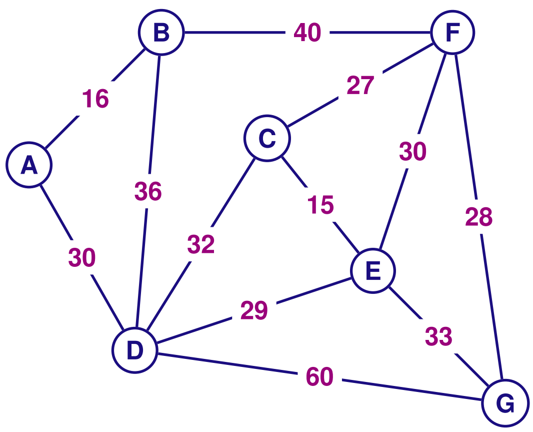
PARTIE A

Une des écoles a effectué une étude sur la mobilité des étudiants de la promotion de 2008 en ce qui concerne les choix de carrière.
Elle a relevé qu'en 2008, à la fin de leurs études, 25 % des diplômés sont partis travailler à l'étranger alors que le reste de la promotion a trouvé du travail en France.
On a observé ensuite qu'à la fin de chaque année, 20 % des personnes ayant opté pour l'étranger reviennent sur un poste en France alors que 10 % des personnes travaillant en France trouvent un poste à l'étranger.
On considère que cette situation perdure.
On note $P_n = \begin{pmatrix} e_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste en $2008+n$, avec e_n la probabilité que la personne travaille à l'étranger, l_n celle qu'elle travaille en France.
Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

1. Proposer le graphe probabiliste associé à cette situation. On désignera par E (étranger) et F (France) les deux sommets.
2. Donner la matrice de transition M associée en prenant les sommets dans l'ordre E puis F.
3. Montrer qu'en 2011, la proportion des étudiants de la promotion 2008 travaillant à l'étranger est de 30,475 %.
4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

Pour clôturer cette journée, un groupe de lycéens musiciens a décidé d'organiser un concert. Ils décident de faire le tour de tous les lycées de la ville et de distribuer des prospectus sur le trajet pour faire de la publicité pour cette soirée.
Les membres du groupe ont établi le graphe ci-contre. Les sommets représentent les différents lycées et les arêtes, les rues reliant les établissements. Les arêtes sont pondérées par les durées des trajets entre deux sommets consécutifs, exprimées en minutes.



1. Existe- t -il un trajet d'un lycée à un autre permettant de parcourir toutes les rues une fois et une seule ? Si oui, donner un tel trajet, si non expliquer pourquoi.
2. Arrivé en retard au lycée A, un membre du groupe veut trouver le chemin le plus rapide pour rejoindre ses camarades au lycée G. Quel trajet peut-il prendre ? Quelle est alors la durée du parcours ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10;30]$ par $f(x) = 5 + x\mathrm{e}^{0,2x-1}$.
On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10;30]$, $f'(x) = (0,2x+1)\mathrm{e}^{0,2x-1}$.
2. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10;30]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;20]$ et donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. Soit F la fonction définie sur $[-10;30]$ par $F(x) = 5(x-5)\mathrm{e}^{0,2x-1} + 5x$.
   On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10;30]$.
   a) Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5;10]$. (On donnera une valeur arrondie au centième.)

PARTIE B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.
Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0;20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.
2. En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.
3. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 euros.
   Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions.
D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en $(2012+n)$ avec n un entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

1. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.
3. Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.
   Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

Variables :	u est un nombre réel
	n est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à u la valeur …
	Affecter à n la valeur 2012
Traitement :	Tant que …
	Affecter à u la valeur …
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher …

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300$.
   c) Déterminer le résultat recherché par l'algorithme de la question 3 en résolvant une inéquation.
5. L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions. Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements. A-t-il raison de proposer ce nombre ? Pourquoi ?

LIBAN 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

   a. x^3-3x^2+4 **b.** $\ln(x)$ **c.** $-e^x$ **d.** x^2+x+5

2. Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ définie par $f(x)=\ln(x)$ est la fonction F définie par :

   a. $F(x)=\dfrac{1}{x}$ **b.** $F(x)=x\ln(x)-x$ **c.** $F(x)=x\ln(x)$ **d.** $F(x)=\ln(x)$

3. La valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$ est égale à :

   a. 3,19 **b.** e^2-1 **c.** $\dfrac{1}{2}e^2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

4. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1;4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2\leqslant X\leqslant 3)$ est :

   a. 0,15 **b.** 0,09 **c.** 0,34 **d.** 0,13

5. Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.

