BAC 2017

SÉRIE ES - L

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2017

ES OBLIGATOIRE ET L SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

Certains énoncés ont été légèrement modifiés pour tenir compte de l'évolution de l'écriture des algorithmes dans les sujets de baccalauréat pour la session 2018

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2017

AMÉRIQUE DU NORD 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-x$. On note f' sa fonction dérivée.
   On a alors :

   a) $f'(x)=0$ b) $f'(x)=\ln(x)$ c) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$ d) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-x$

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6\times 0{,}95^n-1\leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

   a) $\left]-\infty;\dfrac{\ln 3}{\ln(5{,}7)}\right]$ b) $\left]-\infty;\ln\left(\dfrac{0{,}5}{0{,}95}\right)\right]$ c) $\left]-\infty;\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\right]$ d) $\left[\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)};+\infty\right[$

3. Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.
   Un tube métallique est considéré comme étant dans la nonne si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.
   L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

   a) $[0{,}922;0{,}986]$ b) $[0{,}947;0{,}961]$ c) $[1{,}98;2{,}02]$ d) $[0{,}953;0{,}955]$

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.
   Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

   a) 0,512 b) 2,4 c) 0,262 144 d) 0,081 92

EXERCICE 2 (5 points)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

— 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;

— les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

   b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

3. Recopier et compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme suivant afin qu'il calcule le nombre d'années à partir duquel le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
L1    n ← 0
L2    U ← 27500
L3    Tant que U ⩽ ...
L4        n ← ...
L5        U ← ...
L6    Fin Tant que
```

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   b) Donner la valeur de n calculée par cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

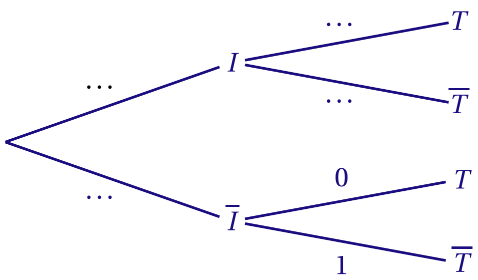
D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie cœliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.
On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les évènements :

— I : « la personne choisie est intolérante au gluten » ;

— T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

PARTIE A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

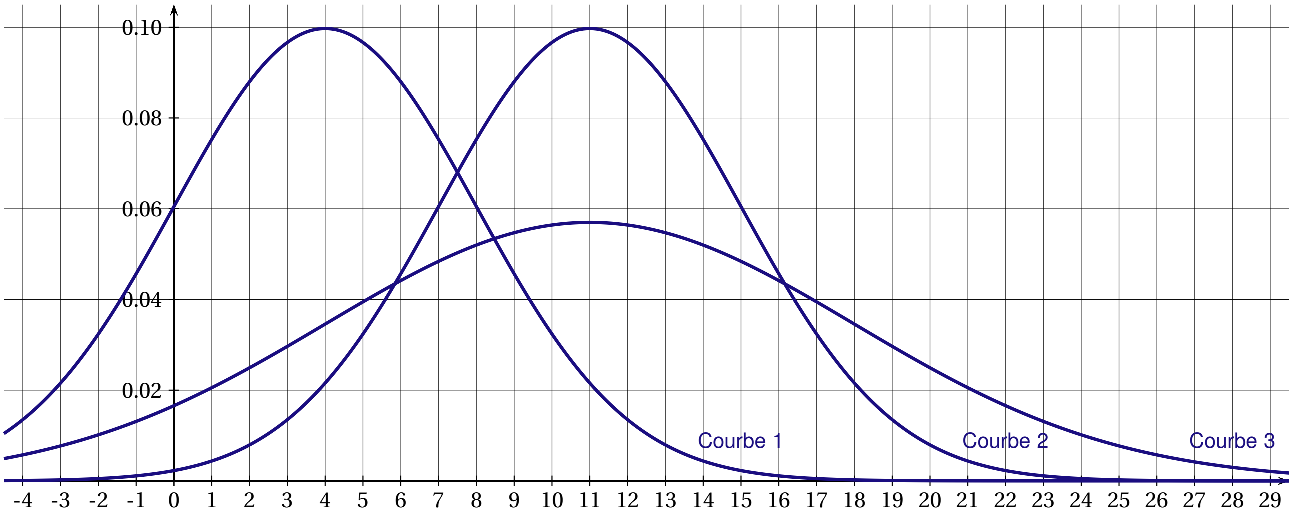


2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être diagnostiquée.
3. Montrer que $p(T) = 0{,}002$.

PARTIE B

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.

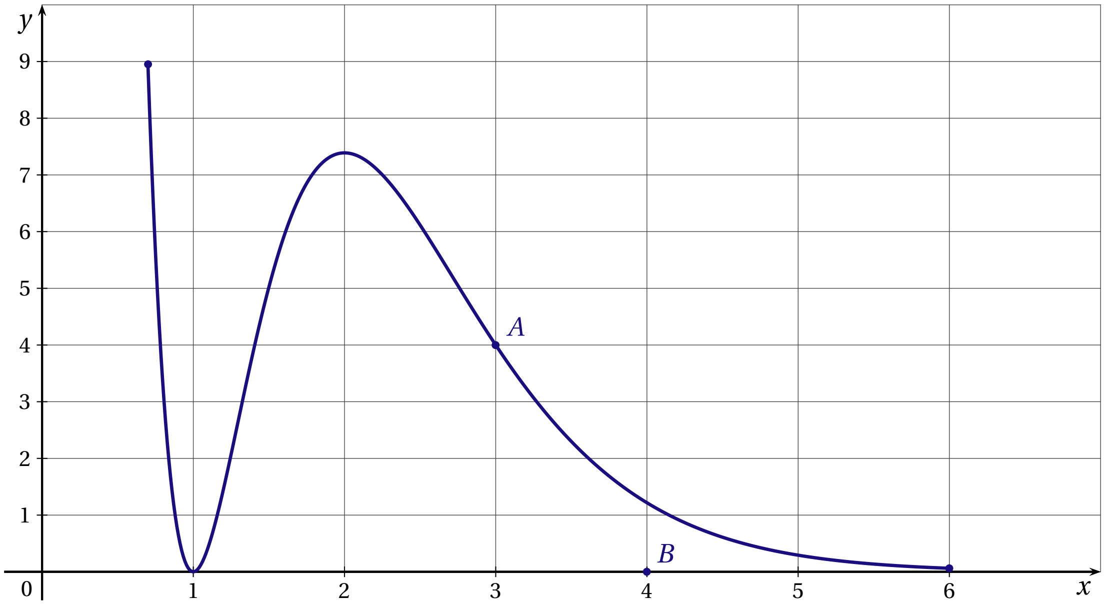

0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
Courbe 1
Courbe 2
Courbe 3

EXERCICE 4 (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0{,}7;6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3;4)$ et $B(4;0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0{,}7;6]$.

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}7;6]$.

   On ne demande pas de calculer les ordonnées.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{}(-2x+6)$ $\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\left(-2x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

   a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion? Si oui, en donner l'abscisse.

   c) On pose $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

AMÉRIQUE DU SUD 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 11 + 5\ln(x)$.
   Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

   a) $y = 5x + 11$ b) $y = 5x + 6$ c) $y = 11x - 6$ d) $y = 5x + 16$

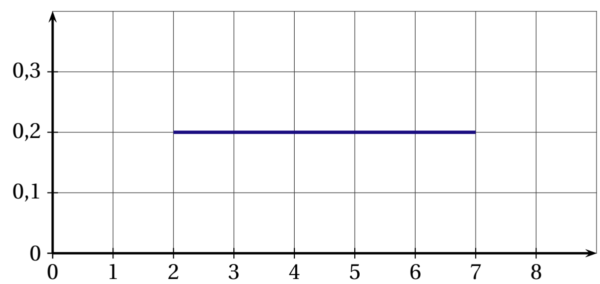
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 11 + 5\ln(x)$.
   L'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x a pour solution :

   a) $-\dfrac{e^{11}}{5}$ b) $-\ln\left(\frac{11}{5}\right)$ c) $e^{\frac{-11}{5}}$ d) $\dfrac{e^{-11}}{5}$

3. On lance cinq fois de suite un dé équilibré à six faces.
   On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de 6 qu'on obtient.
   La probabilité $p(X = 1)$ d'obtenir exactement un 6, arrondie à 10^{-2}, est :

   a) 0,08 b) 0,17 c) 0,40 d) 0,80

4. On considère une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2;7]$.
   La fonction de densité de T est représentée ci-dessous.



   La probabilité conditionnelle $P_{(T\geqslant 3)}(T \leqslant 5)$ est égale à :

   a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 2 (5 points)

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.
Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.
Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.
On note a_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A.
b_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.
On a donc $a_0 = b_0 = 20\,000$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 1{,}04a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 1{,}025b_n + 330.$$

1. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat A.
   a) Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans.
   b) Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1 %.
2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.
   On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 13\,200 + b_n$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 1,025 et calculer son premier terme u_0.
