BAC 2014

SÉRIE ES-L

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2014

ES OBLIGATOIRE ET L SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

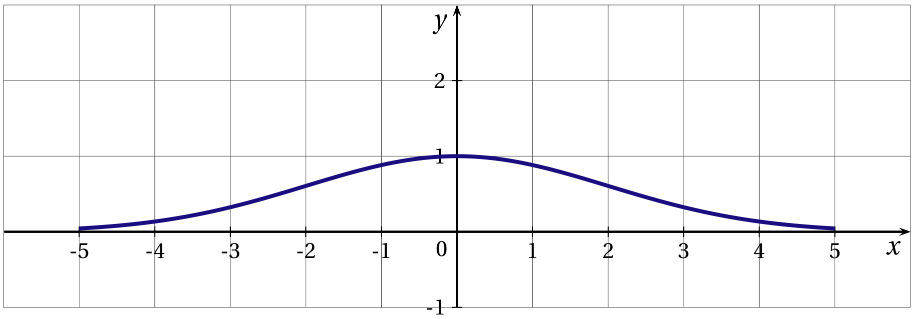
SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2014

AMÉRIQUE DU NORD 2014

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.



1. Sur l'intervalle $[-5;5]$:
   a) f est une fonction de densité de probabilité
   b) f est positive
   c) f n'est pas continue
   d) l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions

2. Sur l'intervalle $[-5;5]$:
   a) $f'(1)=0$
   b) $f'(0)=1$
   c) $f'(0)=0$
   d) $f'(1)=1$

3. On admet qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est $y=-\dfrac{x}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$.
   Le nombre dérivé de f en 4 est :
   a) $f'(4)=\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$
   b) $f'(4)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$
   c) $f'(4)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$
   d) $f'(4)=\mathrm{e}^{-2}$

4. On pose $A=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de A est :
   a) $0<A<1$
   b) $1<A<2$
   c) $3<A<4$
   d) $4<A<5$

EXERCICE 2 (6 points)

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif est de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.
Les trois parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4}.

PARTIE A

On considère deux types d'appartement :

— Les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2;

— Les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :

— 35% des appartements loués sont de type T1 ou T2;

— 45% des appartements loués de type T1 ou T2 sont rentables;

— 30% des appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :

— T : « l'appartement est de type T1 ou T2 »;

— R : « l'appartement loué est rentable »;

— $\overline{T}$ est l'évènement contraire de T et $\overline{R}$ est l'évènement contraire de R.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,3525.
3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

PARTIE B

On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100 appartements loués. On admet que toutes les conditions sont réunies pour assimiler X à une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart type $\sigma = 5$.
À l'aide de la calculatrice :

1. Calculer $P(25 \leqslant X \leqslant 35)$.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.

PARTIE C

L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60% des appartements sont rentables.
Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués. Parmi ceux-ci, 120 sont rentables.

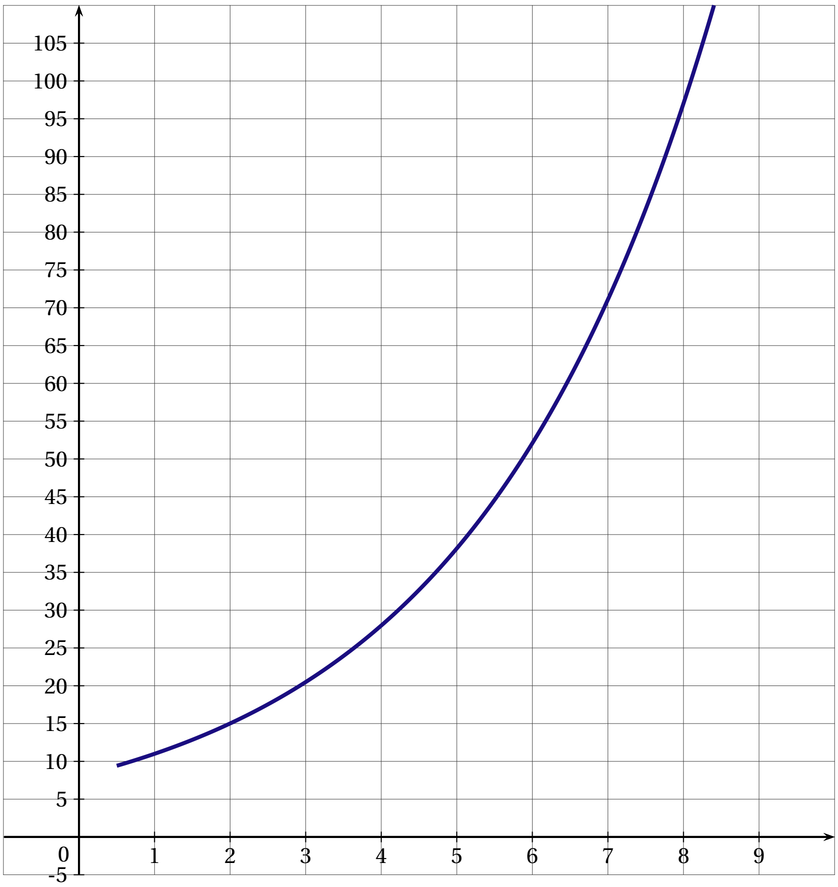
1. Déterminer la fréquence observée sur l'échantillon prélevé.
2. Peut-on valider l'affirmation du responsable de cette agence? Justifier cette réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

EXERCICE 3 (5 points)

Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.
On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément.
Deux fonctions sont proposées pour modéliser cette situation.

PARTIE A : Modèle exponentiel

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f qui modélise la situation précédente.
On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément et $f(x)$ la durée de chargement exprimée en seconde.



1. Par lecture graphique, estimer la durée de chargement, en seconde, pour 8 000 personnes connectées.
2. a) Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par f.
   b) Donner une interprétation de ce résultat.

PARTIE B : Modèle logarithmique

On considère une autre fonction g pour modéliser la situation précédente.
On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément. La durée de chargement exprimée en seconde est alors $g(x)$ avec $g(x) = 10x - 8\ln(x)$ pour x appartenant à $[0,5;+\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $[0,5;+\infty[$.
3. Justifier que la fonction G définie sur $[0,5;+\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$ est une primitive de g sur $[0,5;+\infty[$.
4. On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

a) Montrer que la valeur exacte de I peut s'écrire sous la forme $a+b\ln(2)$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de I puis donner une interprétation de ce résultat.

PARTIE C

Une vidéo particulièrement demandée a attiré simultanément 8 000 personnes. On a constaté que le temps de chargement était de 92 secondes.
Déterminer, en justifiant, celui des deux modèles qui décrit le mieux la situation pour cette vidéo.

EXERCICE 4 (5 points)

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée u où u_n désigne le nombre d'arbres au cours de l'année $(2013+n)$.
En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1. a) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.
   b) Montrer que la suite u est définie par $u_0 = 50000$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3000$.
2. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60000 - u_n$.
   a) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,95.
   Déterminer son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 10000(6 - 0{,}95^n)$.
   d) Déterminer la limite de la suite u.
   e) Interpréter le résultat précédent.
3. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 57000$
   b) Interpréter ce résultat.
4. a) On souhaite écrire un algorithme affichant pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
A, U, N sont des nombres	U, I, N sont des nombres	U, I, N sont des nombres
Début de l'algorithme :	**Début de l'algorithme :**	**Début de l'algorithme :**
Saisir la valeur de A	Saisir la valeur de N	Saisir la valeur de N
N prend la valeur 0	U prend la valeur 50 000	U prend la valeur 50 000
U prend la valeur 50 000	**Pour** I variant de 1 à N	**Pour** I variant de 1 à N
Tant que $U < A$	U prend la valeur $0{,}95U + 3000$	Afficher U
N prend la valeur $N+1$	**Fin Pour**	U prend la valeur $0{,}95U + 3000$
U prend la valeur $0{,}95U + 3000$	Afficher U	**Fin Pour**
Fin tant que		Afficher U
Afficher N		
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

   b) Lorsque $A = 57000$ l'algorithme 1 affiche 24. interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

AMÉRIQUE DU SUD 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point. Aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Une bibliothèque municipale dispose pour ses usagers de deux types de livres : les livres à support numérique et les livres à support papier.
Le service des prêts observe que 85 % des livres empruntés sont à support papier.
Un livre est rendu dans les délais s'il est rendu dans les quinze jours suivant son emprunt.
Une étude statistique montre que 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais et que 32 % des livres à support papier sont rendus dans les délais.
Un lecteur, choisi au hasard, emprunte un livre de cette bibliothèque. On note :

— N l'évènement : « le livre a un support numérique » ;

— D l'évènement : « le livre est rendu dans les délais ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

1. La probabilité de D sachant N est égale à :

   a. 0,62 **b.** 0,32 **c.** 0,578 **d.** 0,15

2. $P\left(\overline{N} \cap \overline{D}\right)$ est égale à :

   a. 0,907 **b.** 0,272 **c.** 0,578 **d.** 0,057

3. La probabilité de l'évènement D est égale à :

   a. 0,272 **b.** 0,365 **c.** 0,585 **d.** 0,94

4. On appelle X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}62$.

   4. 1. La probabilité à 10^{-3} près d'avoir $X \geqslant 1$ est :

   a. 0,8 **b.** 0,908 **c.** 0,092 **d.** 0,992

   4. 2. L'espérance de X est :

   a. 3,1 **b.** 5 **c.** 2,356 **d.** 6,515

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;4]$, $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;4]$.
   b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $F(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$.
   a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0;4]$.
   b) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0;4]$
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   b) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

EXERCICE 3 (5 points)

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.
Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2 % chaque semaine pour les éditions suivantes.
L'agence souhaite dépasser les 4 000 journaux vendus par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1200$.

1. Calculer le nombre u_1 de journaux vendus une semaine après le début de l'opération.
2. Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer à partir de combien de semaines le nombre de journaux vendus sera supérieur à 1 500.
4. Voici un algorithme :

VARIABLES :	U est un réel
	N est un entier naturel
INITIALISATION :	U prend la valeur 1 200
	N prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que $U < 4000$
	N prend la valeur $N+1$
	U prend la valeur $1{,}02 \times U$
	Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

   a) Déterminer la valeur de N affichée par cet algorithme.
   b) Interpréter le résultat précédent.

5. a) Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + \cdots + 1{,}02^n = 50 \times \left(1{,}02^{n+1} - 1\right).$$

   b) On pose, pour tout entier n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   À l'aide de la question précédente, montrer que l'on a : $S_n = 60000 \times \left(1{,}02^{n+1} - 1\right)$.
   c) Déduire de la question précédente le nombre total de journaux vendus au bout de 52 semaines. Le résultat sera arrondi à l'unité.

EXERCICE 4 (4 points)

Les deux parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*
Les probabilités et les fréquences demandées seront données à 0,001 *près.*
Dans un atelier de confiserie, une machine remplit des boîtes de berlingots après avoir mélangé différents arômes.