   L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

   a. $[0,35;0,75]$ **b.** $[0,40;0,70]$ **c.** $[0,45;0,65]$ **d.** $[0,50;0,60]$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

PARTIE B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

— 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;

— 1200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
    a,i,n.
INITIALISATION
    Choisir n
    a prend la valeur 10
TRAITEMENT
    Pour i allant de 1 à n,
        a prend la valeur ...
SORTIE
    Afficher a
```

3. a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$.
   b) En donner une interprétation.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5;60]$ par $C(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{0,1x}+20}{x}$.

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.

   Montrer que, pour tout $x\in[5;60]$, $C'(x)=\dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x}-\mathrm{e}^{0,1x}-20}{x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $[5;60]$ par $f(x)=0,1x\mathrm{e}^{0,1x}-\mathrm{e}^{0,1x}-20$.

   a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5;60]$.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[5;60]$.

   c) Donner un encadrement à l'unité de α.

   d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5;60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5;60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

   a) $C(x)=2$.

   b) $C(x)=5$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5;60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

EXERCICE 4 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

— lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés;

— lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

— C : « l'heure est creuse »

— T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\dfrac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

— 10 € pour une heure pleine,

— 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

— 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,

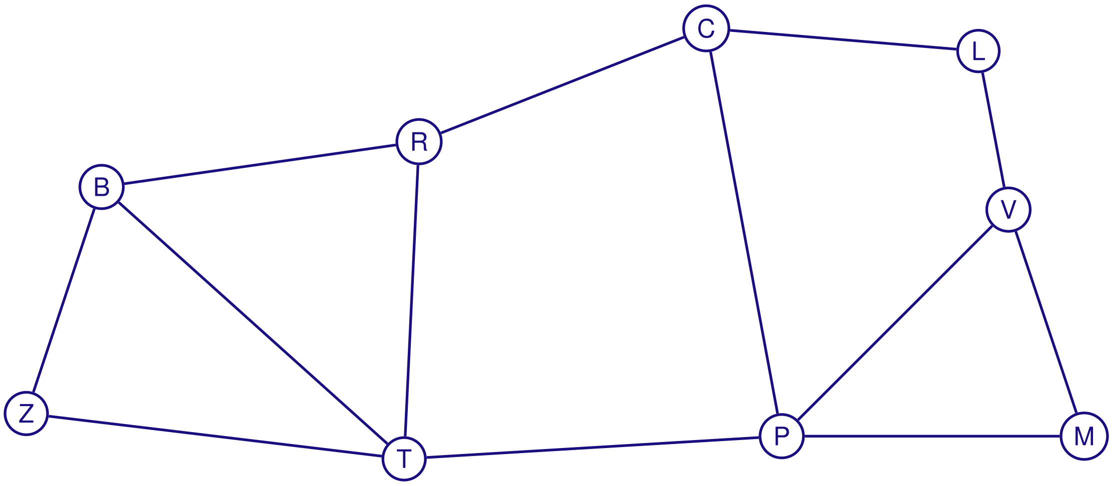
— 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,

— 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.
6. Déterminer l'espérance de X.
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

EXERCICE 4 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France :
Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

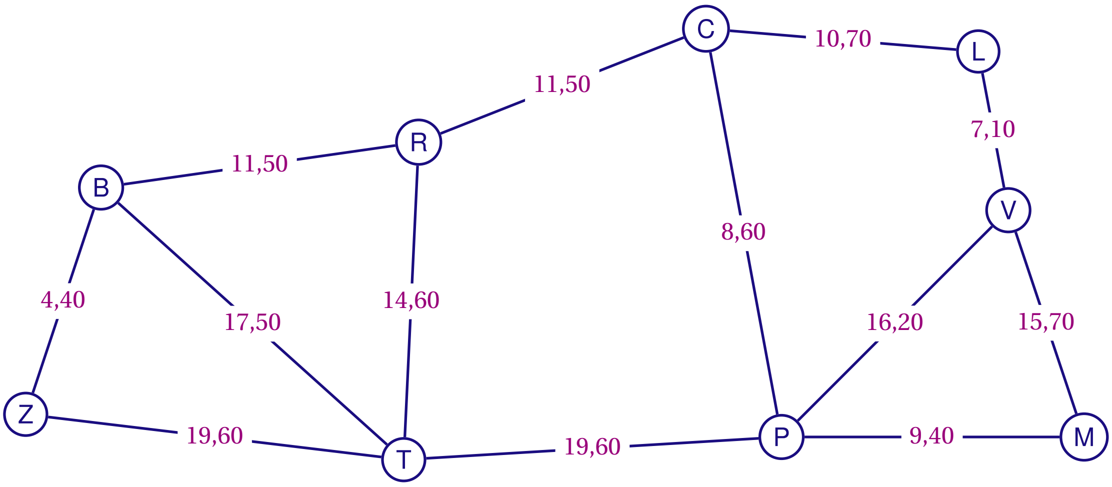


Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1. a) Déterminer l'ordre du graphe.
   b) Déterminer si le graphe est connexe.
   c) Déterminer si le graphe est complet.
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
   Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.
3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon à Biarritz.
   On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.
   Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4.
   b) En donner une interprétation.
4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.

b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

NOUVELLE CALÉDONIE 2013

EXERCICE 1 (3 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;10]$ par $f(x) = x^2 - 14x + 15 + 20\ln x$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;10]$ on a : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 14x + 20}{x}$.
2. Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;10]$.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ dans l'intervalle $[1;10]$.

EXERCICE 2 (3 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions posées une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question sur la copie et indiquer la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction f est définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{2x+\ln 2}$.
   a) La fonction f est concave.
   b) La fonction f possède une fonction dérivée seconde qui s'annule.
   c) La fonction f possède une fonction dérivée seconde strictement positive.
   d) La fonction f possède une fonction dérivée qui s'annule.
2. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   a) $F(x) = 2\mathrm{e}^{2x+\ln 2}$
   b) $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x\ln 2}$
   c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+\ln 2}$
   d) $F(x) = \mathrm{e}^{2x+\ln 2}$
3. La fonction g est la fonction constante définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 2$.
   L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de g et de f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ est :
   a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (F(x) - 2x)\,\mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (f(x) + 2)\,\mathrm{d}x$
   c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (2 - f(x))\,\mathrm{d}x$
   d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (f(x) - 2)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 euros.
Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.
On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

PREMIÈRE PARTIE

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer que Monica disposera d'un montant de 7 035 euros sur son livret le premier janvier 2015.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année $2014+n$. On a donc $M_0 = 6000$ et $M_1 = 7035$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900$.

DEUXIÈME PARTIE

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

1. PREMIÈRE MÉTHODE :
   On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40000$.
   a) Montrer que la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,022 5. On précisera le premier terme.
   b) Donner l'expression de G_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n = 46000 \times 1{,}0225^n - 40000$.
   c) Déduire de l'expression de M_n obtenue en b. l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 euros sera atteint.
2. DEUXIÈME MÉTHODE :
   L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

LIGNE		
1	Variables :	MONTANT est un réel
2		ANNÉE est un entier
3		
4	Initialisation :	Affecter à MONTANT la valeur 6 000
5		Affecter à ANNÉE la valeur 2014
6		
7	Traitement :	Tant que MONTANT < 19125
8		Affecter à MONTANT la valeur 1,022 5 × +900
9		Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE + 1
10		
11	Sortie :	Afficher « Le plafond du livret sera atteint en … »
12		Afficher ANNÉE

   a) Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.
   Indiquez sur votre copie les numéros des lignes et les modifications proposées.
   b) Proposez une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans.
En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.
On admet qu'à partir de l'année 2010 :

> 14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.
>
> 6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.
>
> Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.
On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l' état « L'électeur vote pour le parti Phenix ».

1. a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
   b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
   On a donc $E_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer E_1 et E_4. (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
   b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_n = h_n - 0,3$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

On interroge des français de plus de 15 ans sur le nombre de langues étrangères qu'ils parlent « bien », c'est-à-dire qu'ils parlent suffisamment bien pour participer à une conversation.
À l'issue du sondage, on observe que l'échantillon des personnes interrogées est partagé en trois catégories :

— 44 % des personnes interrogées ne parlent « bien » aucune langue étrangère.

— 28 % des personnes interrogées parlent « bien » une langue étrangère.

— 28 % des personnes interrogées parlent « bien » deux ou plus de deux langues étrangères.

(d'après EUROBAROMÈTRE 64.3 Commission Européenne 2005)

Ces trois catégories seront désignées dans la suite du problème respectivement par L0, L1 et L2+.