   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $b_n = 33\,200 \times 1{,}025^n - 13\,200$.
   d) Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
A ← 20000
B ← 20000
N ← 0
Tant que A ⩽ B
    A ← 1,04 × A
    B ← 1,025 × B + 330
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   a) Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.
   Recopier et compléter ce tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de A et de B seront arrondies à l'unité.

Valeur de A	20 000	...	....
Valeur de B	20 000	...	....
Valeur de N	0	...	....
Condition $A \leqslant B$	vraie	...	....

   b) Donner la valeur de N calculée par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.
Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.
La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\,\%$.
Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.
Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\,\%$.
La fréquence de poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.
On note p_1 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

1. Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 puis de la proportion p_2.
   On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3}.
2. Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente ?

PARTIE B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

— sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;

— sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

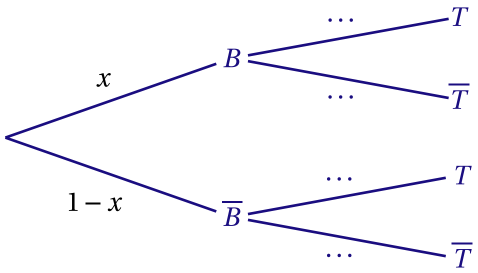
— B l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;

— T l'évènement : « le test du poisson est positif » ;

— $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de B et T.

On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2. a) Démontrer que $p(T) = 0{,}5x + 0{,}1$.
   b) Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif.
   Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?

PARTIE C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.
Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 21$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
Les résultats seront arrondis au millième.

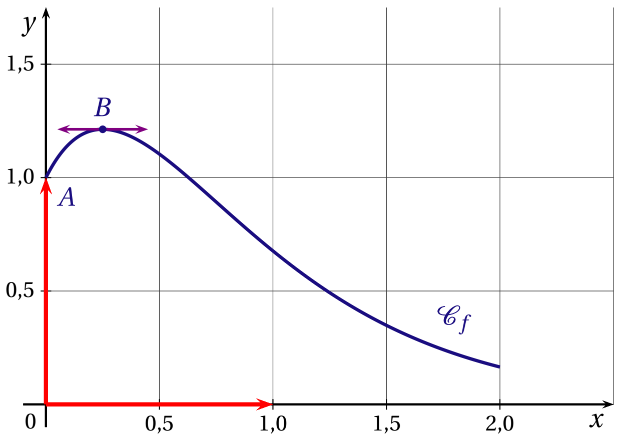
1. Déterminer la probabilité $p(14 < X < 28)$.
2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.

EXERCICE 4 (6 points)

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$.
On suppose que f est deux fois dérivable et on note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :

— le point $A(0;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$;

— la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0,25 est parallèle à l'axe des abscisses.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A

On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant le graphique et les données de l'énoncé, déterminer $f(0)$ et $f'(0,25)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs des réels a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet par ailleurs que $f'(x) = (2-8x)\mathrm{e}^{-2x}$ et $f''(x) = (16x-12)\mathrm{e}^{-2x}$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

1. Étudier le signe de f' sur $[0;2]$ puis en déduire les variations de f sur $[0;2]$.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, sur l'intervalle $[0;2]$, un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $F(x) = (-2x-1,5)\mathrm{e}^{-2x}$.
   a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $[0;2]$.
   b) En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine D du plan situé entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   c) Déterminer la valeur moyenne, arrondie à 10^{-1}, de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

ANTILLES GUYANE 2017

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. A et B sont deux évènements d'une expérience aléatoire. On note $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. On sait que : $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}42$. On peut affirmer que :

   a) $P_A(B) = 0{,}3$ b) $P(A \cup B) = 0{,}58$ c) $P_B(A) = 0{,}28$ d) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}28$

2. Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;5]$.

   a) L'espérance de cette loi X est $\dfrac{2}{5}$ b) $p(X > 2) = \dfrac{3}{5}$ c) $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$ d) $p(X \leqslant 5) = 0$.

3. Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

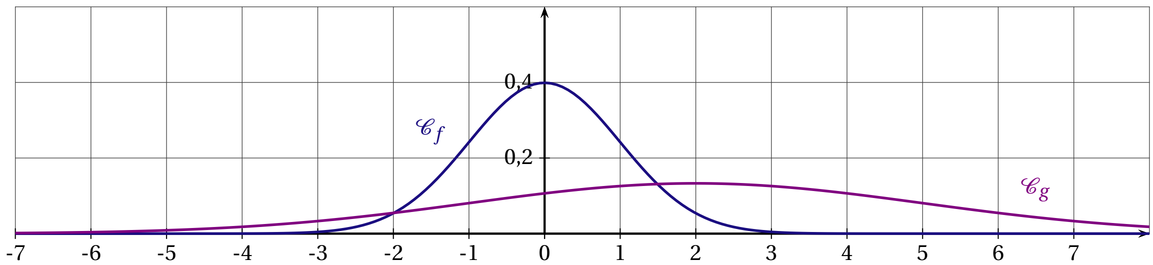
   a) $p(Y \leqslant 100) = 0{,}45$ b) $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0{,}95$ c) $p(Y \leqslant 110) \approx 0{,}85$

4. Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

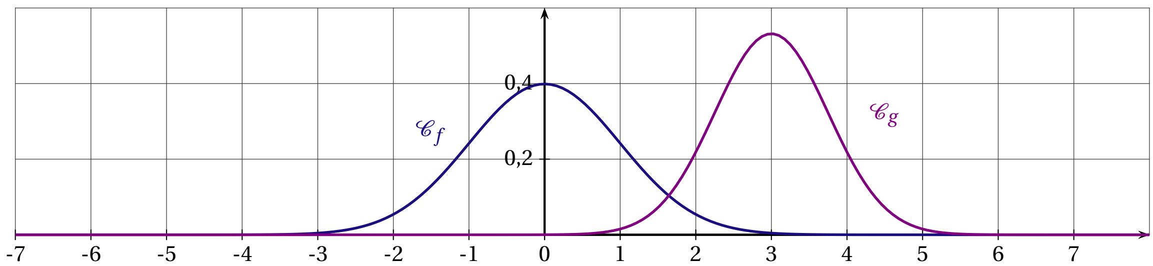
   a) 30 b) 64 c) 100 d) 400

5. La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 2$. La représentation graphique de ces deux fonctions est :

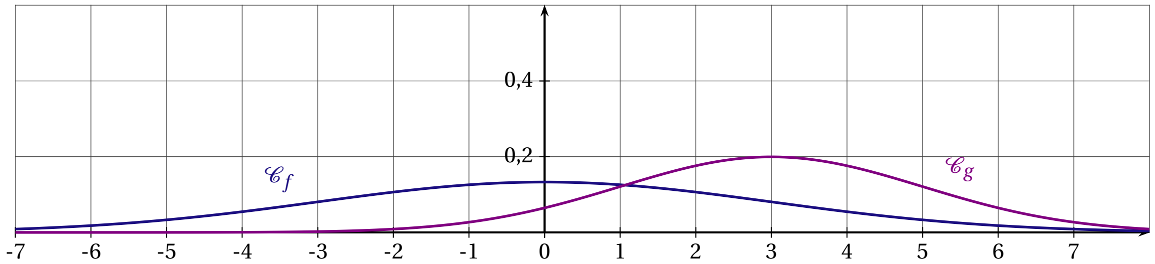
   a)



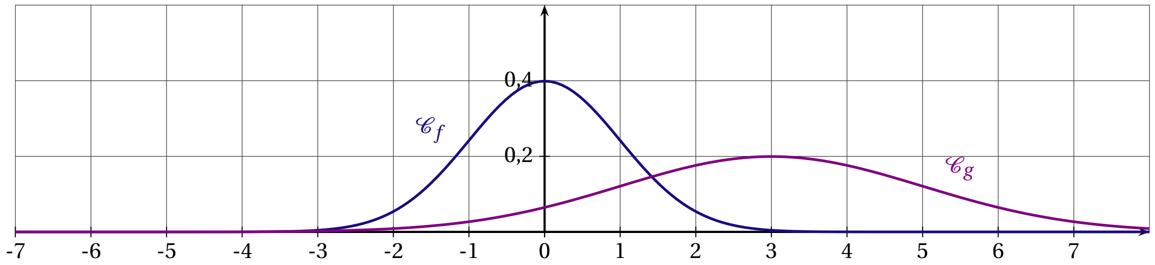
   b)



c)


0,4
0,2
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

d)


0,4
0,2
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

EXERCICE 2 (5 points)

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de 2m^3 d'eau par jour.
Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75m^3.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   Est-elle géométrique ?
3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 2$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$.
   d) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65m^3, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

$n \leftarrow 0$	L1
$u \leftarrow 75$	L2
Tant que $u \ldots$	L3
$u \leftarrow \ldots$	L4
$n \leftarrow n+1$	L5
Fin Tant que	L6

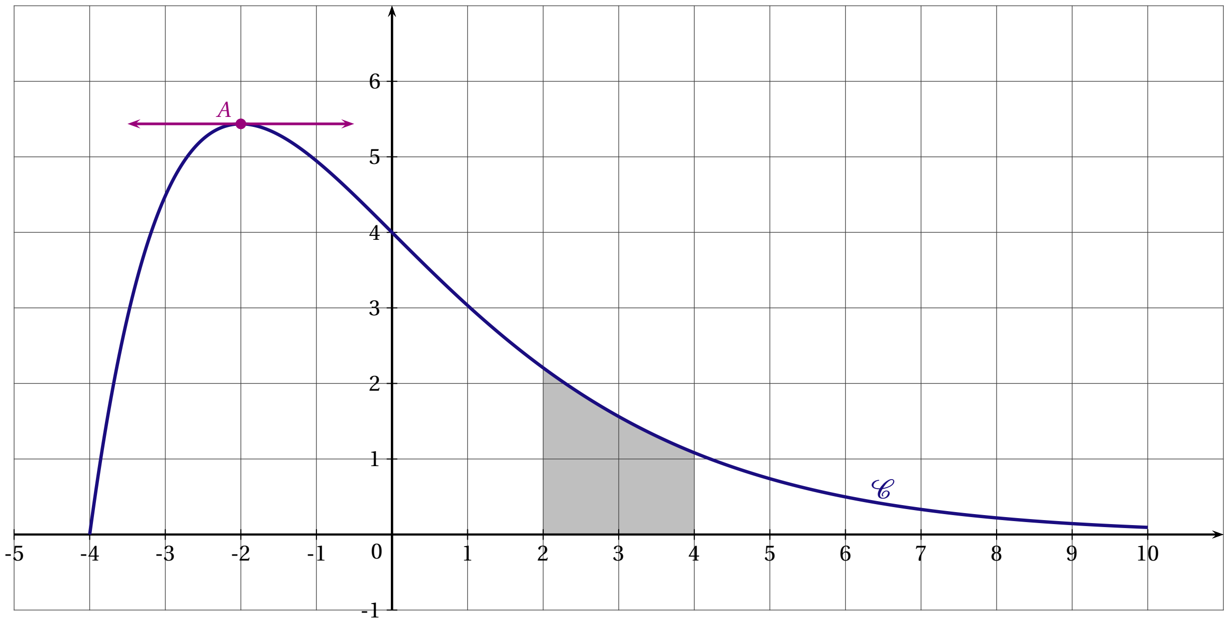