PARTIE 1

On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque boîte prélevée au hasard, associe sa masse (en gramme) est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 9$.

1. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la masse X soit comprise entre 485 g et 515 g.
   b) L'atelier proposera à la vente les boîtes dont la masse est comprise entre 485 g et 515 g.
   Déterminer le nombre moyen de boîtes qui seront proposées à la vente dans un échantillon de 500 boîtes prélevées au hasard.
   La production est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que la masse X soit supérieure ou égale à 490 g.
3. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer à l'unité près l'entier m tel que $p(X \leqslant m) = 0{,}01$.
   b) Interpréter ce résultat.

PARTIE 2

La machine est conçue pour que le mélange de berlingots comporte 25 % de berlingots parfumés à l'anis.
On prélève 400 berlingots au hasard dans le mélange et on constate que 84 sont parfumés à l'anis.

1. Déterminer un intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des berlingots parfumés à l'anis dans un échantillon de 400 berlingots.
2. Calculer la fréquence f des berlingots parfumés à l'anis dans l'échantillon prélevé.
3. Déterminer si, au seuil de confiance de 95 %, la machine est correctement programmée.

ANTILLES GUYANE 2014

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie

1. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{30}$ est égale à :
   a) $-1 + 2^{31}$
   b) $1 - 2^{31}$
   c) $-1 + 2^{30}$
   d) $1 - 2^{30}$
2. L'équation $-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:
   a) la solution -2
   b) trois solutions distinctes
   c) aucune solution
   d) une unique solution
3. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
   Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par :
   a) $F(x) = \dfrac{1}{x}$
   b) $F(x) = x\ln x$
   c) $F(x) = x\ln x - x$
   d) $F(x) = \mathrm{e}^x$
4. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 0{,}003$ sont tous les nombres entiers n tels que :
   a) $n \geqslant 8$
   b) $n \geqslant 9$
   c) $n \leqslant 8$
   d) $n \leqslant 9$

EXERCICE 2 (5 points)

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n+3. \end{array}\right.$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$.

PARTIE A

1. a) En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.
   À quoi correspond ce choix d'arrondi ?
   b) Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.
4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

PARTIE B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que ...
	Affecter à U la valeur $0,92\times U+3$
	Affecter à N la valeur $N+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

2. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

EXERCICE 3 (5 points)

D'après une étude récente il y a 216 762 médecins en France métropolitaine parmi lesquels 0,6 % pratiquent l'ostéopathie et on compte 75 164 kinésithérapeutes parmi lesquels 8,6 % pratiquent l'ostéopathie.

PARTIE A

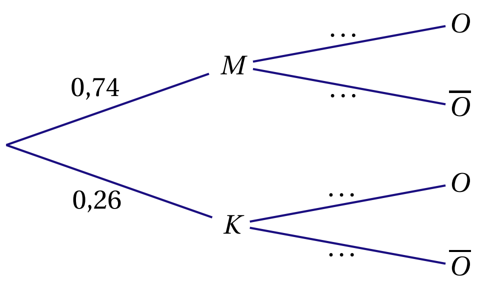
On choisit une personne au hasard parmi les médecins et les kinésithérapeutes.
On note les évènements suivants :

— M : « la personne choisie est médecin » ;

— K : « la personne choisie est kinésithérapeute » ;

— O : « la personne choisie pratique l'ostéopathie ».

On représente la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



1. Reproduire l'arbre de probabilité puis le compléter.
2. Montrer que la probabilité $P(O)$ de l'évènement O est égale à 0,026 8.
3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories.
   Déterminer la probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute. Donner le résultat arrondi au centième.

PARTIE B

On note T la variable aléatoire associant à chaque patient la durée de visite, en minutes, chez un médecin-ostéopathe. On admet que T suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 10.
Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième.

1. Déterminer la probabilité $P(20 \leqslant T \leqslant 40)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure.

PARTIE C

On rappelle qu'en France métropolitaine 0,6 % des médecins pratiquent l'ostéopathie.
Une région compte 47 000 médecins dont 164 médecins-ostéopathes.
On note I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de médecins ostéopathes de la région.

1. a) Vérifier que les conditions d'utilisation de cet intervalle sont remplies.
   b) Justifier que $I = [0{,}0053\,;0{,}0067]$, les bornes ayant été arrondies à 10^{-4} près.
   Peut-on considérer que pour la pratique de l'ostéopathie par les médecins, cette région est représentative, privilégiée ou défavorisée par rapport à la situation en France métropolitaine ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

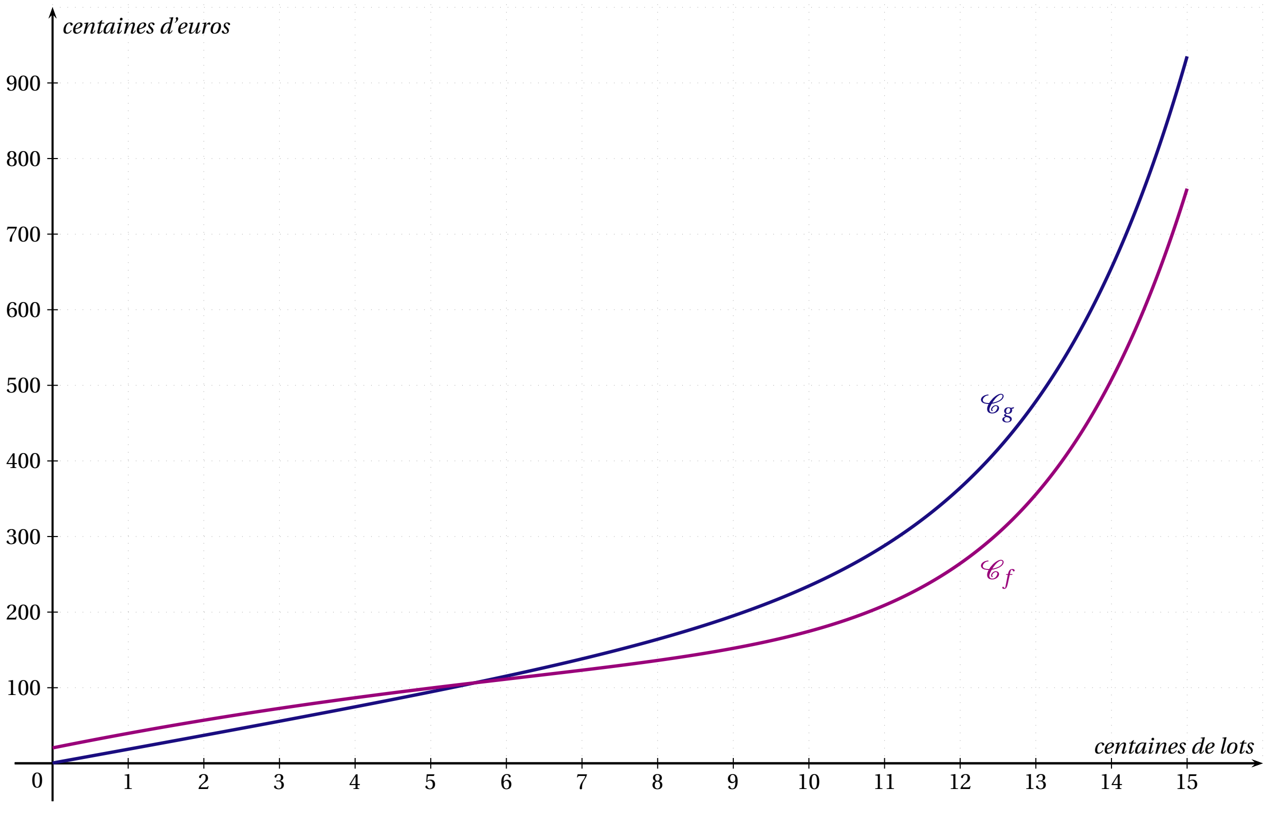
PARTIE A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1 500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0;15]$ par $g(x) = 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}$.
Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
2. Justifier que g est strictement croissante sur $[0;15]$.

PARTIE B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0;15]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$.
Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On note $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.



1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.
2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.
   a) Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$.
   b) Résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0;15]$.
   c) En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

3. On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'.
   Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction h sur $[a;b]$ *est donnée par* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

ANTILLES GUYANE SEPTEMBRE 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

1. La valeur exacte de $\ln\left(10\mathrm{e}^2\right)$ est :

   a. $2\ln(10)+2$ **b.** $4{,}302\,585\,093$ **c.** $\ln(10)+2$ **d.** $2\ln(10\mathrm{e})$

2. On désigne par n un nombre entier naturel. L'inégalité $0{,}7^n \leqslant 0{,}01$ est réalisée dès que :

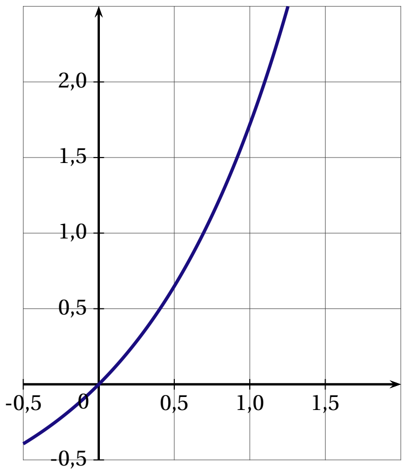
   a. $n \geqslant 12$ **b.** $n \geqslant 13$ **c.** $n \leqslant 13$ **d.** $n \geqslant 70$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{5x+2}$.
   L'expression $f'(x)$ de la dérivée de f est :

   a. $5\mathrm{e}^{5x+2}$ **b.** e^{5x+2} **c.** $2\mathrm{e}^{5x+2}$ **d.** $(5x+2)\mathrm{e}^{5x+2}$

4. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan.
   La valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

   a. $\mathrm{e}-2$ **b.** 2 **c.** $1/4$ **d.** $\ln(1/2)$



5. La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe ci-dessus, donnée à la question 4, a pour équation :

   a. $y = \mathrm{e}x+1$ **b.** $y = \mathrm{e}x-1$ **c.** $y = -\mathrm{e}x+1$ **d.** $y = -\mathrm{e}x-1$

EXERCICE 2 (5 points)

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Une entreprise fabrique des balles de tennis et dispose de trois chaines de fabrication appelées A, B, C.

La chaine A fabrique 30 % de la production totale de l'entreprise.

La chaine B en fabrique 10 %.

La chaine C fabrique le reste de la production.

En sortie de chaines, certaines balles peuvent présenter un défaut.

5 % des balles issues de la chaine A présentent un défaut.