56 % des personnes de la catégorie L1 citent l'anglais comme la langue étrangère qu'elles parlent « bien ».

73 % des personnes de la catégorie L2+ citent l'anglais parmi les langues étrangères qu'elles parlent « bien ».

On choisit de manière aléatoire une personne de cet échantillon. On note :

E_0 l'évènement : « la personne ne parle bien aucune langue étrangère »,

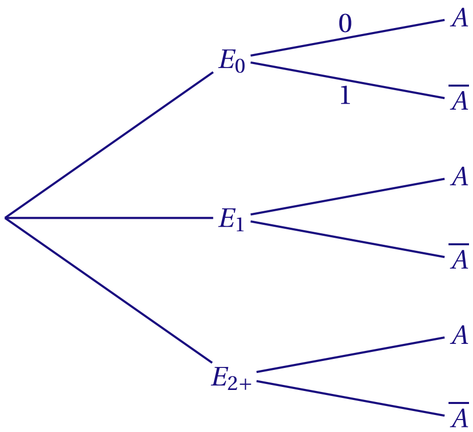
E_1 l'évènement : « la personne parle bien une langue étrangère »,

E_{2+} l'évènement : « la personne parle bien deux ou plus de deux langues étrangères »,

A l'évènement : « la personne parle bien l'anglais » et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

RAPPEL DES NOTATIONS :
Si A et B sont deux évènements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés, éventuellement arrondis, au dix millième.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie ne parle pas « bien »l'anglais.
4. Calculer la probabilité que la personne soit de la catégorie L2+ sachant qu'elle parle « bien » l'anglais.

EXERCICE 5 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au dix millième, ou sous forme de pourcentage arrondis à 0,01 %.

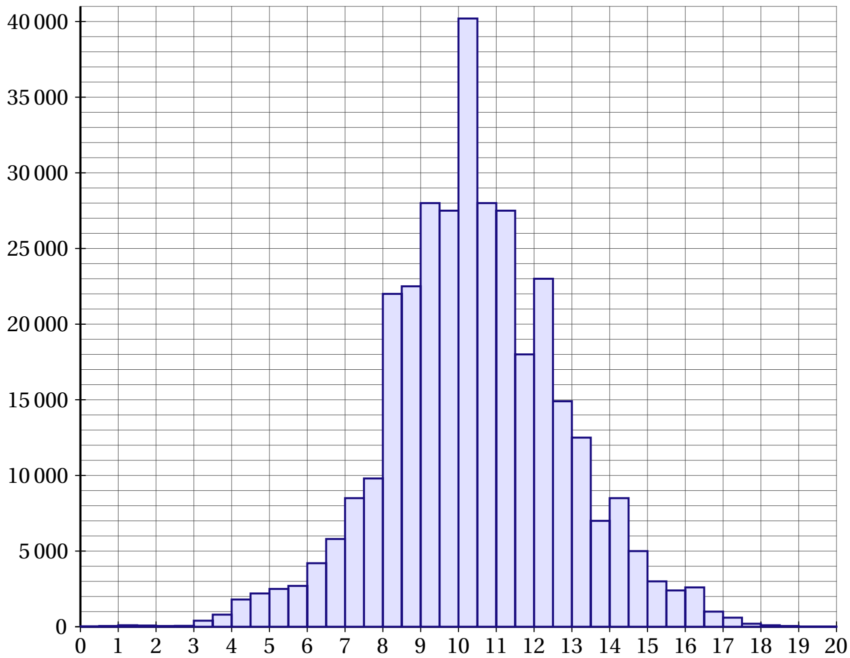
1. Le lendemain d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat, on corrige un échantillon de 160 copies choisies au hasard parmi l'ensemble des copies et on a observe que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.
   a) Déterminer la proportion des copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10.
   b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies.
   c) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'amplitude inférieure à 0,04 ?
2. À l'issue du premier groupe d'épreuves on désigne par X la variable aléatoire qui, à un candidat choisi au hasard parmi l'ensemble des candidats, associe sa moyenne générale.
   Un correcteur propose de considérer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne 10,5 et d'écart-type 2.
   a) Si ce correcteur a raison, quel intervalle centré en 10,5 devrait contenir 95 % des moyennes des candidats ?
   b) À l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe, calculer $P(X > 12)$.
   c) Lors des délibérations de jury à l'issue du premier groupe d'épreuves, les candidats ayant obtenu une moyenne supérieure ou égale à 10 sont déclarés admis.
   Il est aussi d'usage, par exemple, lorsqu'un candidat a obtenu une moyenne inférieure mais très proche de 10 et lorsque le dossier de ce candidat met en avant la qualité de son travail au cours de l'année, de le déclarer admis et de porter à 10 sa moyenne.
   Le graphique figurant en annexe 2 permet de visualiser les notes moyennes d'environ 330 000 candidats à l'issue des délibérations des jurys du premier groupe d'épreuves du baccalauréat 2001.
   Commenter la forme du graphique et ses éventuelles irrégularités.

ANNEXE 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 10{,}5$ et $\sigma = 2$

t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
10	0,401 3	11	0,598 7	12	0,773 4
10,1	0,420 7	11,1	0,617 9	12,1	0,788 1
10,2	0,440 4	11,2	0,636 8	12,2	0,802 3
10,3	0,460 2	11,3	0,655 4	12,3	0,815 9
10,4	0,480 1	11,4	0,673 6	12,4	0,828 9
10,5	0,500 0	11,5	0,691 5	12,5	0,841 3
10,6	0,519 9	11,6	0,708 8	12,6	0,853 1
10,7	0,539 8	11,7	0,725 7	12,7	0,864 3
10,8	0,559 6	11,8	0,742 2	12,8	0,874 9
10,9	0,579 3	11,9	0,758 0	12,9	0,884 9

ANNEXE 2



(Source : Direction de la Programmation et du Développement, Ministère de la Jeunesse de l'Education nationale et de la Recherche, 2002)

NOUVELLE CALÉDONIE MARS 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une classe est composée de 17 filles dont 8 étudient le russe et 9 l'allemand et de 23 garçons dont 12 étudient le russe et 11 l'allemand.
Chaque élève étudie une et une seule de ces deux langues vivantes.
On choisit un élève au hasard dans la classe et on définit les évènements :

F l'évènement : « L'élève choisi est une fille » ;

G l'évènement : « L'élève choisi est un garçon » ;

R l'évènement : « L'élève choisi étudie le russe » ;