   a) Recopier et compléter les lignes L3 et L4 de cet algorithme.
   b) Quelle est la valeur de n calculée à la fin de cet algorithme ?
   c) Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

EXERCICE 3 (7 points)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4;10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.

Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



PARTIE A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.

PARTIE B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4;10]$ par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. a) Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4;10]$.

   c) Montrer que sur l'intervalle $[1;6]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.
   On notera α cette unique solution.

   d) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

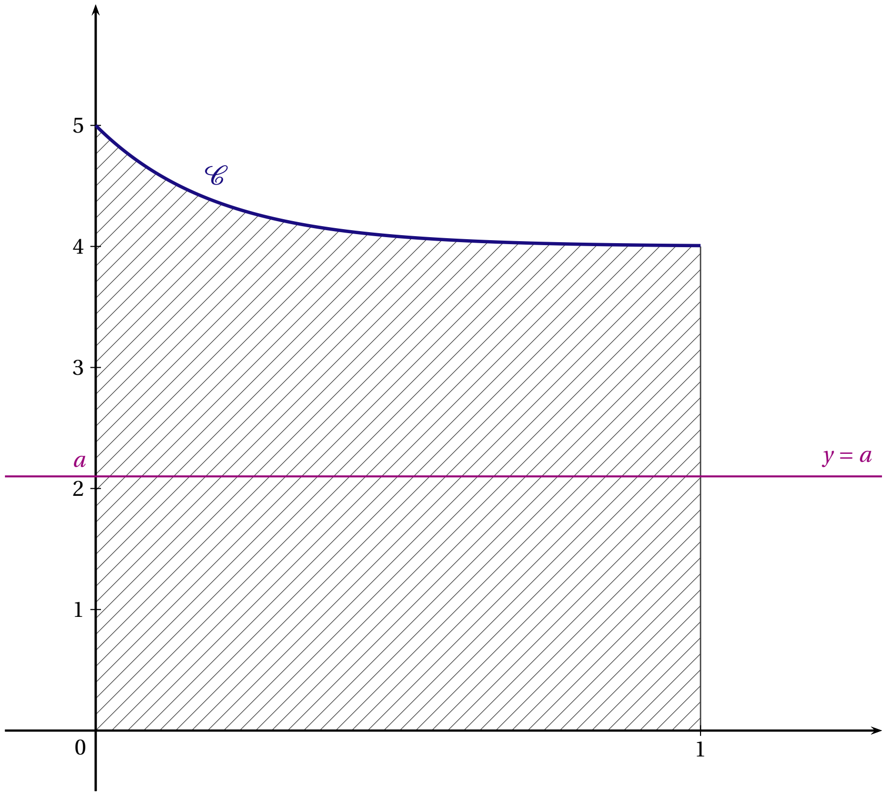
   a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4;10]$.

   b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.
3. a) On considère la fonction F définie par $F(x) = (-2x-12)\mathrm{e}^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4;10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*

   b) Calculer $S = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 (3 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 4 + \mathrm{e}^{-5x}$.
On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



1. Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.
2. Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.

ANTILLES GUYANE SEPTEMBRE 2017

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier l'affirmation choisie.

1. Des élections doivent se dérouler dans un certain pays. Deux candidats se présentent, le candidat A et le candidat B.
   Avant les élections, un organisme de sondage veut estimer la proportion d'électeurs qui voteront pour le candidat A. Pour cela il réalise un sondage auprès d'un échantillon de 1 050 électeurs. Parmi eux, 504 annoncent vouloir voter pour le candidat A et tous les autres pour le candidat B.

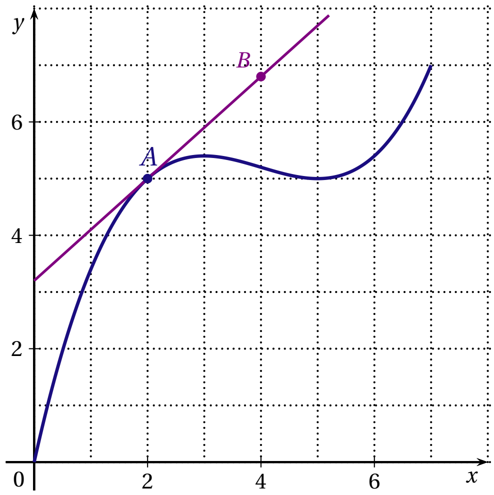
   AFFIRMATION 1 : C'est certain, le candidat A va perdre l'élection.

   AFFIRMATION 2 : Le candidat A aura 48 % des voix le jour de l'élection.

   AFFIRMATION 3 : La probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,48.

   AFFIRMATION 4 : La probabilité que le candidat A obtienne entre 44,91 % et 51,09 % des votes est d'environ 0,95.

2. Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0;7]$. Les points A et B ont pour coordonnées $A(2;5)$ et $B(4;6{,}8)$. La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



   a) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

   AFFIRMATION 1 : $y = -0{,}9x + 3{,}2$.

   AFFIRMATION 2 : $y = 0{,}9x + 3{,}5$.

   AFFIRMATION 3 : $y = 0{,}9x + 3{,}2$.

   AFFIRMATION 4 : $y = 1{,}8x + 3{,}2$.

   b) AFFIRMATION 1 : $f(0) \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(5)$.

   AFFIRMATION 2 : $2 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 7$.

   AFFIRMATION 3 : $18 \leqslant \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 19$.

AFFIRMATION 4 : $25 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 31$.

3. On écrit les deux algorithmes suivants :

algorithme 1	algorithme 2

$V \leftarrow 10$
$S \leftarrow 10$
$N \leftarrow 0$
Tant que $S \leqslant 50$
   $V \leftarrow 1{,}05 \times V$
   $S \leftarrow S + V$
   $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
	$V \leftarrow 10$
	$S \leftarrow 10$
	Pour K allant de 1 à 4
	   $V \leftarrow 1{,}05 \times V$
	   $S \leftarrow S + V$
	Fin Pour

a) AFFIRMATION 1 : La dernière valeur de N calculée par l'algorithme 1 est comprise entre 43 et 44.

AFFIRMATION 2 : La dernière valeur de N calculée par l'algorithme 1 est comprise entre 55 et 56.

AFFIRMATION 3 : La dernière valeur de N calculée par l'algorithme 1 est égale à 3.

AFFIRMATION 4 : La dernière valeur de N calculée par l'algorithme 1 est égale à 4.

b) AFFIRMATION 1 : La dernière valeur de S calculée par l'algorithme 2 est comprise entre 43 et 44.

AFFIRMATION 2 : La dernière valeur de S calculée par l'algorithme 2 est comprise entre 55 et 56.

AFFIRMATION 3 : La dernière valeur de S calculée par l'algorithme 2 est égale à 3.

AFFIRMATION 4 : La dernière valeur de S calculée par l'algorithme 2 est égale à 4.

EXERCICE 2 (5 points)

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1^{er} janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1^{er} janvier de l'année $2017+n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 30$.

1. a) Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2018 ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 \times 0{,}8^n + 150$.
   d) La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il ?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1^{er} janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
   a) Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
   b) Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1^{er} janvier 2017 au 1^{er} janvier 2025.

EXERCICE 3 (5 points)

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes, que :

— 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course;

— 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course;

— 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

PARTIE A

À la fin de la course, on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis. On note :

— V l'évènement « Le coureur a choisi le parcours vert »;

— B l'évènement « Le coureur a choisi le parcours bleu »;

— R l'évènement « Le coureur a choisi le parcours rouge »;

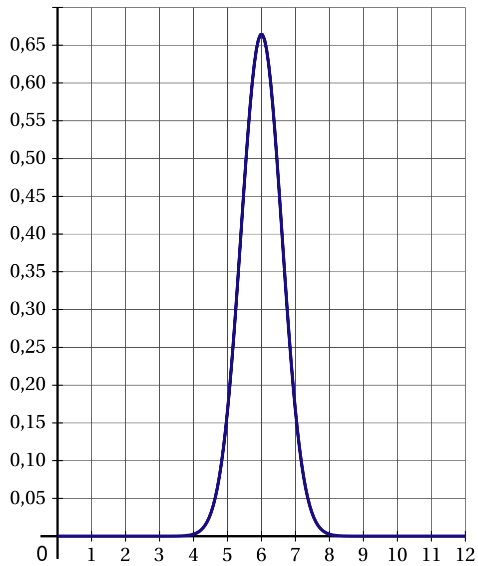