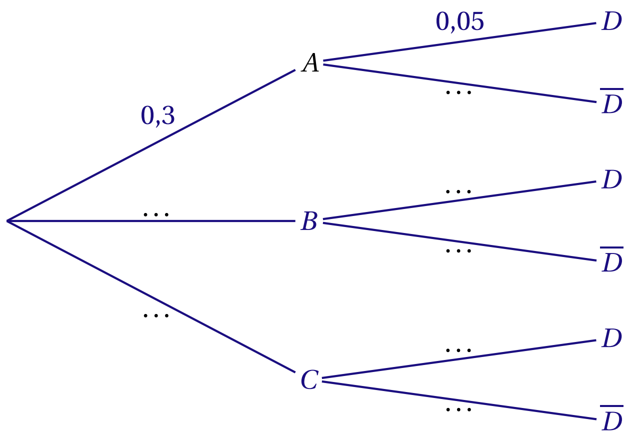
5 % des balles issues de la chaine B présentent un défaut.

4 % des balles issues de la chaine C présentent un défaut.

On choisit au hasard une balle dans la production de l'entreprise et on note les évènements :

— A : « la balle provient de la chaine A » ;
— B : « la balle provient de la chaine B » ;
— C : « la balle provient de la chaine C » ;
— D : « la balle présente un défaut ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Comment se note la probabilité de l'évènement « la balle présente un défaut et provient de la chaine B » ?
3. Montrer que $P(D)$, la probabilité de l'évènement D, vaut 0,044.
4. Calculer $P_D(A)$, la probabilité de A sachant D, et donner un résultat arrondi à 0,001.
5. On choisit 5 balles au hasard dans la production totale qui est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à cinq tirages indépendants avec remise.
   Quelle est la probabilité pour que 3 balles possèdent un défaut ? Arrondir le résultat à 0,000 1 et justifier la réponse.

PARTIE B

Pour être homologuée par la Fédération Internationale de Tennis, le poids d'une balle de tennis doit être compris entre 56,7 grammes et 58,5 grammes.
On suppose que la variable aléatoire X qui, à une balle choisie au hasard dans la production, associe son poids en gramme, suit la loi normale d'espérance $\mu = 57{,}6$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}3$.
On arrondira les résultats au millième.

1. Quelle est la probabilité qu'une balle choisie au hasard soit homologuée ?
2. Quelle est la probabilité qu'une balle choisie au hasard ait un poids supérieur à 58 grammes ?

EXERCICE 3 (6 points)

Les trois parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

PARTIE A

Avant de se lancer, le producteur fait réaliser un sondage auprès de 2 500 foyers de la commune; 80 foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un panier par mois.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion de foyers de la commune susceptibles de passer commande d'un panier mensuel.
2. Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,02 ?
3. La commune compte 15 000 foyers. La condition pour démarrer l'entreprise est de réaliser une recette minimale de 3 500 euros par mois. Sachant que les paniers seront vendus 20 euros l'un, le producteur peut-il envisager de se lancer ? Justifier la réponse.

PARTIE B

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0;10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

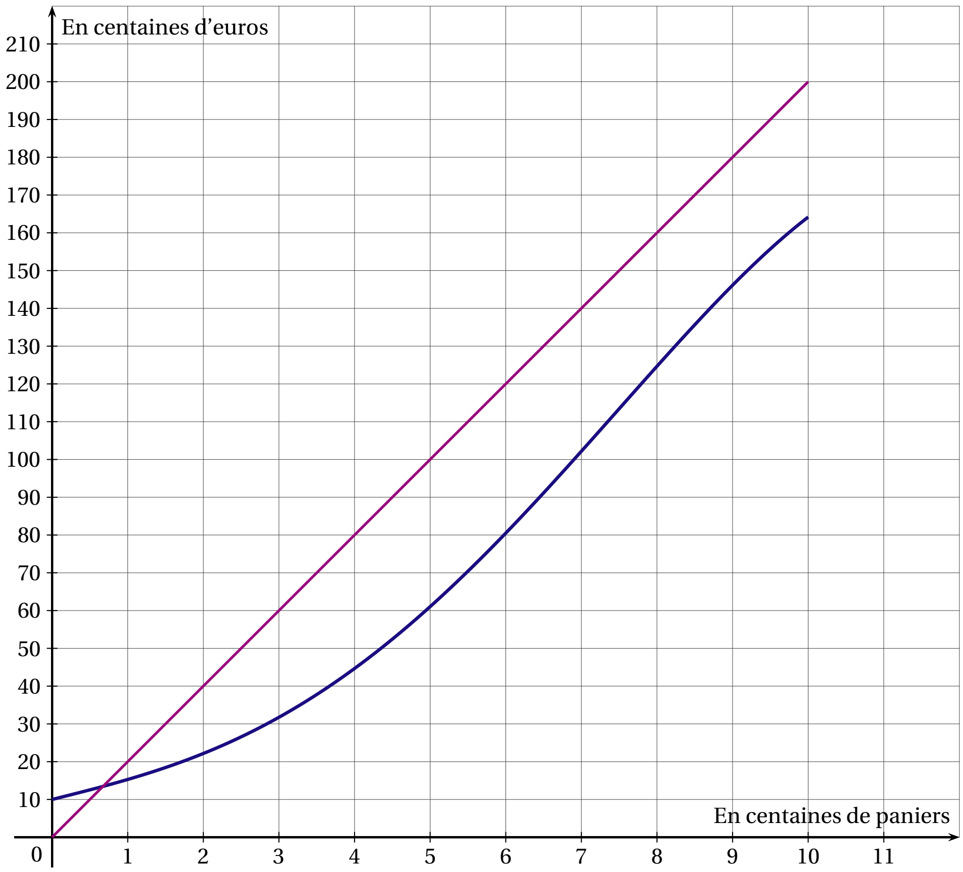
1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.
   a) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0;a]$ inclus dans $[0;10]$ sur lequel la fonction C est convexe.
   b) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

PARTIE C

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes $\mathscr{C}_R$ et $\mathscr{C}_C$ sur le graphique donné en annexe.
Par lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

1. Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.
2. Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois.
   Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.
3. Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.

ANNEXE


En centaines d'euros
210
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
En centaines de paniers

EXERCICE 4 (4 points)

En 2008, une entreprise internationale s'est dotée d'un centre de visio-conférence qui permet de réaliser de grandes économies dans le budget « déplacement des cadres ».
Lors d'un conseil d'administration de fin d'année, le responsable du centre de visio-conférence fait le compte rendu suivant : on a observé un fort accroissement de l'utilisation de cette technologie, le nombre de visio-conférences, qui était de 30 en 2008, a augmenté de 20 % tous les ans.

1. On s'intéresse au nombre d'utilisations de la visio-conférence lors de l'année $2008+n$. On modélise la situation par une suite géométrique (u_n) où le terme u_n est une estimation de ce nombre d'utilisations lors de l'année $2008+n$.
   a) Donner la raison q et le premier terme u_0 de cette suite.
   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c) Vérifier qu'en 2013 on a atteint 74 utilisations de la visio-conférence.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	U et A sont des nombres réels
Entrée :	Saisir A
Traitement :	Affecter à U la valeur 30
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $U < A$ faire
	U prend la valeur $U+U\times 0{,}2$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   a) On donne la valeur 100 à A. Recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant.
   Les valeurs de U seront données approchées par défaut à l'entier près.

Test $U < A$		vrai		....
Valeur de U	30	36		....
Valeur de n	0	1		....

   b) Quelle est la valeur affichée en sortie de cet algorithme ?
   c) Interpréter cette valeur affichée dans le contexte de ce problème.
3. Le coût de l'installation des appareils de visio-conférence sera amorti quand le nombre total d'utilisations aura dépassé 400.
   À partir de quelle année cette installation sera-t-elle amortie ? Justifier la réponse.

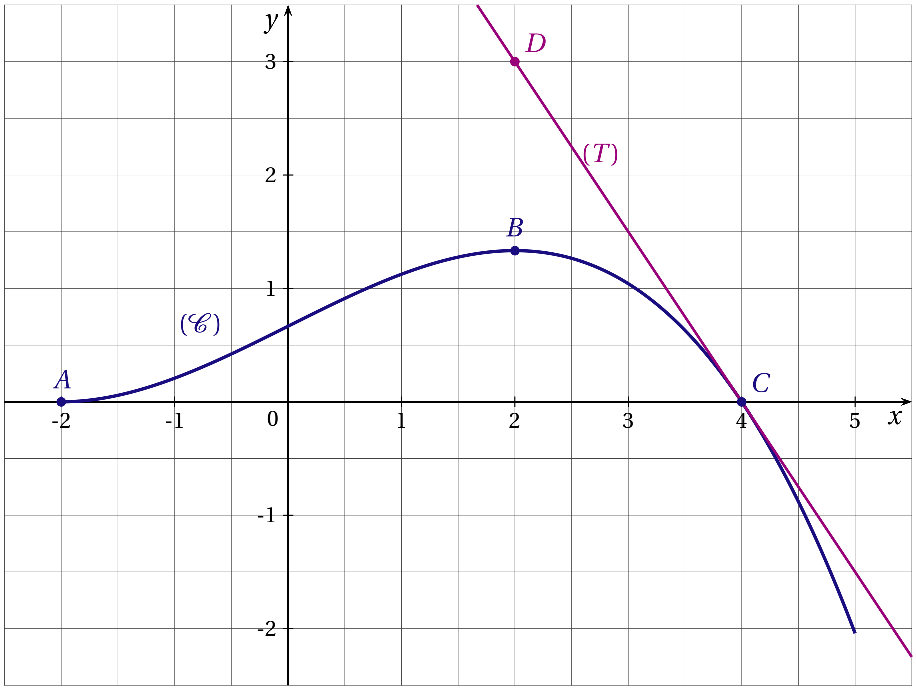
ASIE 2014

EXERCICE 1 (4 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$, croissante sur $[-2;2]$ et décroissante sur $[2;5]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

La courbe $(\mathscr{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé; elle passe par les points $A(-2;0)$; $B\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ et $C(4;0)$.

Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2;3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

PROPOSITION 1 : $f'(4)=-\dfrac{2}{3}$

PROPOSITION 2 : La fonction f est concave sur $[-2;2]$.

PROPOSITION 3 : $2 \leqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

PROPOSITION 4 : L'équation $f(x)=\ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2;5]$.

EXERCICE 2 (5 points)

On s'intéresse aux résultats d'un concours où l'on ne peut pas se présenter plus de deux fois.

PARTIE A : *étude des résultats de mai 2013*

Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que :

— 60 % des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois ;

— 10 % de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis ;

— 40 % de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi.

On interroge au hasard une personne parmi toutes celles ayant passé ce concours en mai 2013.
On note :

— C_1 l'évènement : « La personne présentait le concours pour la première fois » ;

— R l'évènement : « La personne a été reçue à ce concours ».

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Déterminer les probabilités suivantes : $P_{C_1}(R)$; $P_{\overline{C_1}}(R)$ et $P(C_1)$.
   Aucune justification n'est attendue.

   Pour traiter la suite de l'exercice, on pourra s'aider d'un arbre.

2. Déterminer la probabilité que cette personne se soit présentée au concours pour la première fois et ait été admise.
3. Montrer que la probabilité que cette personne ait été admise à ce concours en mai 2013 est de 0,22.
4. Sachant que cette personne a réussi le concours, déterminer la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois. Donner une valeur arrondie au centième.