A l'évènement : « L'élève choisi étudie l'allemand ».

Rappel des notations :

Si X et Y sont deux évènements, $P(X)$ désigne la probabilité que l'évènement X se réalise et $P_Y(X)$ désigne la probabilité que l'évènement X se réalise sachant que l'évènement Y est réalisé.
$\overline{X}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement X.

Chaque résultat sera exprimé sous forme décimale exacte ou sous la forme d'une fraction irréductible.
On pourra utiliser un tableau ou un arbre.

1. Calculer $P(G)$, $P(R \cap G)$ et $P(R)$.
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille qui étudie l'allemand ?
3. L'élève choisi étudie le russe. Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon.
4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève de la classe. Le même élève peut être choisi deux fois.

   Calculer la probabilité de l'évènement : « Les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue ».

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.
On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits. On a donc $g_0 = 0{,}2$.

1. Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?
2. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1p_n$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0{,}2g_n + 0{,}1$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = g_n - 0{,}125$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que pour tout entier n, $g_n = 0{,}125 + 0{,}075 \times 0{,}2^n$.
   Comment la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'y est pas inscrite.
La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits.
On note $E_n = \begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année n. On a donc $E_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. On nomme A la matrice de transition associée à cette situation, c'est-à-dire la matrice vérifiant : pour tout entier naturel n $E_{n+1} = E_n \times A$.
   Donner la matrice A.
3. Déterminer E_1 et E_2. Interpréter les résultats.
4. Déterminer l'état probabiliste stable (on donnera les coefficients de la matrice ligne sous la forme de fractions irréductibles).
   Comment peut-on interpréter ce résultat ?

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier la réponse**.

1. La fonction G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x + 10$ est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln x$.
2. On a l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.
   On a alors : $E(X) = 1$.
4. Dans une population, la proportion de garçons à la naissance est $p = 0{,}51$.
   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de garçons dans un échantillon de taille 100 est (en arrondissant les bornes à 0,001 près) : $[0{,}412;0{,}608]$.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2;5]$ par $f(x) = (3-x)\mathrm{e}^x + 1$, soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2;5]$, $f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2;5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;5]$.
   Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   Montrer que T a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.

   b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

   c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2;5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.

   d) En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

   On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} < 3{,}05$.
5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

   a) Faire fonctionner l'algorithme précédant avec $r = 0{,}01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

   b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

POLYNÉSIE 2013

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte 1 point; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

   a. $\ln 2$ **b.** $-2\ln 2$ **c.** $2\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

   a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ **c.** $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

   a. $y = 2x$ **b.** $y = x-1$ **c.** $y = x$ **d.** $y = 2x-1$