— A l'évènement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $V \cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert?
4. Démontrer que $P(B \cap A) = 0{,}012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

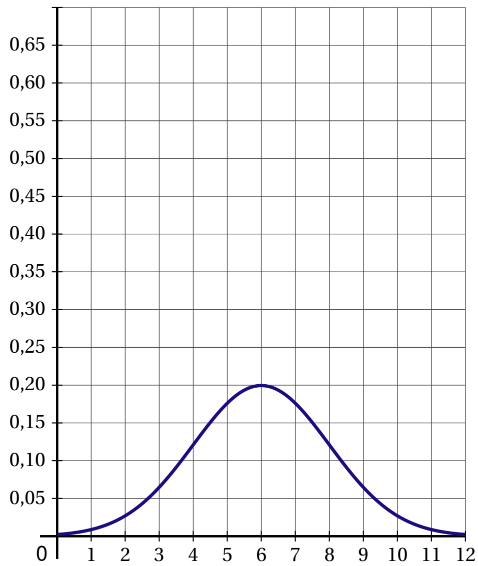
PARTIE B

Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.

   a) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?

   b) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

EXERCICE 4 (5 points)

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;25]$ par $f(x)=10-\dfrac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x):10-\mathrm{e}\hat{}(0.2x+1)/x$
$x\to 10-\dfrac{\exp(0.2x+1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(1-0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(-x^2+10x-50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1;25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;5]$.
   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5;25]$.
   c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.
   d) En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1;25]$.

PARTIE B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.
La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geqslant 1$.
Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
   Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

ASIE 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

AFFIRMATION 1.
On note F la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f qui vérifie $F(1) = 0$.
Pour tout réel x strictement positif, $F(x) = x\ln(x)$.

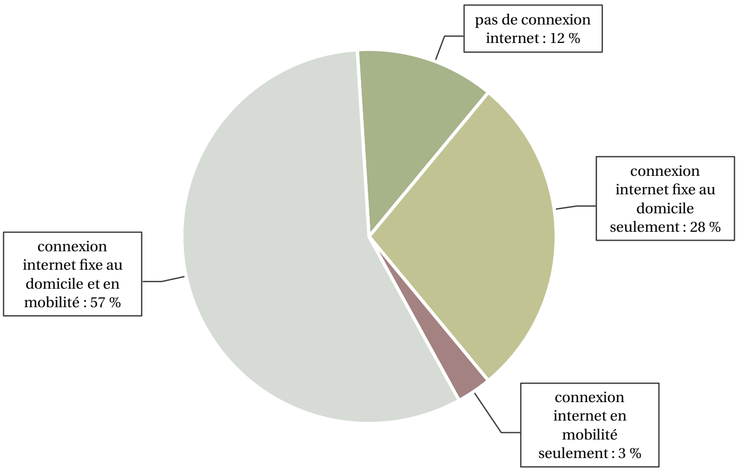
AFFIRMATION 2.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

AFFIRMATION 3.
L'équation $f(x) = 2$ possède exactement une solution dans l'intervalle $[1;10]$.

AFFIRMATION 4.
Il existe au moins un point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la tangente en ce point est située entièrement sous la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Le graphique suivant indique le type de connexion à internet dont disposent les Français âgés de plus de 12 ans en juin 2016.



Source : CREDOC, Enquêtes sur les « Conditions de vie et les aspirations », juin 2016.

On choisit au hasard une personne âgée de plus de 12 ans dans la population française.
On note D l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile ».
On note M l'évènement« la personne dispose d'une connexion internet en mobilité ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

PARTIE A

1. Donner sans justification $p(D \cap M)$, puis justifier que $p(D) = 0{,}85$.
2. Calculer la probabilité que la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile sachant qu'elle dispose d'une connexion internet en mobilité.
3. Calculer la probabilité de l'évènement « la personne dispose d'une connexion internet ».
4. Calculer $p_{\overline{M}}\left(\overline{D}\right)$.

PARTIE B

On interroge un échantillon aléatoire de 100 personnes dans la population française.
Soit X la variable aléatoire qui, à cet échantillon, associe le nombre de personnes ayant une connexion internet fixe au domicile.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer $P(X \leqslant 75)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C

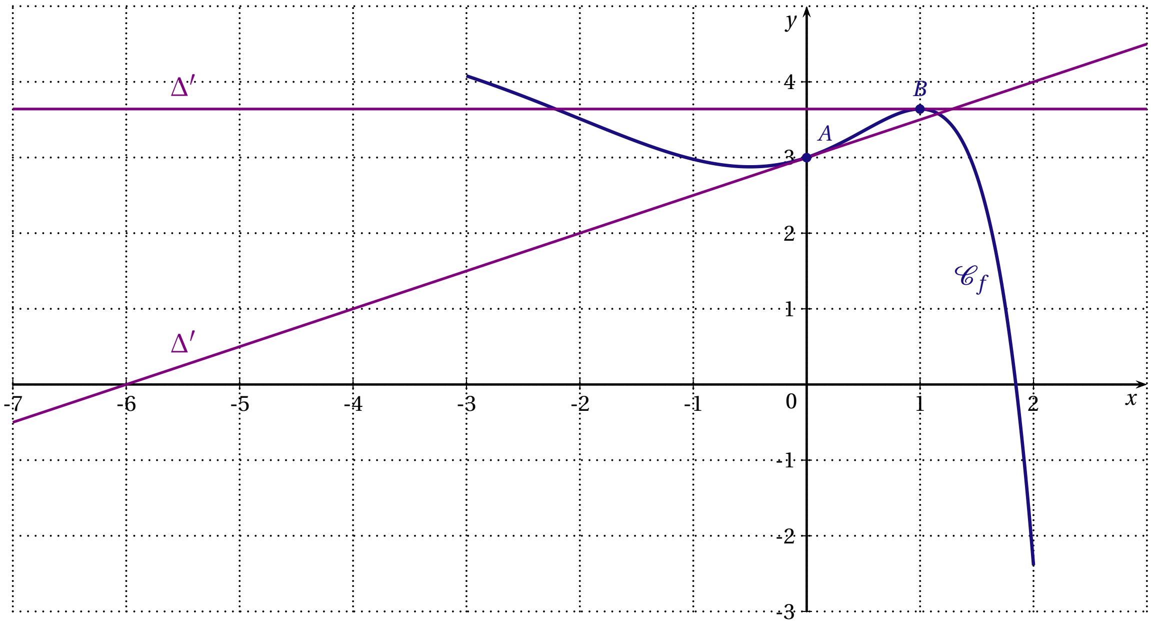
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de Français ayant une connexion internet fixe au domicile pour un échantillon de taille 100.
2. Une enquête sur les usages du numérique, menée en juin 2016 auprès des habitants d'un petit village de montagne, amène au constat suivant : parmi les 100 habitants de plus de 12 ans de ce village, 76 d'entre eux disposent d'une connexion internet fixe au domicile.

   Que peut-on penser de l'équipement en connexion internet fixe au domicile dans ce village ?

EXERCICE 3 (6 points)

PARTIE A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0;3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

— la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3;-0,5]$ et $[1;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5;1]$;

— la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;

— la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.
2. Quel est le signe de $f'(-2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?
5. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de $[-3;2]$, par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.
2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3;2]$, par :

$$f'(x) = \left(ax^2 + (2a+b)x - 2 + b\right)\mathrm{e}^x.$$

   En utilisant les résultats de la partie A, justifier que $b = 2,5$ puis que $a = -1$.

PARTIE C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3;2]$ par $f(x)=\left(-x^2+2{,}5x-2\right)\mathrm{e}^x+5$.

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3;2]$, $f'(x)=\left(-x^2+0{,}5x+0{,}5\right)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3;2]$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1;2]$.

   b) Donner la valeur de α arrondie au centième.

EXERCICE 4 (5 points)

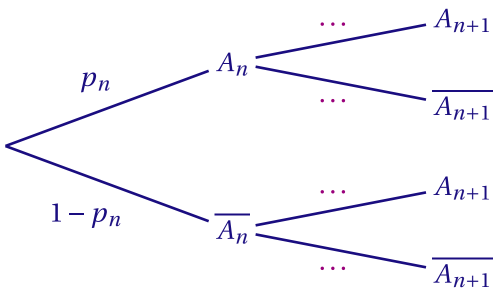
Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle », On admet que

— 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;

— 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'évènement « l'élève a choisi « Approfondissement » la n-ième semaine » et p_n la probabilité de l'évènement A_n. On a alors $p_1 = 0{,}2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}2$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}4$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.
   b) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant où N est un entier :