PARTIE B : *résultats d'un établissement*

Dans cette partie, les valeurs numériques sont arrondies au centième.

Dans un établissement, parmi les 224 étudiants inscrits à la préparation à ce concours, 26 % ont été admis à la session de mai 2013.
On admet que dans cette population, on a également 60 % des personnes qui se présentaient pour la première fois.
Le directeur de l'établissement prétend que ce résultat, supérieur au taux de réussite global de 22 %, ne peut être simplement dû au hasard et il affirme que la qualité de l'enseignement dispensé dans son établissement a permis à ses élèves de mieux réussir que l'ensemble des candidats.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % du pourcentage d'étudiants admis dans un groupe de 224 personnes.
2. Que penser de l'affirmation du directeur de l'établissement ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

PARTIE A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1;26]$ par : $f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1;26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.
2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
$f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   a) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1;26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

   b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1;26]$ et les variations de f sur $[1;26]$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

   a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4;26]$, f' est décroissante. »

   b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

PARTIE B

On admet que la fonction G définie par $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur $[1;26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$.

1. Déterminer, sur $[1;26]$, une primitive F de la fonction f.
2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\dfrac{1}{26-1}\left[F(26) - F(1)\right]$ est 202. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

EXERCICE 4 (6 points)

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

PARTIE A : *un premier modèle*

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2014. Donner une réponse à 0,1 % près.
2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite :
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année $2008+n$.
   Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
   a) Que vaut u_0 ?
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}035^n$.
   c) Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

PARTIE B : *un second modèle.*

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+2\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leqslant 2$
	X prend la valeur $X+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

CENTRES ÉTRANGERS 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

— premier temps : étude du dossier présenté par le candidat;

— deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

— si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines;

— si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.
À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

— 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité;

— 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés;

— 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :

   — D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité »;

   — R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

   a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b) Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

   c) Montrer que la probabilité de l'événement $D \cap R$ est égale à 0,24.

   d) En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question a.

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}38$.

   b) Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée. On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.

3. Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines.

   Coralie arrive à 8 h 30 alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.

   On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8;9]$.

   Déterminer la probabilité pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes.

EXERCICE 2 (6 points)

PARTIE A : Étude d'une fonction

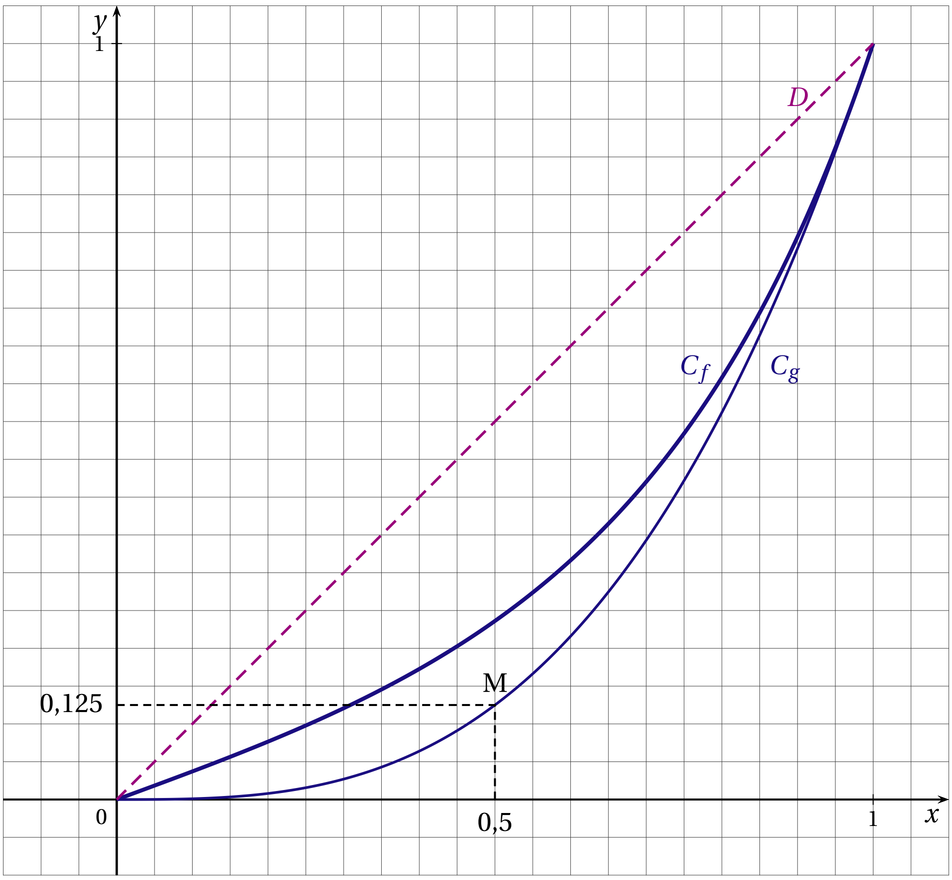
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$.
$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right)$.
   a) Justifier que l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.
   b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.
   c) En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$ et soit $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.
   On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Calculer la valeur exacte de I.

PARTIE B : Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0; 1]$:

— la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A;
— la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
— la droite D d'équation $y = x$.



Les courbes C_f et C_g illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

— sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus fiables par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;

— sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :
Le point $M(0{,}5;0{,}125)$ *est un point appartenant à la courbe* C_g.
Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante :
si on classe les employés par revenu croissant le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50% aux revenus les plus faibles) représente 12,5% de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80% des salariés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.
2. On note A_f l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times A_f$.

   a) Montrer que $I_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   b) On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire.

   déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013+n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. a) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.

   b) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.
3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
   Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
n,i entiers naturels,	n,i entiers naturels,	n,i entiers naturels,
u nombre réel	u nombre réel	u nombre réel
Début algorithme	**Début algorithme**	**Début algorithme**
Lire n	Lire n	Lire n
u prend la valeur 500	u prend la valeur 500	u prend la valeur 500
Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n
Afficher u	Afficher u	u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$
u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$	u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$	Fin Pour
Fin Pour	Fin Pour	Afficher u
	Afficher u	
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,000$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0{,}7^n$.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d) Interpréter le résultat précédent.
5. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 990$.

   b) Interpréter le résultat trouvé précédemment.

EXERCICE 4 (4 points)

L'entreprise Printfactory fabrique, en grande quantité, des cartouches d'encre noire pour imprimante.
Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant votre réponse**.

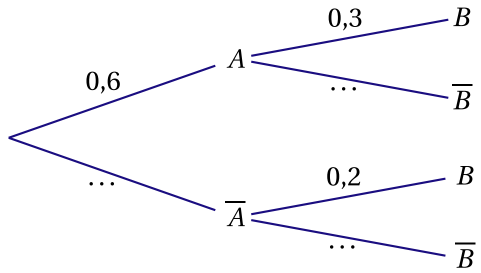
1. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie exprimée en nombre de pages.
   On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
   a) AFFIRMATION 1 : Environ 95 % des cartouches produites ont une durée de vie comprise entre 230 et 270 pages.
   b) AFFIRMATION 2 : Moins de 50 % des cartouches produites ont une durée de vie inférieure à 300 pages.
2. L'entreprise Printfactory a amélioré son procédé industriel et déclare que 80 % des cartouches produites ont une durée de vie supérieure à 250 pages.
   Un contrôleur désigné par l'entreprise effectue un test en prélevant de façon aléatoire un échantillon de cartouches dans la production.
   Dans un échantillon de taille 1 000, le contrôleur a obtenu 240 cartouches vides d'encre avant l'impression de 250 pages.
   AFFIRMATION 3 : Le contrôleur valide la déclaration de l'entreprise.
3. L'entreprise Printfactory souhaite connaître l'opinion de ses 10 000 clients quant à la qualité d'impression de ses cartouches.
   Pour cela, elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau 0,95 avec un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 4 %.
   AFFIRMATION 4 : L'entreprise doit interroger au moins un quart de ses clients.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point.*
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux évènements, dont les évènements contraires sont respectivement notés $\overline{A}$ et $\overline{B}$.



Alors

a) $P_A(B) = 0{,}18$ b) $P(A \cap B) = 0{,}9$ c) $P_A\left(\overline{B}\right) = 0{,}7$ d) $P(B) = 0{,}5$

2. Avec le même arbre, la probabilité de l'évènement B est égale à :

a) 0,5   b) 0,18   c) 0,26   d) 0,38

3. On considère une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[1;15]$. Son tableau de variation est indiqué ci-dessous.

x	1	3	4	12	15
$f(x)$	3	0	-2	-1	-3

Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1;15]$. On peut être certain que :

a) La fonction F est négative sur l'intervalle $[3;4]$.
b) La fonction F est positive sur l'intervalle $[4;12]$.
c) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[4;12]$.
d) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[1;3]$.

4. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:
l'équation $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :

a) $2x+3=6$ b) $2x+3=8$ c) $x^2+3x=6$ d) $x^2+3x=8$

5. g est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{5}{x}$.

   On note C sa courbe représentative.

   L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=2$ et $x=6$, est égale à :

   a) $5(\ln 6-\ln 2)$ b) $\dfrac{1}{6-2}\displaystyle\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$ c) $5\ln 6+5\ln 2$ d) $g(6)-g(2)$

EXERCICE 2 (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010+n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0{,}8^n$.
   c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
4. a) Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$250 + 1\,250 \times 0{,}8^n < 500$$

   Interpréter le résultat obtenu.
   b) Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.
5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.
   A-t-il raison ? Justifier la réponse.

ANNEXE 1

INITIALISATION
  u prend la valeur 1 500
  n prend la valeur 0
TRAITEMENT
  Tant que .... faire
    u prend la valeur ....
    n prend la valeur ....
  Fin Tant que
SORTIE
  Afficher n

EXERCICE 3 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A :

Chaque jour, Antoine s'entraine au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entrainement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20;60]$.

1. Calculer la probabilité p pour que l'entrainement dure plus de 30 minutes.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

PARTIE B :

Dans cette partie les probabilités seront; si besoin, arrondies au millième.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraine sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.
On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm.
2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.
3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

PARTIE C :

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

EXERCICE 4 (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. ÉTUDE GRAPHIQUE :

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. ÉTUDE THÉORIQUE :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0;15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x+2)*\mathtt{exp}(-0.5*x))$
	$\mathtt{exp}(-0.5x)-0.5*\mathtt{exp}(-0.5x)*(x+2)$
2	deriver $(\mathtt{exp}(-0.5*x)-0.5*\mathtt{exp}(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\mathtt{exp}(-0.5*x)+0.25*\mathtt{exp}(-0.5*x)*(x+2)$
3	factoriser $(-\mathtt{exp}(-0.5*x)+0.25*\mathtt{exp}(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\mathtt{exp}(-0.5*x)$

   En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

ANNEXE 2


Concentration (g/L)
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
Temps (en heure)

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2014

EXERCICE 1 (6 points)

Avant de réaliser une opération marketing en début de saison, un revendeur de piscines fait une étude dans son fichier client. Il s'intéresse à deux caractéristiques :

— Le type de piscine déjà installée (piscine traditionnelle, piscine en bois, coque en résine) ;

— l'existence d'un système de chauffage.