4. La fonction f est :

   a. concave sur $[0;1]$ **b.** concave sur $[0;+\infty[$ **c.** convexe sur $[0;+\infty[$ **d.** convexe sur $[0;1]$

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   a. $\mathrm{e}-5$ **b.** 5 **c.** $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ **d.** 1

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une agence de voyage propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris. Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

— 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;

— parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées » ;

— 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. a) Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?
   b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.
   c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.
   b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.
3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

   Formule « avion + hôtel » : 390 €
   Formule « train + hôtel » : 510 €
   Option « visites guidées » : 100 €

   Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.
Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90% du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.
Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.
On observe à partir de 2010 que chaque année, 15% des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10% des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010+n$, et b_n, la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010+n$ soit l'entreprise B.
On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010+n$ et on a ainsi $a_0 = 0{,}9$ et $b_0 = 0{,}1$.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. a) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $\begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \end{pmatrix}$.
   c) Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.
À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.
On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.
Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française)

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est $-8{,}06\%$ arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8% par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre positif P

Traitement :	Affecter la valeur 0 à la variable N {initialisation}
	Affecter la valeur 63 182 à U {initialisation}
	Tant que U > P
	    Affecter la valeur N + 1 à N
	    Affecter la valeur 0,92 × U à U
	Fin de Tant que
	Affecter la valeur N + 2011 à N

Sortie	Afficher N

Si on saisit P = 50 000 en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

3. Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n). On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en $2011+n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63\,182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8%.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c) Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016? On arrondira le résultat au millier d'euros.

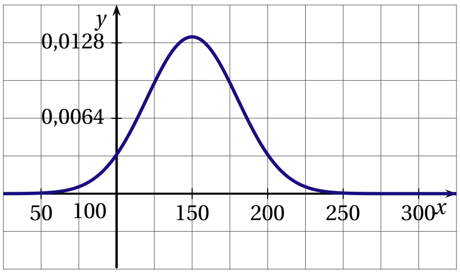
4. Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A . Étude de la zone 1

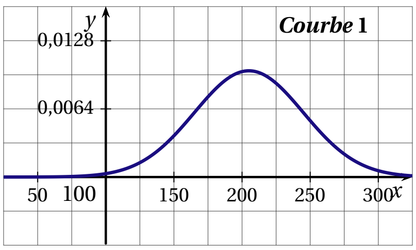
On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$.
La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.

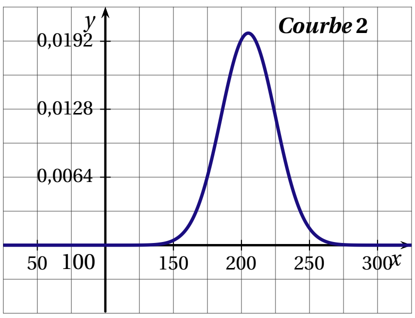


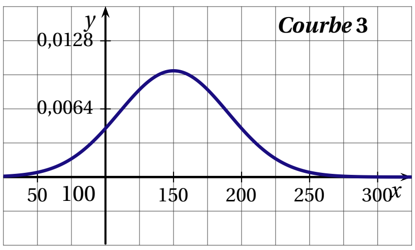
1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

B . Étude de la zone 2

1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.
   a) Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.
   b) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.
2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
   En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.







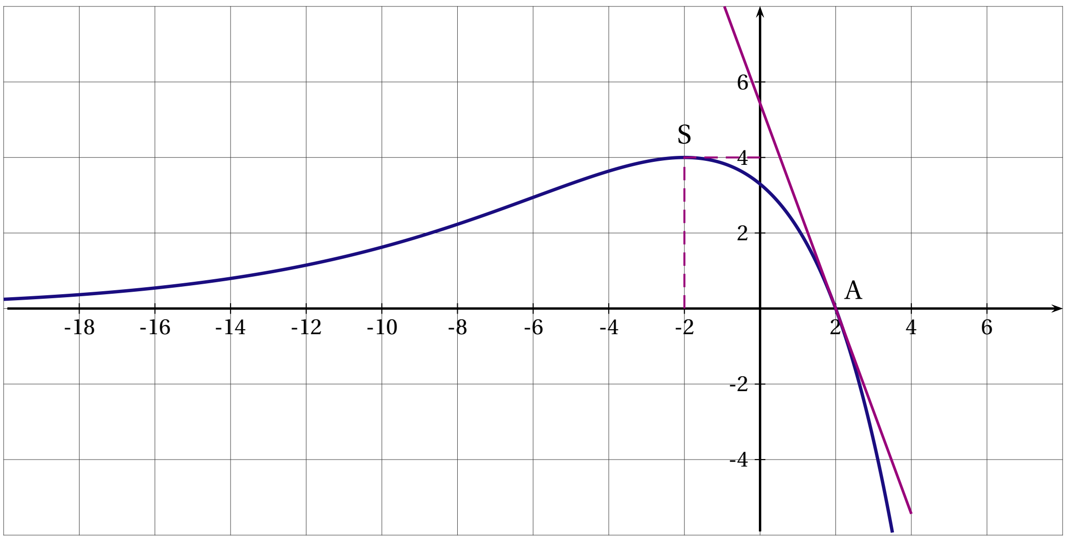
POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2013

EXERCICE 1 (4 points)

commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A?