```
P ← 0,2
Pour I allant de 2 à N
      P ← 0,5P + 0,2
Fin Pour
```

   a) Donner la valeur de la variable P à la fin de l'exécution de cet algorithme lorsque $N = 5$.
   b) Modifier l'algorithme afin qu'il calcule le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9.

CENTRES ÉTRANGERS 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1;9]$, alors :

   a) $p(1 < X < 9) = \dfrac{1}{8}$ b) $p(5 < X < 9) = \dfrac{1}{2}$ c) $p(1 < X < 3) = \dfrac{3}{8}$ d) $p(1 < X < 2) = \dfrac{1}{2}$

2. Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

   a) 200 personnes b) 400 personnes c) 10 000 personnes d) 40 000 personnes

3. La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

   a) 4 b) 1,2 c) $\mathrm{e}^{\frac{\ln(92)}{23}}$ d) $\mathrm{e}^{\frac{\ln(23)}{92}}$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10;10]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	↘	2	↗	4	↘	-6

   On note $I = \displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

   a) $-5 \leqslant I \leqslant 3$ b) $2 \leqslant I \leqslant 4$ c) $16 \leqslant I \leqslant 32$ d) $4 \leqslant I \leqslant 8$

EXERCICE 2 (6 points)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20;20]$ par $f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

1. a) Montrer que $f'(x) = (-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20;20]$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-20;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. a) Montrer que, sur l'intervalle $[-20;20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10x+200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
2	Dériver $(2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ $(-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

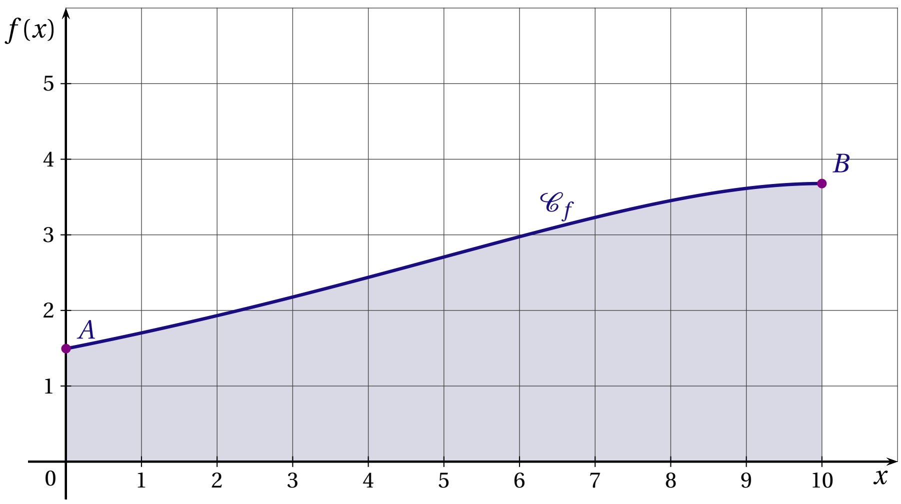
Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

a) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

PARTIE B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle $[0;10]$. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et $f(x)$ représente l'altitude, exprimée en km.

On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M.

Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\dfrac{15}{100} = 0,15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.
2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

   — La piste sera classée noire, c'est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.

   — La piste sera classée rouge, c'est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).

   — Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est-à-dire facile.

   Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points)

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018.

   On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2017 + n$.

   La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 4$.

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.

   Recopier et compléter les lignes L1, L3 et L4 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

   On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.

L1	$U \leftarrow \dots$
L2	$N \leftarrow 0$
L3	Tant que ....
L4	$\quad U \leftarrow \dots$
L5	$\quad N \leftarrow N+1$
L6	Fin tant que

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.

   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   c) Justifier que $u_n = 80 \times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $80 \times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60$.

   b) En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2017.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures.

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

PARTIE A

Une étude statistique met en évidence que :

— 40 % des embarcations louées sont des pédalos;

— 35 % des embarcations louées sont des kayaks;

— les autres embarcations louées sont des bateaux électriques;

— 60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure;

— 70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure;

— la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les évènements suivants :

— A : « l'embarcation louée est un pédalo »;

— B : « l'embarcation louée est un kayak »;

— C :« l'embarcation louée est un bateau électrique »;

— D :« l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure »;

— E : « l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $p(A \cap E)$.
3. Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.
4. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique? Arrondir le résultat au centième.
5. La base nautique pratique les tarifs suivants :

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16€
Bateau électrique	35 €	60€

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.

PARTIE B

Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième

Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $p(490 < X < 520)$.
2. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés.
   Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.
3. Déterminer l'entier a tel que $p(X < a) \approx 0{,}01$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2017

EXERCICE 1 (6 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_l avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;12]$.

   a) Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge?

   b) Quel est le temps moyen d'attente à une caisse?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.

   Le temps d'attente T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.

   Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.

   — Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.

   — La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0{,}1$.

   — Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X? Préciser ses paramètres.

   b) Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

   « Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »

   Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

   Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

EXERCICE 2 (5 points)

Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

— 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;

— 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

PARTIE A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}75u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

   b) Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.
3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

PARTIE B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.
Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la quatrième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

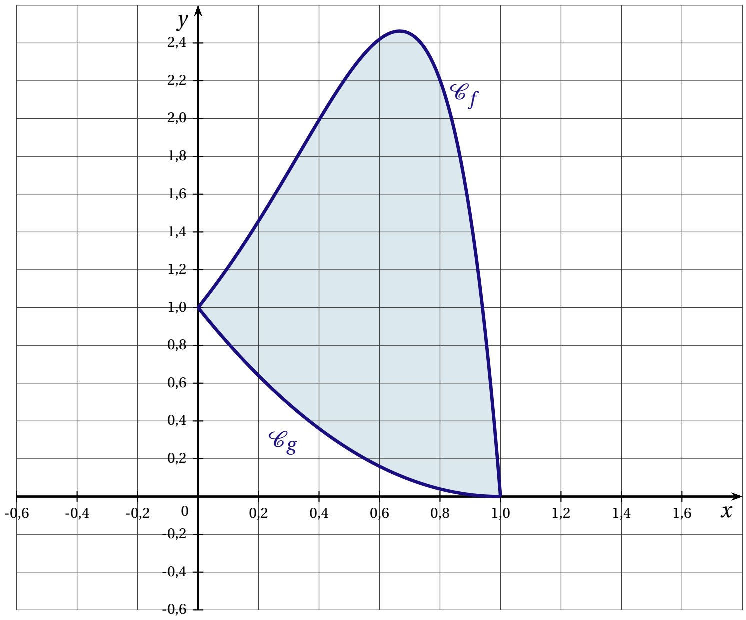
1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il calcule le montant total des cotisations de l'année 2017.