Il obtient les résultats suivants :

— 50 % des clients choisissent une piscine traditionnelle, et parmi eux, 80 % ont fait installer un système de chauffage ;

— 40 % des clients choisissent une piscine avec coque en résine, dont 60 % seront chauffées ;

— les autres clients ont préféré une piscine en bois.

On choisit au hasard la fiche d'un client dans le fichier informatique du revendeur de piscine, chaque fiche ayant la même probabilité d'être tirée. On note les évènements suivants :

— T : « Le client choisit une piscine traditionnelle » ;

— R : « Le client choisit une piscine avec coque en résine » ;

— B : « Le client choisit une piscine en bois » ;

— C : « Le client fait installer un chauffage ».

On note $P(T)$ la probabilité de l'évènement T et $P_T(C)$ la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement T est réalisé.
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.
Lorsque ce sera nécessaire, les résultats demandés seront arrondis au millième.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation. L'arbre pourra être complété tout au long de cet exercice.
2. Montrer que la probabilité que le client choisisse une piscine traditionnelle chauffée est 0,4.
3. On sait aussi que 70 % des clients ont choisi de faire installer un chauffage pour leur piscine.
   a) Calculer la probabilité $P(B \cap C)$.
   b) En déduire $P_B(C)$ et compléter l'arbre pondéré précédent.
4. Sachant que la piscine du client dont la fiche a été tirée est chauffée, calculer la probabilité que ce soit une piscine traditionnelle.

PARTIE B

On prélève un lot de 120 fiches dans le fichier client du revendeur.
On s'intéresse, dans un tel lot, au nombre de clients ayant choisi d'installer un chauffage pour leur piscine.
On modélise ce nombre par la variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 74 et 94 piscines chauffées.
2. Calculer la probabilité qu'au moins deux tiers des clients du lot aient choisi d'installer un chauffage pour leur piscine.

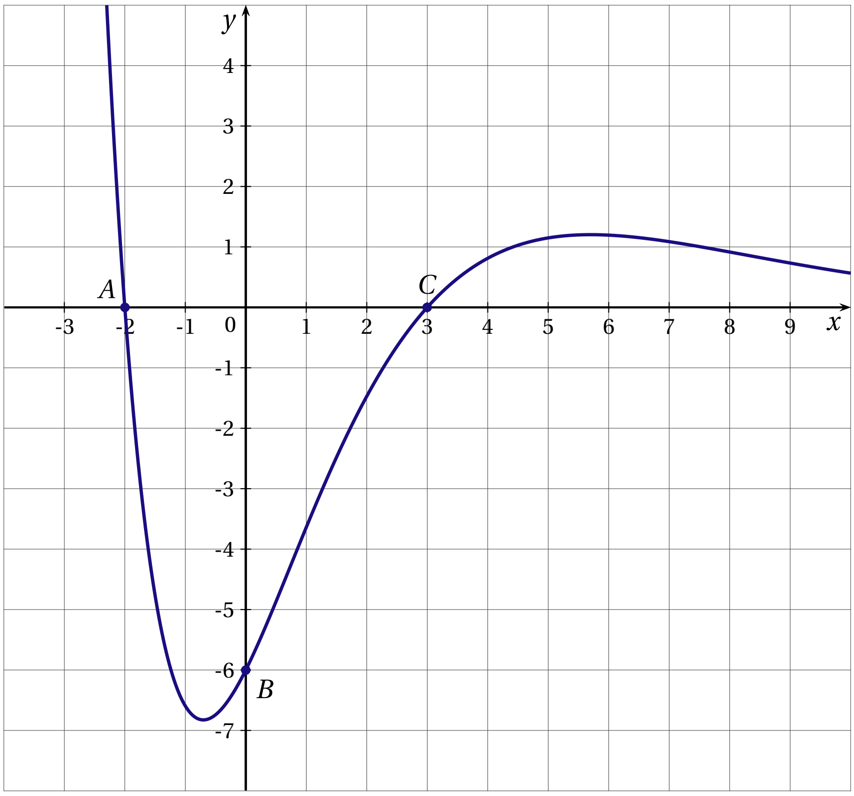
EXERCICE 2 (5 points)

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1. Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2. On définit la suite (a_n) par : $a_0 = 700$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}7 \times a_n + 240$.
   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
      Préciser son premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0{,}7^n \geqslant 780$ revient à résoudre l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}2$.
   b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

EXERCICE 3 (3 points)

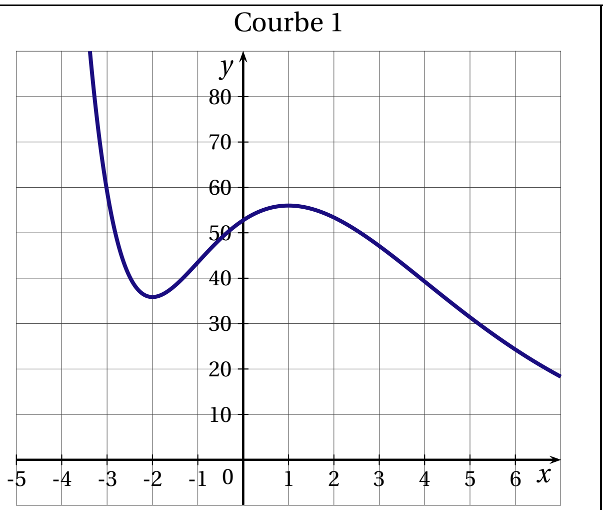
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2;0)$; $B(0;-6)$ et $C(3;0)$.

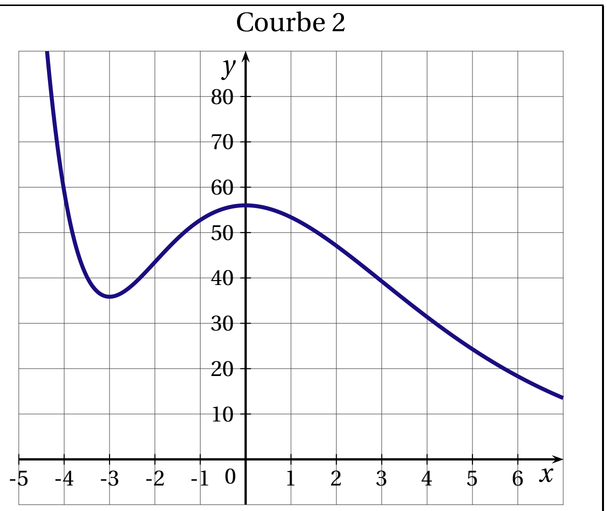


Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2;3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.





EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,5;10]$ par : $f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.
2. Étudier le signe de la fonction f' sur $[0,5;10]$, en déduire le tableau de variations de f sur $[0,5;10]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,5;10]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut.
4. On considère la fonction F définie et dérivable sur $[0,5;10]$ telle que : $F(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x)$.
   Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5;10]$.
5. Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
6. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;3]$: en donner une valeur approchée au millième.

LIBAN 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.
Il note aussi que :

— 70 % des familles laissent un pourboire ;

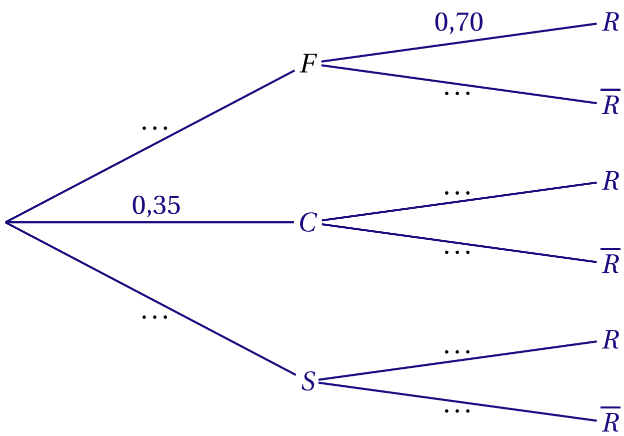
— 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;

— 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.

PARTIE A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. a) Calculer $P(F \cap R)$.

   b) Déterminer $P(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.
Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}.

1. Calculer :

   a) la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.

   b) $P(X \geqslant 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

EXERCICE 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.
On ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236

(*Source : Inpes*)

On a $p = 0{,}236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :

   a. 0,236 **b.** 0 **c.** 0,068 **d.** 0,764

2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
   (*Les bornes de chaque intervalle sont données à* 10^{-3} *près*)

   a. $[0{,}198 ; 0{,}274]$ **b.** $[0{,}134 ; 0{,}238]$ **c.** $[0{,}191 ; 0{,}281]$ **d.** $[0{,}192 ; 0{,}280]$

3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :

   a. $n = 200$ **b.** $n = 400$ **c.** $n = 21\,167$ **d.** $n = 27\,707$

4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles.
   Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
   (*Les bornes de chaque intervalle sont données à* 10^{-2} *près*)

   a. $[0{,}35 ; 0{,}45]$ **b.** $[0{,}33 ; 0{,}46]$ **c.** $[0{,}39 ; 0{,}40]$ **d.** $[0{,}30 ; 0{,}50]$

EXERCICE 3 (5 points)

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013+n$.

1. a) Calculer a_1 et a_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.
   b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2000$.
   c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	N entier,
	A réel.
Initialisation :	N prend la valeur 0
	A prend la valeur 2 500
Traitement :	Tant que $A - 2000 > 50$
	A prend la valeur $A \times 0{,}8 + 400$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N.

   a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = x+1+\mathrm{e}^{-x+0,5}$.
On a représenté **en annexe**, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

— la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;

— la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;5]$, on a $f'(x) = 1-\mathrm{e}^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b) Résoudre dans l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f'(x) = 0$.

   c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$.

   d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$.