   a) $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ **b)** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c)** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d)** $y = -5x + 4\mathrm{e}$

2. La fonction f est :

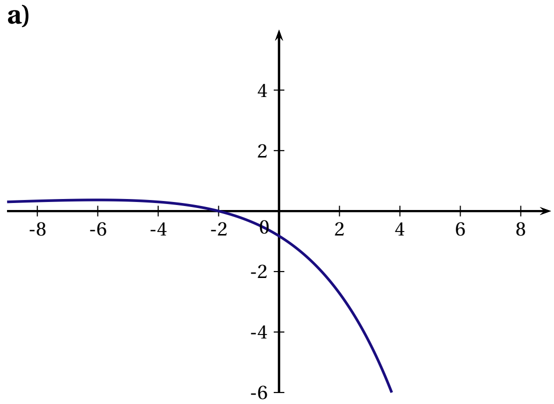
   a) concave sur $]-\infty; 0]$ **b)** convexe sur $]-\infty; 0]$ **c)** concave sur $[0; 2]$ **d)** convexe sur $[0; 2]$

3. La valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

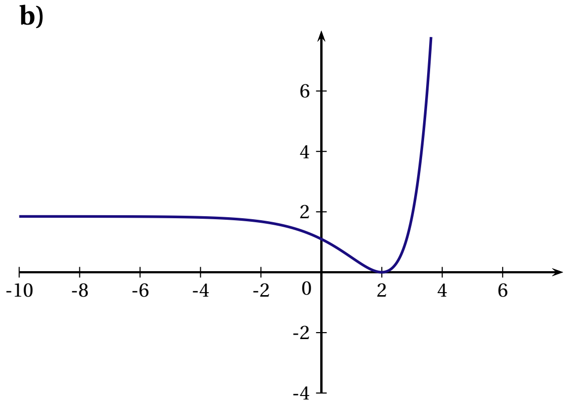
   a) $50\mathrm{e}$ **b)** $16\mathrm{e} - 24\sqrt{\mathrm{e}}$ **c)** $0,1\mathrm{e}$ **d)** $-5\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$

4. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?

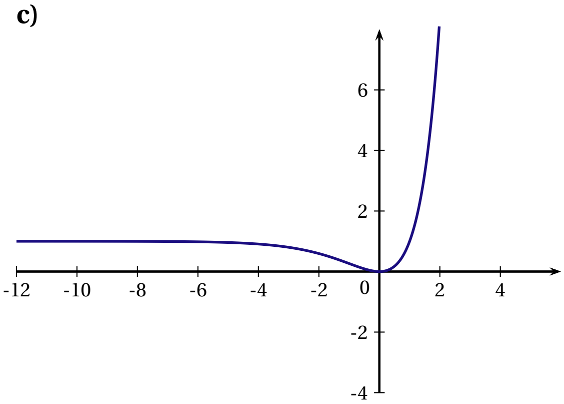
a)


-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8
4 2 -2 -4 -6

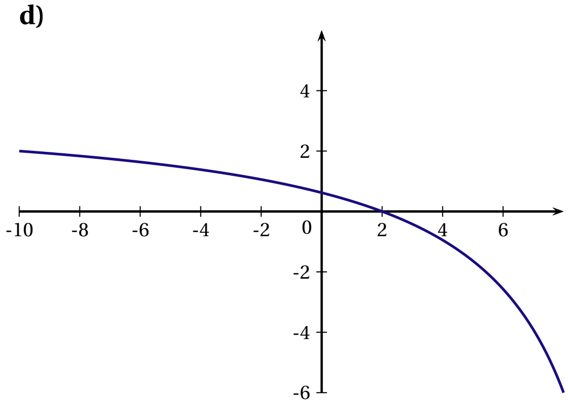
b)


-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 -2 -4

c)


-12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4
6 4 2 -2 -4

d)

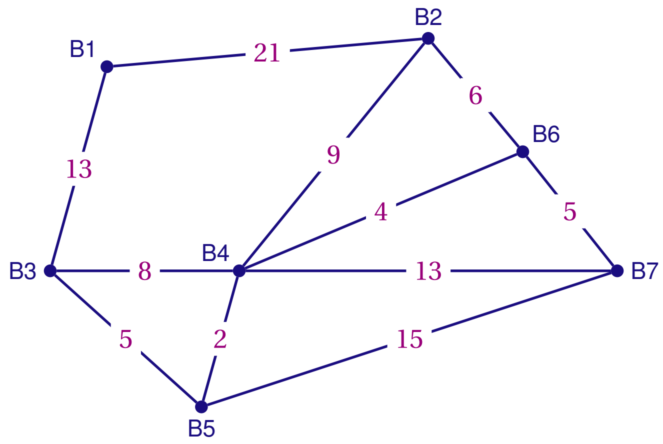

-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6
4 2 -2 -4 -6

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus.
Les sept balises notées B1 ; B2 ; ... ; B7 sont représentées sur le graphe ci-contre. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1. a) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.
   b) Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.
   c) Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?
2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.
   Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

PARTIE B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80 % des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70 % des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60 % de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.
En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme.
On note :

A « le licencié est assuré »

B « le licencié n'est pas assuré »

Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année $2011+n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \end{pmatrix}$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année $2011+n$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, déterminer P_1. Interpréter ce résultat.
4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55 %. L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1. a) Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme a% où a est un nombre entier.

   b) Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation : $x^{12} = 9{,}79$. Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme b% où b est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle $[2;20]$ par :

$$f(x) = 27\,131 \ln x + 0{,}626x^3$$

   où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.

   a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2;20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur $[2;20]$.

   b) À l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020 ? Justifier.

3. Une commande de bobines de papier de 2,20 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs.

   Soit X la variable aléatoire qui à toute bobine choisie au hasard dans cette commande associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$.

   a) Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.

   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

   b) L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.

   Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.
De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à −0,22 %.
On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.
Les résultats seront arrondis à l'unité

PARTIE A

On propose l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul S

Traitement :	Affecter à U la valeur 81 751 602 {initialisation}
	Affecter à N la valeur 0 {initialisation}
	Tant que U > S
	    Affecter à U la valeur 0,9978 × U
	    Affecter à N la valeur N + 1
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher N

On saisit en entrée le nombre S = 81 200 000. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie?