```
S ← 0
U ← 900
Pour N allant de 1 à 12
    S ← ...
    U ← 0,75U + 12
Fin Pour
S ← ...
```

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

EXERCICE 3 (6 points)

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



PARTIE A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

dériver $(1-x)*\exp(3x)$
: $-3x*\exp(3*x)+2*\exp(3*x)$

factoriser $-3x*\exp(3*x)+2*\exp(3*x)$
: $\exp(3x)*(-3x+2)$

factoriser(dériver($\exp(3x)(-3x+2)$))
: $3*\exp(3*x)(1-3x)$

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur $[0;1]$ le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur $[0;1]$ en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

PARTIE B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. On admet que : pour tout x dans $[0;1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\left(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x\right)$.

   a) Justifier que pour tout x dans $[0;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$.

   b) En déduire que pour tout x dans $[0;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.

c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0;1]$.

3. a) Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

EXERCICE 4 (3 points)

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2 017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X=c)=\frac{\ln(c+1)-\ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X=1)$?
2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

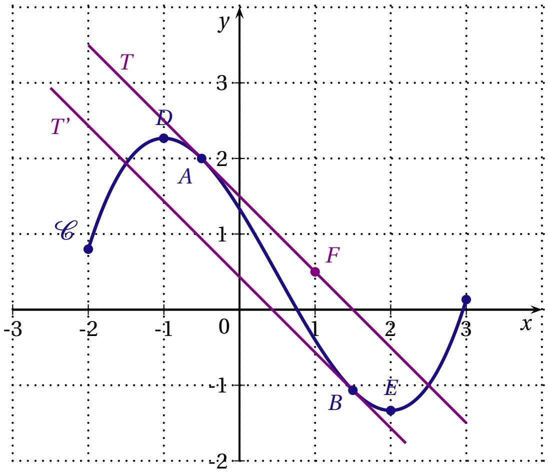
   a) *Premier cas.*
   Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).
   À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.
   Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

   b) *Deuxième cas.*
   Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.
   La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2017

EXERCICE 1 (4 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;3]$. On note f' la fonction dérivée de cette fonction sur l'intervalle $[-2;3]$.



On dispose des renseignements suivants :

— T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(-0{,}5;2)$, elle passe par le point $F(1;0{,}5)$.

— T' est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

— Les droites T et T' sont parallèles.

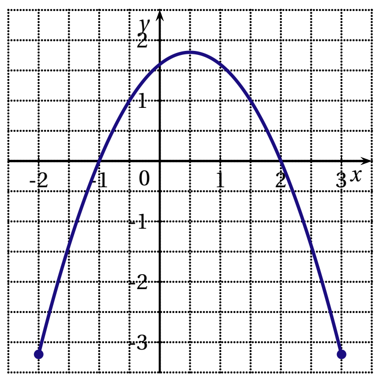
— Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points D d'abscisse -1 et E d'abscisse 2 sont parallèles à l'axe des abscisses.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

AFFIRMATION 1
Les nombres $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ sont tous deux égaux à -1.

AFFIRMATION 2

La courbe ci-contre représente la fonction f' sur $[-2;3]$.



AFFIRMATION 3
La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2;3]$.

AFFIRMATION 4
Sur $[-2;0]$, toute primitive de f est croissante.

EXERCICE 2 (6 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

PARTIE A

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.
Trois types de visites sont proposés :

— La visite individuelle sans location d'audioguide.

— La visite individuelle avec location d'audioguide.

— La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide. Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.
Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

— 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;

— parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide ;

— 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015. On considère les évènements suivants :

— E : « le billet a été acheté en ligne » ;

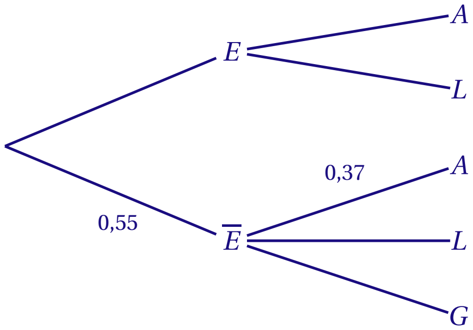
— A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide » ;

— L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide » ;

— G : « le billet correspond à une visite de groupe ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à 0,135.
3. Montrer que $p(A) = 0{,}3385$.
4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. Quelle est la probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée ?
   On arrondira le résultat au millième.

PARTIE B

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

1. Déterminer $p(90 \leqslant D \leqslant 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite.

   Quelle sera alors sa décision ?

PARTIE C

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère.
Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.
Que peut en conclure le directeur de ce musée ? Argumenter.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice, on étudie le tirage moyen journalier des quotidiens français d'information générale et politique, c'est-à-dire le nombre moyen d'exemplaires imprimés par jour.
Le tableau suivant donne, entre 2007 et 2014, pour chaque année ce tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Tirage moyen journalier en milliers d'exemplaires	10 982	10 596	10 274	10 197	10 182	9 793	9 321	8 854

Source : D.G.M.I.C (Direction générale des médias et des industries culturelles)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si nécessaire au centième.

1. Calculer le taux d'évolution du tirage moyen journalier entre 2007 et 2008.

Pour tout entier naturel n, on note V_n le tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires, de l'année $2007 + n$.
On modélise la situation en posant : $V_0 = 10982$ et, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}96V_n + 100$.

2. Calculer V_1 puis V_2.
3. Soit W_n la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n - 2500$.
   a) Montrer que W_n est une suite géométrique de raison 0,96 puis déterminer son premier terme.
   b) Déterminer l'expression de W_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = 8482 \times 0{,}96^n + 2500$.
4. a) Déterminer le tirage moyen journalier prévu selon ce modèle pour l'année 2017.
   b) Déterminer la limite de la suite W_n. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Proposer un algorithme affichant le tirage moyen journalier, à partir de 2007 jusqu'à l'année $(2007 + n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.

EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 euros.
On note x le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte.
Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel x de l'intervalle $[3;10]$, si le prix de vente d'une enceinte est x centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par $f(x) = \mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
Ainsi, $f(x)$ est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de x centaines d'euros. Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par $f(4)$.

1. Donner une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros.

On appelle marge brute la différence entre le montant obtenu par la vente des enceintes et leur coût de production.

2. Quelle est la marge brute de cette entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte ?

On note $g(x)$ la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour une prix de vente de x centaines d'euros par enceinte.

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[3;10]$, $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

factoriser(dériver$\left[(x-3) * \exp(-0,25x+5)\right]$)	
	$-\dfrac{x-7}{4}\mathrm{e}^{-0,25x+5}$

a) En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel, étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[3;10]$.

b) Pour quel prix de vente unitaire l'entreprise réalisera-t-elle la marge brute maximale ? Donner alors une valeur approchée de cette marge brute à l'euro près.

5. Soit G la fonction telle que $G(x) = (-4x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ pour tout réel x de $[3;10]$.

a) Montrer que G est une primitive de la fonction g.

b) On pose $I = \displaystyle\int_3^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I.

LIBAN 2017

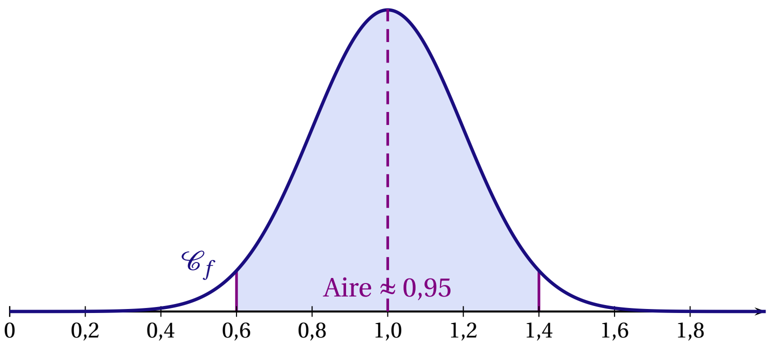
EXERCICE 1 (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2}{x}$.
   La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est :

   a) 2 b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ c) $\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$ d) $\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}$

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X.



   a) L'espérance de X est 0,4.
   b) L'espérance de X est 0,95.
   c) L'écart-type de X est environ 0,4.
   d) L'écart-type de X est environ 0,2.

3. À l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. *L'hypermarché* ***affirme*** *que 15 % des tickets à gratter sont gagnants*, c'est-à-dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.
   Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.
   On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

   a) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}051;0{,}249]$, les bornes étant arrondies au millième.
   b) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}100;0{,}200]$, les bornes étant arrondies au millième.
   c) La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.
   d) Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

EXERCICE 2 (6 points)

Les deux parties sont indépendantes

PARTIE A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2.
En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
   Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.
2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

PARTIE B : Étude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}98\times u_n+0{,}2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-10$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=31\times(0{,}98)^n+10$.
4. a) Calculer la limite de la suite (u_n).
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.

   a) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme :