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

   a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.

   b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0;5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

PARTIE B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. a) Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

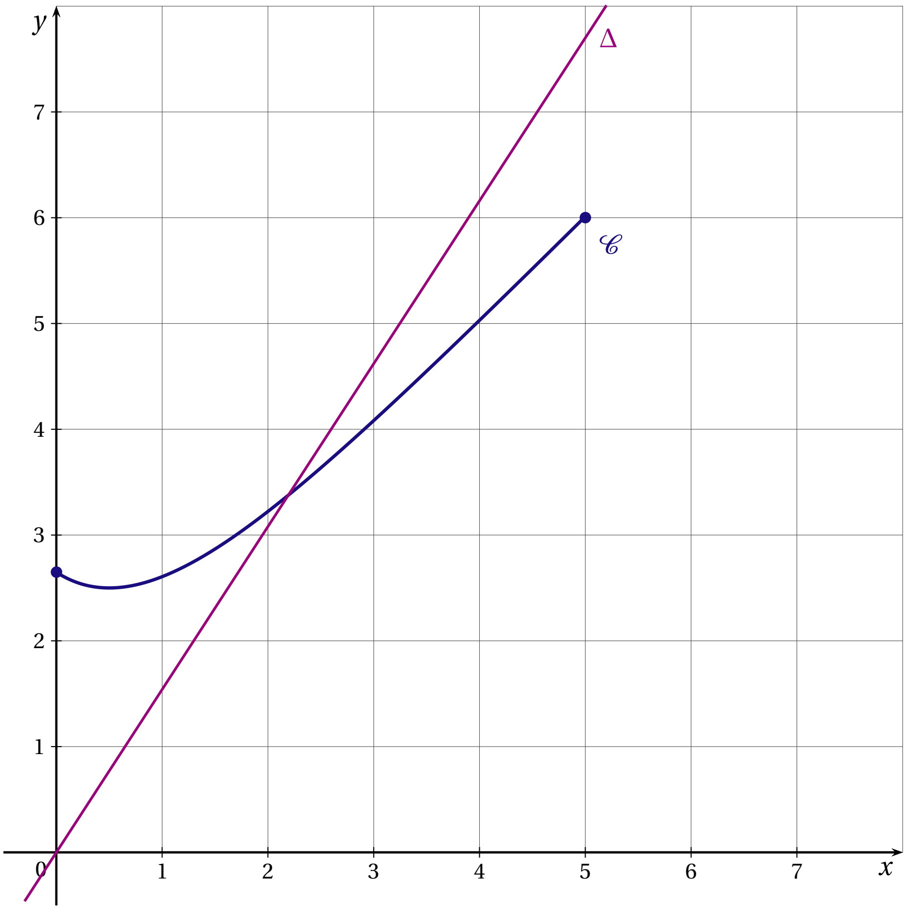
   b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.
   La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros.
   Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x-1-\mathrm{e}^{-x+0,5}$.

2. a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0;5]$.

   b) Montrer que, sur l'intervalle $[0;5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.

3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
   Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

ANNEXE



NOUVELLE CALÉDONIE 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Pour relier une île au continent, les touristes doivent obligatoirement utiliser une des deux compagnies de ferries A ou B qui se partagent l'ensemble des transports vers cette île.
Une enquête de satisfaction réalisée auprès de touristes s'y étant rendus a produit les résultats suivants :

— 60 % des touristes se rendant sur l'île utilisent la compagnie A, les autres utilisent la compagnie B ;
— parmi les touristes ayant choisi la compagnie A pour se rendre sur l'île, 20 % sont satisfaits de leur transport ;
— 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits du transport vers l'île.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu sur l'île :

1. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A et soit satisfait de son transport est :

   a. 0,08 **b.** 0,12 **c.** 0,24 **d.** 0,88

2. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A sachant qu'il est satisfait de son transport est :

   a. 0,34 **b.** 0,20 **c.** 0,25 **d.** 0,83

3. On rappelle que 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits par le transport vers l'île. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante et ayant visité l'île, associe la fréquence de touristes satisfaits par le transport vers l'île.
   Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F est :

   a. $[0,382;0,578]$ **b.** $[0,431;0,529]$ **c.** $[0,470;0,490]$ **d.** $[0,475;0,485]$

4. On choisit de modéliser le nombre de touristes satisfaits par le transport vers l'île parmi les 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
   La probabilité, selon ce modèle, qu'il y ait moins de 40 touristes satisfaits est, à 0,001 près :

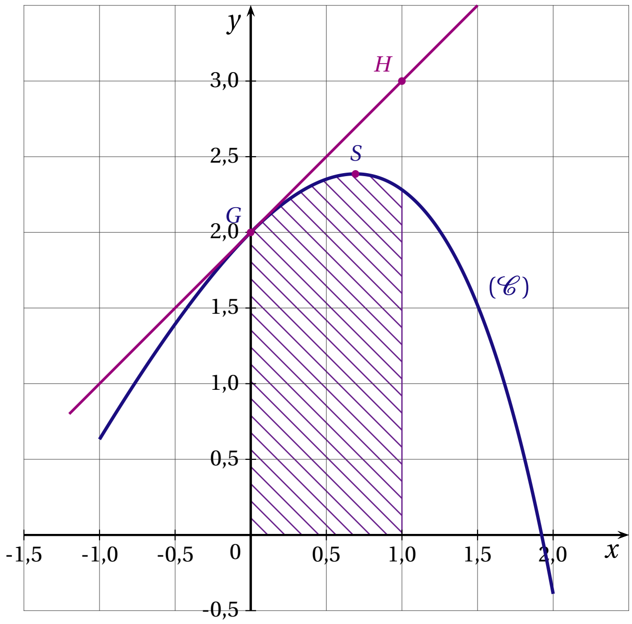
   a. 0,055 **b.** 0,309 **c.** 0,347 **d.** 0,374

5. La durée (en minutes) de la traversée entre le continent et l'île est modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[30;50]$.
   La probabilité que la traversée entre le continent et l'île dure au moins 35 minutes est :

   a. 0,25 **b.** 0,35 **c.** 0,70 **d.** 0,75

EXERCICE 2 (5 points)

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1;2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées $(0;2)$.
Le point H a pour coordonnées $(1;3)$.
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point G.
La courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$.
Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

PARTIE A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1;2]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
3. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-1;2]$ par $f(x) = ax + b - \mathrm{e}^x$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que $a = 2$ et $b = 3$.
3. Déterminer, sur $[-1;2]$, une primitive F de la fonction f.
4. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur le graphique.

EXERCICE 3 (5 points)

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

— chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés;

— chaque année 40% des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
On considère la suite (a_n) définie par $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 400$ et $a_0 = 1500$.

1. Justifier que la suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1000$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c) En déduire que : $a_n = 500 \times 0{,}6^n + 1000$.
3. En 2010 le prix d'un abonnement annuel dans une salle de sport de cette société était de 400 €.
   a) Quelle a été la recette de cette société en 2010?
   b) Chaque année le prix de cet abonnement augmente de 5%. On note P_n le prix de l'abonnement annuel pour l'année $2010 + n$.
   Indiquer la nature de la suite (P_n) en justifiant la réponse.
   En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
   c) Montrer que, pour l'année $2010+n$, la recette totale annuelle R_n réalisée par la société pour l'ensemble de ses salles de sport est donnée par : $R_n = (500 \times 0{,}6^n + 1000) \times (400 \times 1{,}05^n)$
   d) Trouver, à l'aide de votre calculatrice, l'année où, pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010.

EXERCICE 4 (5 points)

On a utilisé un logiciel de calcul formel et on a obtenu les résultats suivants :

1	dériver $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
2	dériver $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ $-\dfrac{2}{x^3}$
3	dériver $\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$ $\dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$

On pourra utiliser les résultats obtenus par ce logiciel pour répondre à certaines questions de l'exercice.

On considère la fonction f définie sur $[1;10]$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est deux fois dérivable sur $[1;10]$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. a) Déterminer $f'(x)$ sur $[1;10]$.
   b) Construire le tableau de variation de la fonction f sur $[1;10]$.
2. a) Justifier que $f''(x)=\dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$ sur $[1;10]$.
   b) Étudier le signe de f'' sur $[1;10]$.
   c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. On considère l'algorithme suivant :

INITIALISATION :	X prend la valeur 2
	Y prend la valeur $\dfrac{\ln(2)}{2}$
	Z prend la valeur $\dfrac{\ln(2{,}1)}{2{,}1}$
TRAITEMENT :	Tant que $(Y<Z)$ Faire
	X prend la valeur $X+0{,}1$
	Y prend la valeur $\dfrac{\ln(X)}{X}$
	Z prend la valeur $\dfrac{\ln(X+0{,}1)}{X+0{,}1}$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher X

   a) Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,3466	0,3533	vrai
2,1	0,3533	0,3584	vrai
2,2	…		

b) Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?

NOUVELLE CALÉDONIE MARS 2015

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1,5;6]$ par $f(x) = (25x-32)\mathrm{e}^{-x}$.
On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle $[1,5;6]$, sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

— $f'(x) = (57-25x)\mathrm{e}^{-x}$

— $f''(x) = (25x-82)\mathrm{e}^{-x}$

1. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1,5;6]$.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1,5;6]$ (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).
2. Montrer que, sur l'intervalle $[1,5;6]$, la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.
   a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4;5]$.
   b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[4;5]$.

Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5
Traitement
Tant que $b-a > 0,1$ faire
  y prend la valeur $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
  Si $y > 1$ alors
    a prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Sinon b prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

   Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.

   c) Donner une valeur approchée de α au dixième.

ANNEXE(*à rendre avec la copie*)

	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »						
3e boucle « Tant que »						
4e boucle « Tant que »						

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise est spécialisée dans la distribution de pommes et la fabrication de jus de pomme.
Elle s'approvisionne en pommes auprès de différents producteurs régionaux.
L'entreprise dispose d'une machine destinée à tester la conformité des pommes; celles que la machine accepte seront vendues sans transformation; les autres serviront à produire du jus de pomme en bouteille.
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A : sélection des pommes

Une étude a montré que 86 % des pommes fournies par les différents producteurs sont conformes. Les tests étant réalisés très rapidement, la machine commet quelques erreurs :

— 3 % des pommes effectivement conformes sont rejetées à tort par la machine;

— 2 % des pommes non conformes sont acceptées à tort par la machine.

On prélève au hasard dans le stock de l'entreprise une pomme qui va être testée par la machine.
On note les évènements suivants :

— C : « La pomme prélevée est conforme »;

— T : « La pomme est acceptée par la machine ».

$\overline{C}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements C et T.
Pour répondre aux questions suivantes, on pourra représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

1. Déterminer la probabilité que la pomme prélevée soit conforme et soit acceptée par la machine.
2. Montrer que $P(T)$,la probabilité de T, est égale à 0,837.
3. La pomme prélevée est acceptée par la machine. Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme? (On donnera une valeur décimale approchée au millième)

PARTIE B : contrôle d'un fournisseur

L'entreprise a un doute sur la qualité des pommes fournies par l'un de ses fournisseurs, et elle envisage de s'en séparer.
Elle procède donc à un contrôle en prélevant, au hasard, un échantillon de 80 pommes et en vérifiant manuellement la conformité de chaque pomme.
On formule l'hypothèse que 86 % des pommes de ce fournisseur sont conformes.