U	81 751 602	81 571 748	...	
N	0		...	
Test U > S	Vrai		...	

PARTIE B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + n.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1^er^ terme 81 751 602 et de raison 0,997 8.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
3. Si cette évolution de −0,22 % se confirme :
   a) Quel serait l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035?
   b) En quelle année la population passera-telle au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants?

PARTIE C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes.
On admet de plus que le taux d'évolution de −0,22 % ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.
2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne?

(*Données recueillies par l'Institut national d'études démographiques*)

PONDICHÉRY 2013

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f définie par :

   A : $f(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2}$ B : $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$
   C : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ D : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x-23)\mathrm{e}^{x}$. L'équation $h(x) = 0$

   A : a pour solution 2,718 B : a une solution sur $[0;+\infty[$
   C : a deux solutions sur $\mathbb{R}$ D : a une solution sur $]-\infty;0]$

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

   A : $I = \mathrm{e}^3 - 1$ B : $I = 3\mathrm{e}^3 - 3$
   C : $I = 19,1$ D : $I = 1 - \mathrm{e}^3$.

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

   A : $]-\infty;+\infty[$ B : $[0;+\infty[$
   C : $]-\infty;0]$ D : $[-3;3]$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

— L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi;

— C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.
4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

   a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

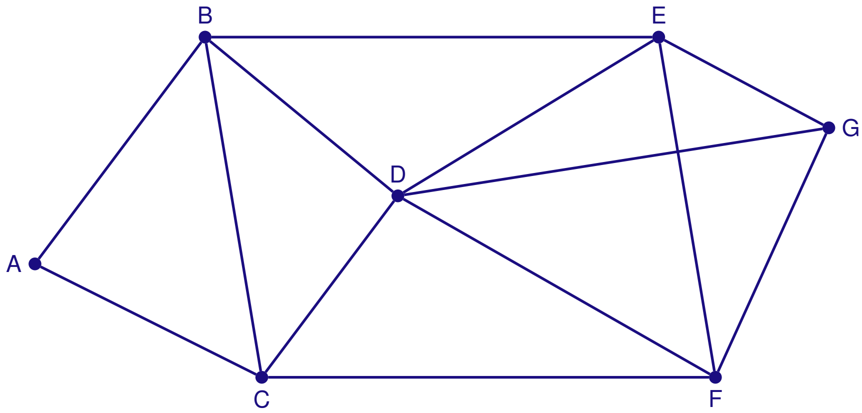
   b) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

   c) Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

On considère le graphe Γ ci-dessous :

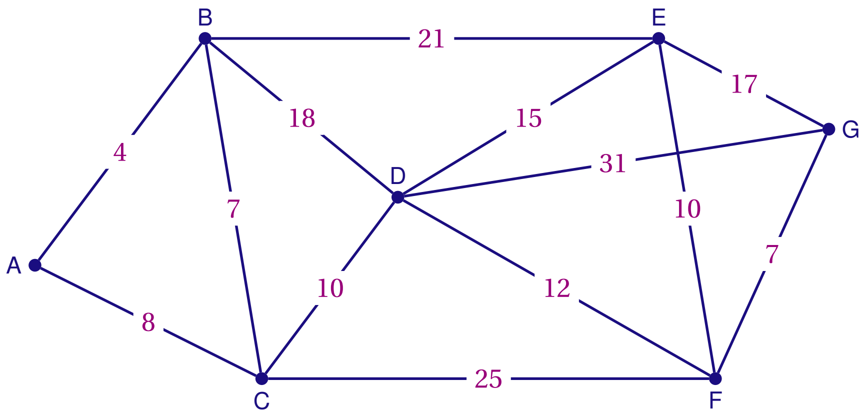


PARTIE A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ. Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

PARTIE B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G. Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On note C_n le capital du client au 1er janvier de l'année $2000+n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation :

$$C_n = 3000 \times 1{,}025^n.$$

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3000	
Traitement	Affecter à n la valeur 0.	*Initialisation*
	Affecter à U la valeur 3000	*Initialisation*
	Tant que $U \leqslant S$	
	n prend la valeur $n+1$	
	U prend la valeur $U \times 1{,}025$	
	Fin tant que	
Sortie	Afficher le nombre $2000+n$	

a) Pour la valeur $S = 3300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3000		....	
Condition $U \leqslant S$	vrai		....	

b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3300.

c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3000.

4. Au 1er janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.
5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1er janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(x) = 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;6]$.
   Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.
3. On admet que la fonction F définie sur $[0;6]$ par $F(x) = x+(x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0;6]$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.
Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.
x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.
$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

PARTIE C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.
Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

BACCALAURÉAT 2013

SÉRIE ES (OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ) : INDEX THÉMATIQUE