```
1  U ← 41
2  n ← 0
3  Tant que ...
4     U ← ...
5     n ← n + 1
6  Fin Tant que
```

   b) La valeur de n calculée à la fin de l'algorithme est 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Notations :
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.
Si A et B sont deux évènements, on note $p_B(A)$ la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé.

Dans cet exercice, on arrondira les résultats au millième

Une agence Pôle Emploi étudie l'ensemble des demandeurs d'emploi selon deux critères, le sexe et l'expérience professionnelle.
Cette étude montre que :

— 52 % des demandeurs d'emploi sont des femmes et 48 % sont des hommes ;

— 18 % des demandeurs d'emploi sont sans expérience et les autres sont avec expérience ;

— parmi les hommes qui sont demandeurs d'emploi, on sait que 17,5 % sont sans expérience.

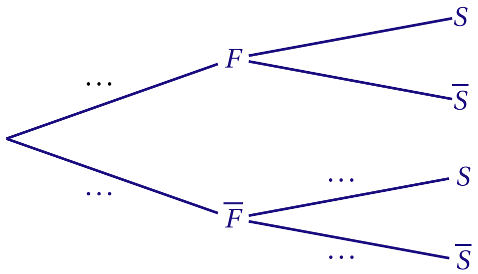
PARTIE A :

On prélève au hasard la fiche d'un demandeur d'emploi de cette agence. On note :

— S : l'évènement « le demandeur d'emploi est sans expérience » ;

— F : l'évènement « le demandeur d'emploi est une femme ».

1. Préciser $p(S)$ et $p_{\overline{F}}(S)$.
2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les pointillés par les probabilités associées.



3. Démontrer que $p\left(\overline{F} \cap S\right) = 0{,}084$. Interpréter le résultat.
4. La fiche prélevée est celle d'un demandeur d'emploi sans expérience. Calculer la probabilité pour que ce soit un homme.
5. Sachant que la fiche prélevée est celle d'une femme, calculer la probabilité que ce soit la fiche d'un demandeur d'emploi sans expérience.

PARTIE B

La responsable de l'agence décide de faire le point avec cinq demandeurs d'emploi qui sont suivis dans son agence. Pour cela, elle prélève cinq fiches au hasard. On admet que le nombre de demandeurs d'emplois dans son agence est suffisamment grand pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.
En justifiant la démarche, calculer la probabilité que, parmi les cinq fiches tirées au hasard, il y ait au moins une fiche de demandeur d'emploi sans expérience.

EXERCICE 4 (6 points)

Les deux parties sont liées

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x) = \dfrac{1}{0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}}$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0;10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0;10]$, on a $f'(x) = \dfrac{100\mathrm{e}^{-x}}{\left(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

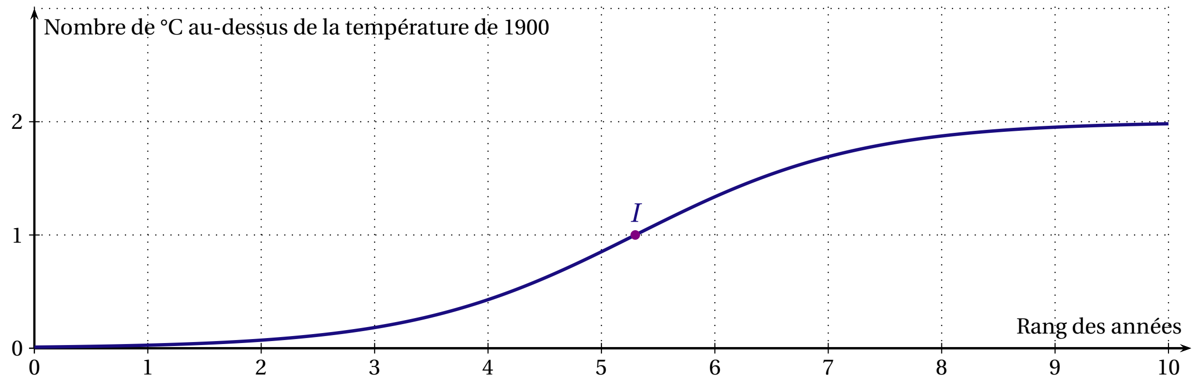
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0;10]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$: $f''(x) = \dfrac{100\mathrm{e}^{-x}\left(100\mathrm{e}^{-x} - 0,5\right)}{\left(0,5 + 100\mathrm{e}^{-x}\right)^3}$.

2. a) Montrer que, dans l'intervalle $[0;10]$, l'inéquation $100\mathrm{e}^{-x} - 0,5 \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leqslant -\ln(0,005)$.
   b) En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0;10]$.
3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
   Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

PARTIE B

Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.
Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.
Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1. a) Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.
   b) En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.
2. a) En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Arrondir le résultat à l'unité.

b) Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3. On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

   a) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

   b) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

4. Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5°C la température de l'année 1900.

   Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

NOUVELLE CALÉDONIE 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

AFFIRMATION 1.

Pour tout réel a strictement positif, $\ln\left(a^3\right) - \ln\left(a^2\right) = \ln\left(a^{25}\right) - \ln\left(a^{24}\right)$.

AFFIRMATION 2.

Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0;100]$, alors $P(X < 75) = P(X > 25)$.

AFFIRMATION 3.

On a prélevé un échantillon aléatoire de 400 pièces dans une production et observé 6 pièces défectueuses. La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion de pièces défectueuses dans la production au niveau de confiance de 95 % est égale à 0,08.

AFFIRMATION 4.

L'équation $x\ln(x) = 2\ln(x)$ admet exactement deux solutions : 2 et 1 sur $]0;+\infty[$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième

Une agence de voyage propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.
À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.
Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également pour le retour 9 fois sur 10.
Lorsque le train a été choisi à l'aller, le bateau est préféré pour le retour dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

— A : « le client choisit de faire l'aller en bateau » ;

— R : « le client choisit de faire le retour en bateau ».

On rappelle que si E est un évènement, $p(E)$ désigne la probabilité de l'évènement E et on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2. On choisit au hasard un client de l'agence.
   a) Calculer la probabilité que le client fasse l'aller-retour en bateau.
   b) Montrer que la probabilité que le client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,31.
3. On choisit au hasard 20 clients de cette agence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport.
   On admet que le nombre de clients est assez grand pour que l'on puisse considérer que X suit une loi binomiale.
   a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   b) Déterminer la probabilité qu'exactement 12 clients utilisent les deux moyens de transport différents.
   c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients qui utilisent les deux moyens de transport différents.
4. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.
   On note Y la variable aléatoire qui associe, à un client pris au hasard, le coût en euro de son trajet aller-retour.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 (6 points)

Début 2013, la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

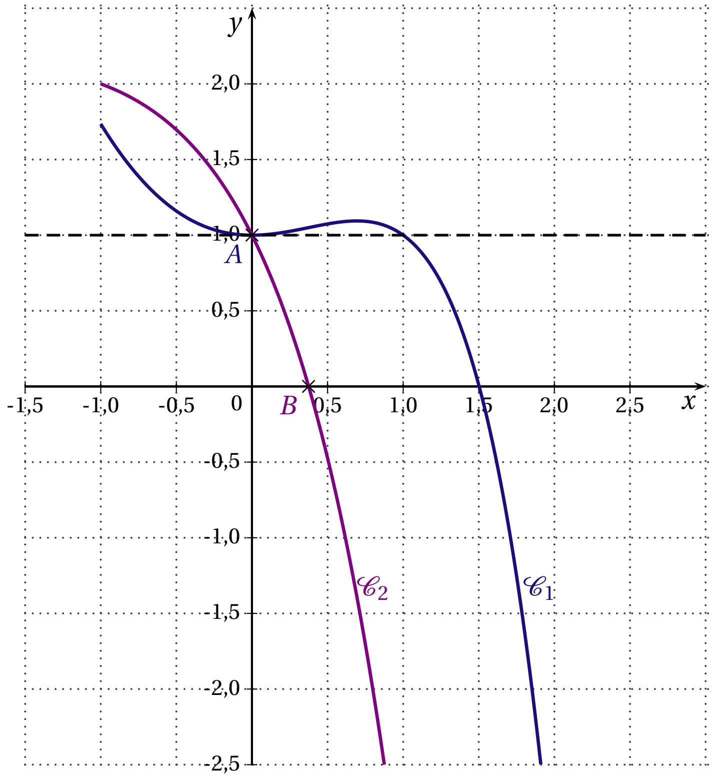
1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.

On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre au début de l'année $(2013+n)$ avec $u_0 = 4\,000$.

2. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}996\,25 u_n + 10{,}2$.
   b) Montrer que la superficie totale des forêts sur la Terre, au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1 = 3\,995{,}2$.
3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $d_n = u_n - 2\,720$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 0{,}996\,25 \times d_n$.
   b) Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0.
   c) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n, en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. a) Proposer un algorithme affichant la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la Terre, pour chaque année de 2013 à 2029.
   b) À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la Terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

EXERCICE 4 (5 points)

La courbe $(\mathscr{C}_1)$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-1;2]$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.
La courbe $(\mathscr{C}_2)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.
Le point $A(0;1)$ est situé sur la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
Le point B est le point d'intersection de $(\mathscr{C}_2)$ avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse de B est 0,37.
La tangente à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A est horizontale.



1. Par lecture graphique,
   a) Donner la valeur de $f(0)$.
   b) Donner la valeur de $f'(0)$.
   c) Étudier la convexité de f sur $[-1;2]$. Justifier la réponse.
2. On admet désormais que la fonction f est définie pour tout réel x dans $[-1;2]$ par $f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x+x^2$.
   Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) :=(1-x)*\exp(x)+x^2$ $\to (1-x)\mathrm{e}^x+x^2$
2	factoriser$[$dériver$[f(x)]]$ $\to x(2-\mathrm{e}^x)$
3	primitive$[f(x)]$ $\to \dfrac{1}{3}x^3+(-x+2)\mathrm{e}^x$

   a) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-1;2]$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[-1;2]$.

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point d'abscisse 1.

5. a) Justifier la ligne 3 du tableau de calcul formel.

   b) On admet que la fonction f est positive sur $[-1;1]$. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.

NOUVELLE CALÉDONIE FÉVRIER 2018

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie sans justifier le choix effectué.

1. Un laboratoire désire tester l'efficacité d'un médicament Pour cela, il constitue un échantillon aléatoire de 500 malades auxquels on prescrit ce médicament. On constate que 325 sont guéris au bout d'un mois.
   Un intervalle de confiance au niveau 0,95 de la proportion de patients guéris au bout d'un mois est :

   a) $[0{,}305 ; 0{,}395]$ b) $[0{,}32 ; 0{,}33]$ c) $[0{,}605 ; 0{,}695]$ d) $[0{,}648 ; 0{,}652]$

2. Dans le laboratoire précédent, le nombre minimal de patients à interroger pour obtenir un intervalle de confiance de longueur inférieure ou égale à 0,01 est :

   a) 200 b) 40 000 c) 4 000 d) 1 000

3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur cet intervalle.
   Si on note f' sa fonction dérivée, alors pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

   a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x^2}$ c) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