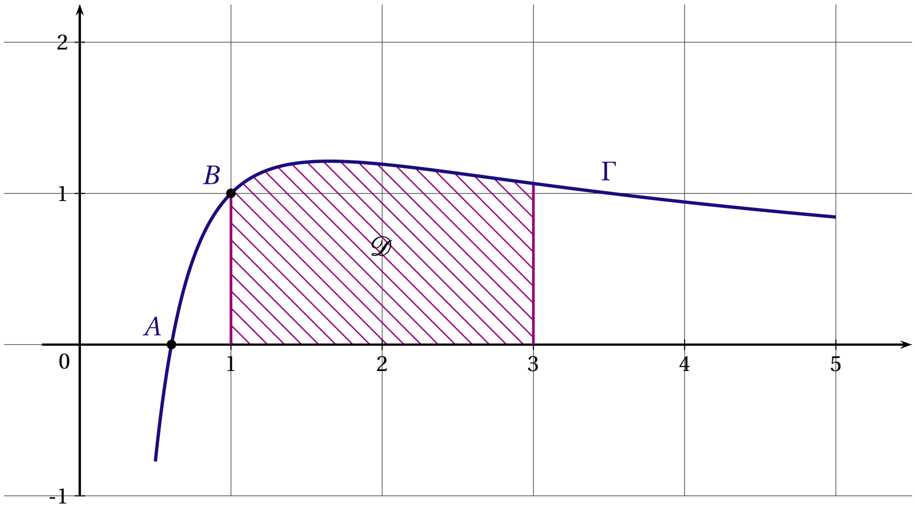
1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes conformes contenues dans un lot de 80 pommes. (*les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième*).
2. L'entreprise a constaté que seulement 65 pommes de l'échantillon étaient conformes.
   Quelle décision est-elle amenée à prendre?

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5;5]$, et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.
2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0,5;5]$, on a $g'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^2}$.
   b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,5;5]$.
   c) En déduire les variations de g sur l'intervalle $[0,5;5]$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.
4. a) On note $\mathscr{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.
   b) On définit la fonction G sur l'intervalle $[0,5;5]$ par $G(x) = \ln(x)[\ln(x)+1]$.
   Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0,5;5]$.
   c) Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans une grande entreprise, les commerciaux ont le choix de services de téléphonie mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.
On s'intéresse aux parts de marché de ces deux opérateurs chez les commerciaux de cette entreprise.
Chaque commercial dispose d'un seul abonnement chez l'un ou l'autre des opérateurs : A et B.
Les abonnements sont souscrits pour une période d'un an, à partir du 1er janvier.
Une statistique, menée sur les choix des commerciaux, a révélé que :

— parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;

— parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur.

On admet que les mouvements d'abonnés d'un opérateur à l'autre se poursuivront dans ces proportions dans les années à venir.
De plus on sait qu'au 1er janvier 2014, 40 % des commerciaux avaient souscrit un abonnement chez A et 60 % chez B.
On note, pour tout entier naturel n :

— u_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1er janvier de l'année $2014+n$;

— v_n la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1er janvier de l'année $2014+n$.

On a donc $u_0 = 0{,}4$ et $v_0 = 0{,}6$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}82u_n + 0{,}22v_n$ et que $u_n + v_n = 1$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}22$.
3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n - 0{,}55$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}55 - 0{,}15 \times (0{,}6)^n$.
4. Conjecturer la limite de la suite (u_n). Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures ?

POLYNÉSIE 2014

EXERCICE 1 (5 points)

PARTIE A

DOCUMENT 1 : « *En France, pendant l'année scolaire 2009-2010, sur 81 135 étudiants inscrits en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE), on pouvait trouver 34 632 filles.* »
(Source : Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche Edition 2010)

Selon l'INSEE, la proportion de filles parmi les jeunes entre 15 et 24 ans est de 49,2 %.

Peut-on considérer, en s'appuyant sur le document 1 que les filles inscrites sont sous-représentées en CPGE ? Justifier la réponse.
On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.

PARTIE B

Les étudiants des CPGE se répartissent en 3 filières :

— la filière scientifique (S) accueille 61,5 % des étudiants ;

— la série économique et commerciale (C) accueille 24 % des étudiants ;

— les autres étudiants suivent une filière littéraire (L).

DOCUMENT 2 : « *En classes littéraires, la prépondérance des femmes semble bien implantée : avec trois inscrites sur quatre, elles y sont largement majoritaires. Inversement, dans les préparations scientifiques, les filles sont présentes en faible proportion (30 %) alors qu'on est proche de la parité dans les classes économiques et commerciales.* »
(Même source)

On considère que parmi tous les inscrits en CPGE en 2009-2010, la proportion de fille est 42,7 %. On interroge au hasard un étudiant en CPGE. On considère les événements suivants :

— F : l'étudiant interrogé est une fille ;

— S : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière scientifique ;

— C : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière économique et commerciale ;

— L : l'étudiant interrogé est inscrit dans la filière littéraire.

1. Donner les probabilités $P(S)$, $P(C)$, $P_L(F)$, $P_S(F)$ et $P(F)$.
   Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. Cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. a) Calculer la probabilité que l'étudiant interrogé au hasard soit une fille inscrite en L.
   b) Calculer la probabilité de l'événement $F \cap S$.
   c) En déduire que la probabilité de l'événement $F \cap C$ est 0,133 75.
3. Sachant que l'étudiant interrogé suit la filière économique et commerciale, quelle est la probabilité qu'il soit une fille ? On arrondira le résultat au millième.
   Confronter ce résultat avec les informations du document 2.
4. Sachant que l'étudiant interrogé est une fille, quelle est la probabilité qu'elle soit inscrite dans la filière littéraire L ? On arrondira le résultat au millième.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.
On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.
La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

PARTIE A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

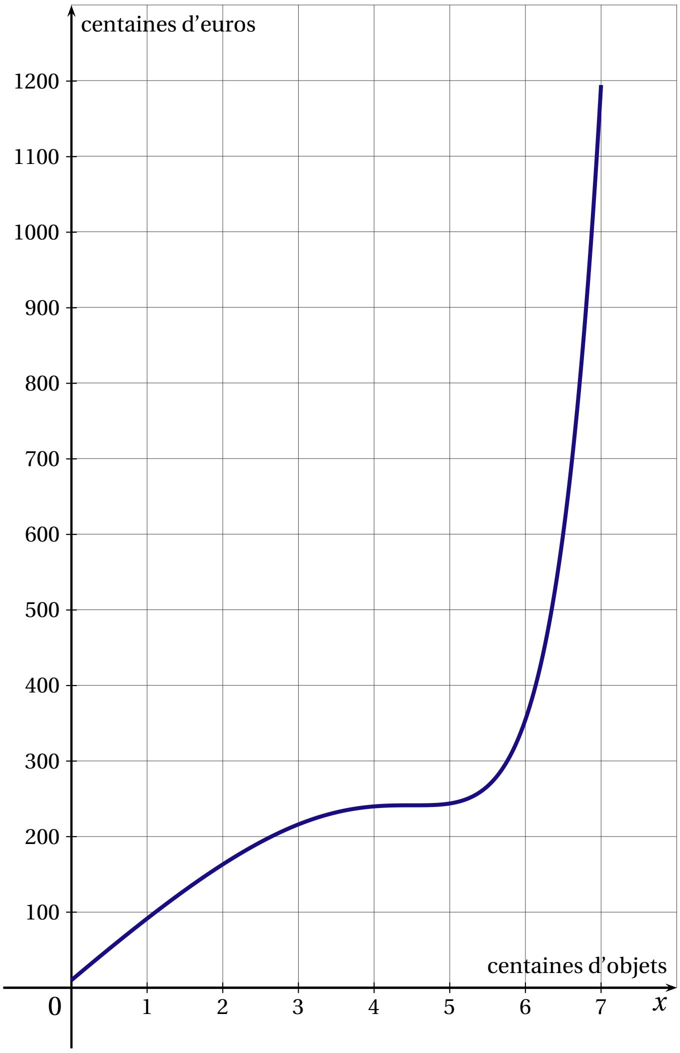
1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?
2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ? On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.
   a) Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.
   b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0;7]$ » ?

PARTIE B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0;7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
   Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.
   a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
   b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

ANNEXE


centaines d'euros
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
x
centaines d'objets

EXERCICE 3 (5 points)

La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{array}\right.$$

PARTIE A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
   Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
U prend la valeur 5
Pour i de 0 à N faire
   Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
Fin Pour
Afficher U
Fin
	Variables :
	U est un nombre réel
	i et N sont des nombres entiers
	Début
	Saisir une valeur pour N
	Pour i de 0 à N faire
	   U prend la valeur 5
	   Afficher U
	   Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
	Fin Pour
	Fin
		Variables :
		U est un nombre réel
		i et N sont des nombres entiers
		Début
		Saisir une valeur pour N
		U prend la valeur 5
		Pour i de 0 à N faire
		   Afficher U
		   Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$
		Fin Pour
		Fin

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059

   Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

PARTIE B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

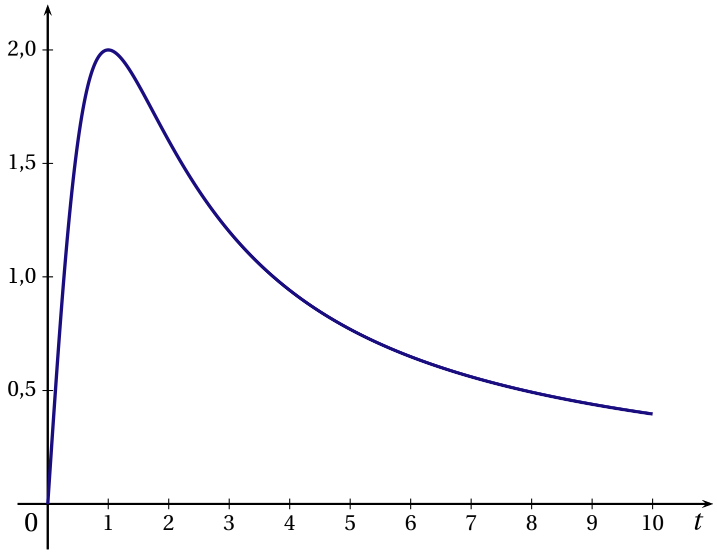
1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.
2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n = 2 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

EXERCICE 4 (5 points)

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation. Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $g(t)=\dfrac{4t}{t^2+1}$.
Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :
   a) les variations de la fonction g sur $[0;10]$;
   b) la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures;
   c) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.
2. a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$ et sa dérivée est g'.
   Montrer que $g'(t)=\dfrac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$.
   b) En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.
3. On admet que G définie sur $[0;10]$ par $G(t)=2\ln\left(t^2+1\right)$ est une primitive de g sur cet intervalle.
   Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a;b]$ est donnée par $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
   La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l.
   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2014

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

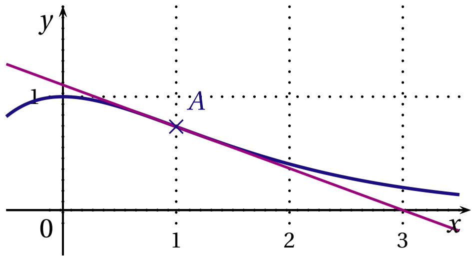
1. On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0;3]$ ainsi que la tangente au point A d'abscisse 1.
   En $x = 1$, le nombre dérivé de f est :

   a) $-2\mathrm{e}$

   b) 3

   c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

   d) $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$



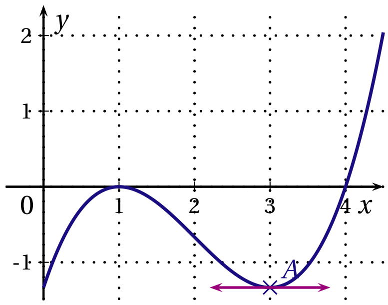
2. On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[0;5]$ ainsi que sa tangente horizontale au point A d'abscisse 3.
   Le signe de la fonction dérivée de g est :

   a) négatif sur $[0;1]$

   b) positif sur $[3;4]$

   c) négatif sur $[1;4]$

   d) change en $x = 4$



3. La fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une primitive de la fonction h définie par :

   a) $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ b) $-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ c) $-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ d) $-2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

4. Soit j la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $j(x) = 1 + \ln x$.
   L'équation $j(x) = 0$ a pour solution :

   a) e b) -1 c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ d) 1

5. On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3x + 5$.
   L'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de k, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est :

   a) 6,5 b) 8 c) 4,5 d) 8,5

EXERCICE 2 (5 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée.
Les résultats révèlent que :

95 % des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70 % sont satisfaits de la qualité des repas;

20 % des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note les évènements suivants :

R l'évènement : « l'élève mange régulièrement à la cantine »;

S l'évènement : « l'élève est satisfait ».

On notera $\overline{R}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires de R et S.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à 0,675.
4. Sachant que l'élève n'est pas satisfait de la qualité des repas, calculer la probabilité qu'il mange régulièrement à la cantine. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas.
   Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.
   Les résultats seront arrondis au millième.
   a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement A : « les quatre élèves sont satisfaits de la qualité des repas ».
   c) Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise produit à la chaîne des jouets pesant en moyenne 400 g. Suite à une étude statistique, on considère que la masse d'un jouet est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Dans tout l'exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Déterminer $P(385 \leqslant X \leqslant 415)$. Interpréter ce résultat.
2. Justifier, en utilisant des propriétés du cours, que $P(X \geqslant 411) \approx 0{,}16$.
3. Un jouet est commercialisable s'il pèse au maximum 420 g.
   Quelle est la probabilité que le jouet soit commercialisable ?
4. On cherche à contrôler la qualité des jouets. Pour cela on choisit de façon aléatoire un échantillon de 300 jouets.
   a) Vérifier que les conditions de détermination de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de jouets commercialisables sont vérifiées.
   b) Déterminer cet intervalle.
   c) On constate que 280 jouets de l'échantillon sont commercialisables.
   Ce résultat remet-il en question la modélisation effectuée par l'entreprise ?

EXERCICE 4 (6 points)

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2014 et d'y placer 2 000 euros. Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1[er] janvier suivants.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année $2014+n$ après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2\,000$.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

PARTIE A

1. Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n).
2. Justifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 150$.
3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 5\,000$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.
4. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout nombre entier n on a : $u_n = 7\,000 \times 1{,}03^n - 5\,000$.
5. À partir de quelle année, cette personne aura-t-elle au moins 4 000 euros sur son compte épargne ? Indiquer la façon dont la réponse a été trouvée.

PARTIE B

L'algorithme ci-dessous modélise l'évolution d'un autre compte épargne, ouvert le premier janvier 2014, par une seconde personne.

Variables :	C et D sont des nombres réels
	N est un nombre entier
Entrée :	Saisir une valeur pour C
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à D la valeur $2 \times$ C
	Tant que C < D faire
	affecter à C la valeur $1{,}03 \times \mathrm{C} + 600$
	affecter à N la valeur N + 1
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

1. a) Que représente la variable C dans cet algorithme ?
   b) Quel est le taux de ce placement ?
   c) Quel est le versement annuel fait par cette personne ?
2. On saisit, pour la variable C, la valeur 3 000.
   a) Pour cette valeur de C, en suivant pas à pas l'algorithme précédent, recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de C	3 000				...
Valeur de N	0				...
Valeur de D	6 000				...
Test C < D	vrai				...

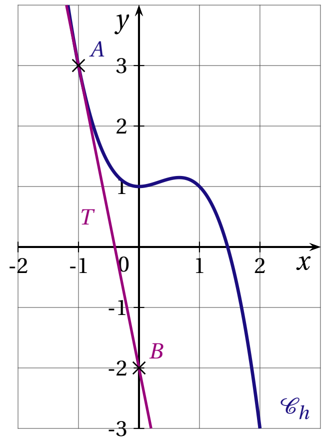
   b) Qu'affiche l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

PONDICHÉRY 2014

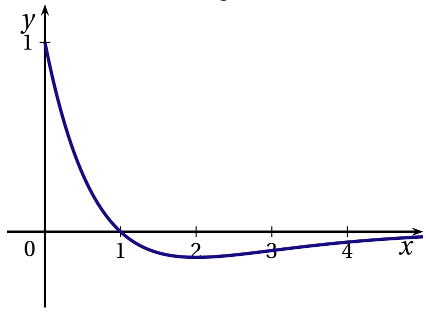
EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La courbe $\mathscr{C}_h$ représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre.
   On a tracé la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point $A(-1;3)$.
   T passe par le point $B(0;-2)$.
   Proposition : le nombre dérivé $h'(-1)$ est égal à -2.



2. On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$.
   La courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, est donnée ci-contre.
   Le point de coordonnées $(1;0)$ est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.
   Proposition : la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1;4]$.



3. **Proposition** : on a l'égalité

$$\mathrm{e}^{5\ln 2} \times \mathrm{e}^{7\ln 4} = 2^{19}.$$

4. La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0;2]$ est donnée en fig. 1.
   La courbe représentative d'une de ses primitives, G, est donnée sur la fig. 2. La courbe représentative de G passe par les points $A(0;1)$, $B(1;1)$ et $C(2;5)$.

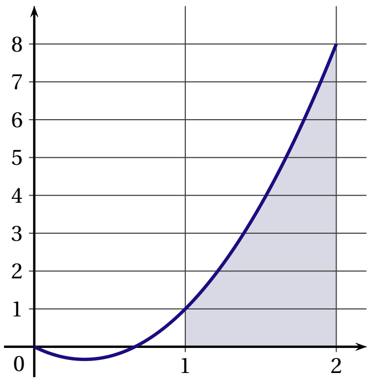


fig. 1

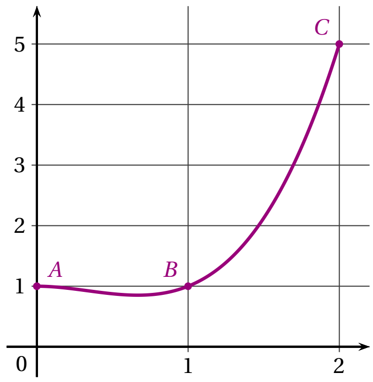


fig. 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en fig. 1 est 4 unités d'aires.

EXERCICE 2 (5 points)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.
Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux.
Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.
On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
   a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'algorithme 3 permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.
   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 0,6 × U + 120 à U
Fin Pour
Afficher U
Fin
```

algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 115 à U
  | Affecter 0,4 × U + 115 à U
Fin Pour
Afficher U
Fin
```

algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 0,4 × U + 120 à U
Fin Pour
Afficher U
Fin
```

algorithme 3

   b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$.
   d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.
   Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes

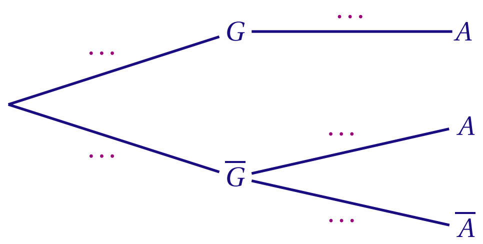
PARTIE A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.
Si le salarié n'est pas grippé cette semaine là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.
On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les évènements suivants :

— G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;

— A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à 0,1072.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millième.

PARTIE B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3{,}5$.

1. Justifier, en utilisant un résultat du cours, que $p(7 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0{,}95$.
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.

PARTIE C

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.
Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.
Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.
Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle? Justifier la réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

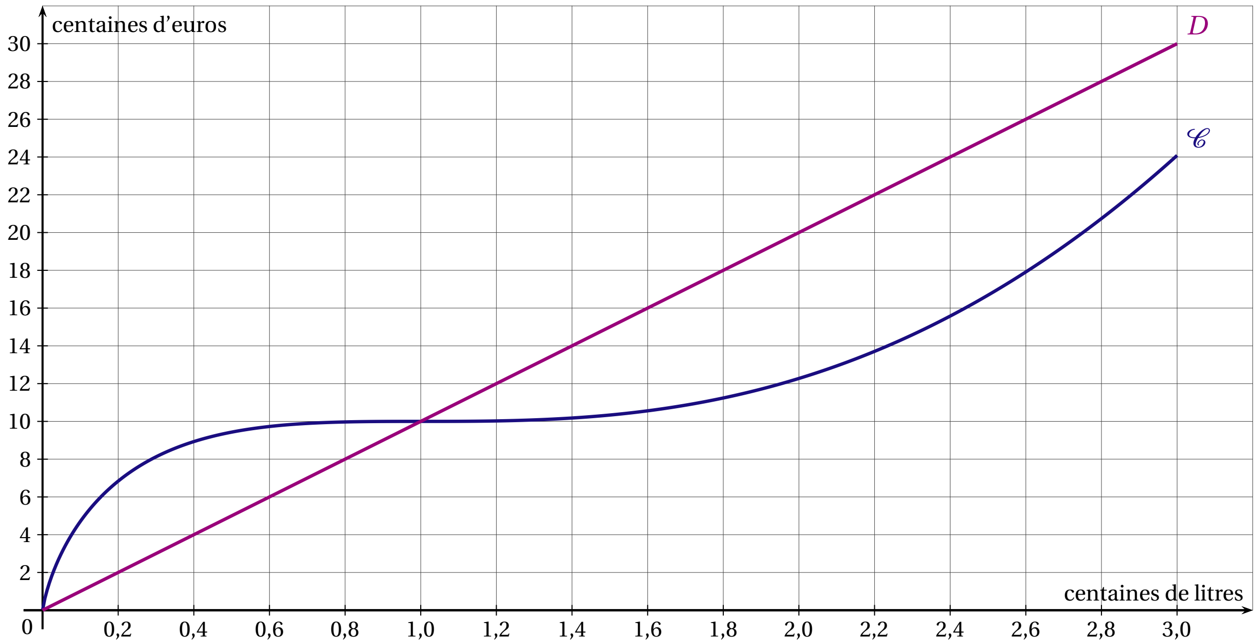
EXERCICE 4 (6 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0;3]$ par $f(x) = 10x^2 - 20x\ln x$.
Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.
La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

PARTIE A

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données ci-dessous.



1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
   a) Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
   b) Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
   c) Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?
2. On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x = 90\ln 3 - 40$.
   a) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

PARTIE B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits.
D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1;3]$, on a $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1;3]$, on a $B'(x) = -20x + 20\ln x + 30$.
2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1;3]$.

x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$ $\searrow$	$B'(3)$

   a) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

   b) En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1;3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

BACCALAURÉAT 2014

SÉRIE ES - L : INDEX THÉMATIQUE