4. Deux collègues communiquent régulièrement par vidéoconférence. On suppose que la durée d'une communication entre ces deux personnes, exprimée en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 120]$.
   Sachant que la communication dure depuis 30 minutes, la probabilité que la durée de la communication ne dépasse pas 90 minutes est égale à :

   a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 2 (5 points)

Cette étude porte sur l'utilisation principale des véhicules du parc automobile français.
Les réponses seront arrondies au dix-millième.

PARTIE A

Les véhicules de la région parisienne représentent 16 % du parc automobile français en 2015.
22 % des véhicules de la région parisienne sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 34 % pour les loisirs.
En province, 49 % des véhicules sont utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail, 31 % pour les loisirs.
On choisit un véhicule au hasard dans le parc automobile français.
On note :

- R l'évènement : « le véhicule provient de la région parisienne »,
- $\overline{R}$ l'évènement : « le véhicule provient de la province »,
- T l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail »,
- L l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour les loisirs »,
- F l'évènement : « le véhicule est utilisé principalement pour d'autres fonctions que le travail ou les loisirs ».

On rappelle que, si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Montrer que la probabilité qu'un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail est égale à 0,446 8.
3. Madame Dupont et Monsieur Durand ont une conversation sur l'utilisation de leur véhicule. Madame Dupont dit utiliser principalement sa voiture pour les loisirs, Monsieur Durand principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

   Qui de Madame Dupont ou de Monsieur Durand a la plus grande probabilité d'habiter la région parisienne ?

PARTIE B

On sélectionne un échantillon aléatoire de 10 véhicules du parc automobile français. On note X la variable aléatoire qui compte, dans cet échantillon, le nombre de véhicules utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

1. Préciser la loi de probabilité de X ainsi que ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux véhicules soient utilisés principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins un véhicule soit utilisé principalement pour le trajet entre le domicile et le travail.

PARTIE C

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile de la région parisienne. On considère qu'en 2018 le nombre de milliers de véhicules nouvellement enregistrés en région parisienne suivra la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 4.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de milliers de véhicules nouvellement enregistrés en 2018 en région parisienne.

1. Quelle est la probabilité que le nombre de véhicules nouvellement enregistrés en région parisienne en 2018 soit compris entre 42 000 et 58 000 ?
2. Pour ne pas avoir de délais d'enregistrement trop longs, le nombre de dossiers doit être inférieur à 55 000. Quelle est la probabilité que les délais d'enregistrement ne soient pas trop longs en 2018 ?

EXERCICE 3 (5 points)

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.
Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620 214	610 156	575 038	578 282	555 239
Taux d'évolution annuel		−1,62 %	−5,76 %	0,56 %	−3,98 %
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		−1,62 %	−7,28 %	−6,76 %	−10,48 %

PARTIE A

1. Retrouver par le calcul, le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013.
2. Le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015 est environ de −2,73 %. Justifier.

PARTIE B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais que l'on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.
En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.
On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année $(2011+n)$.
On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année $(2011+n)$.
On fixe donc $u_0 = 620$.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2012 suivant ce modèle.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 52$.
3. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 520$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 100 \times 0{,}9^n + 520$.
4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.
   a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le quotidien sera en difficulté financière.

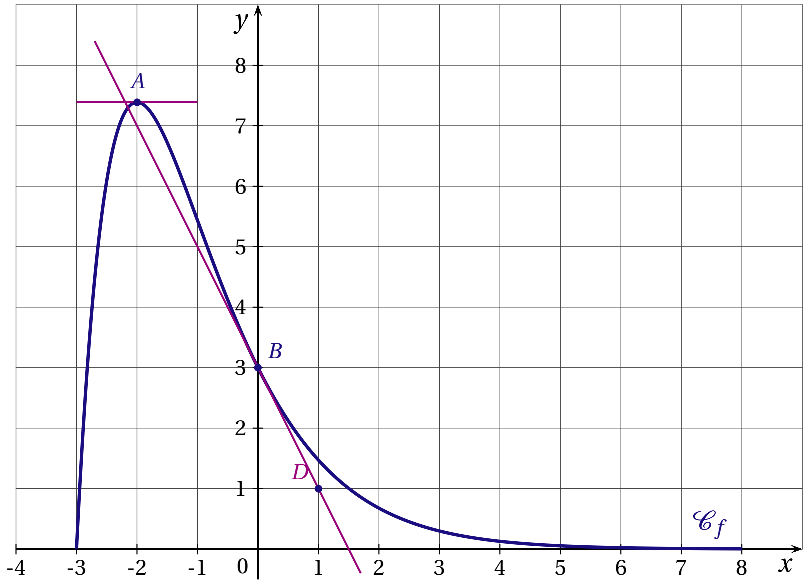
```
U ← 620
N ← 0
Tant que .......................
   U ← ...
   N ← ...
Fin Tant que
```

   b) Résoudre l'inéquation $u_n \leqslant 540$.
   c) Déterminer à partir de quelle année le quotidien sera en difficulté financière. Indiquer la démarche.

EXERCICE 4 (6 points)

PARTIE A

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;8]$. On note f' sa dérivée.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2. B est le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(0;3)$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est horizontale.
La droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 et elle passe par le point $D(1;1)$.



À l'aide du graphique :

1. Donner la valeur de $f'(-2)$.
2. Interpréter géométriquement $f'(0)$ et donner sa valeur.
3. La fonction f est-elle convexe sur $[-2;2]$?

PARTIE B

On admet désormais que la fonction f de la partie A est définie sur l'intervalle $[-3;8]$ par $f(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-x}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	dériver $(x+3)*\exp(-x)$
	$\exp(-x)+(x+3)*(-\exp(-x))$
2	factoriser (dériver $(x+3)*\exp(-x)$)
	$(-x-2)*\exp(-x)$

1. Étudier le signe de la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $[-3;-2]$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. a) Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[-3;8]$ par $F(x) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur le même intervalle.
   b) Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

POLYNÉSIE 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

   a) 1,74 b) $\frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$ c) $-\frac{\ln 3}{\ln 5}$ d) 0,6

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
   La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

   a) $4\mathrm{e}^4 - 4\mathrm{e}^{-4}$ b) $4\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{-4}\right)$ c) 0 d) 1

3. f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = (2x+3)\ln x$.
   On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a :

   a) $f'(x) = \frac{2x+3}{x}$ b) $f'(x) = \frac{2}{x}$
   c) $f'(x) = 2\ln x + \frac{3}{x} + 2$ d) $f'(x) = 2\ln x + \frac{3}{x}$

4. Une grandeur a été augmentée de 5% la première année, puis de 7% la deuxième année.
   Sur ces deux années, le pourcentage global d'augmentation est égal à :

   a) 12 % b) 35 % c) 0,35 % d) 12,35 %

EXERCICE 2 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

D'après le « bilan des examens du permis de conduire » pour l'année 2014 publiée par le Ministère de l'Intérieur en novembre 2015, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve pratique du permis de conduire avaient suivi la filière de l'apprentissage anticipé de la conduite (AAC). Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière AAC, le taux de réussite à l'examen était seulement de 56,6 %.
On choisit au hasard l'un des candidats à l'épreuve pratique du permis de conduire en 2014.
On considère les évènements suivants :

— A « le candidat a suivi la filière AAC » ;

— R « le candidat a été reçu à l'examen ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. a) Donner les probabilités $P(A)$, $P_A(R)$ et $P_{\overline{A}}(R)$.
   b) Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité $P(A \cap R)$.
   b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
3. Justifier que $P(R) = 0{,}6028$.
4. Sachant que le candidat a été reçu à l'examen, calculer la probabilité qu'il ait suivi la filière AAC.
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près de cette probabilité.

PARTIE B

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.
Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.
2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école ?
   Justifier votre réponse.

PARTIE C

Selon une enquête menée en 2013 par l'association « Prévention Routière », le coût moyen d'obtention du permis de conduire atteignait environ 1 500 €. On décide de modéliser le coût d'obtention du permis de conduire par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 1500$ et d'écart-type $\sigma = 410$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité que le coût du permis de conduire soit compris entre 1 090 € et 1 910 €.
2. Déterminer $P(X \leqslant 1155)$.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
3. a) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel a arrondi à l'unité, vérifiant $P(X \geqslant a) = 0{,}2$.
   b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 3 (5 points)

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}996 \times u_n + 7{,}2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015 + n$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

```
N ← 2015
U ← 4000
.................................
    .............................
    .............................
.................................
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1800$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2200 \times 0{,}996^n + 1800$.
   c) Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître ? Justifier la réponse.
4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 millions d'arbres en 10 ans.

   En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.

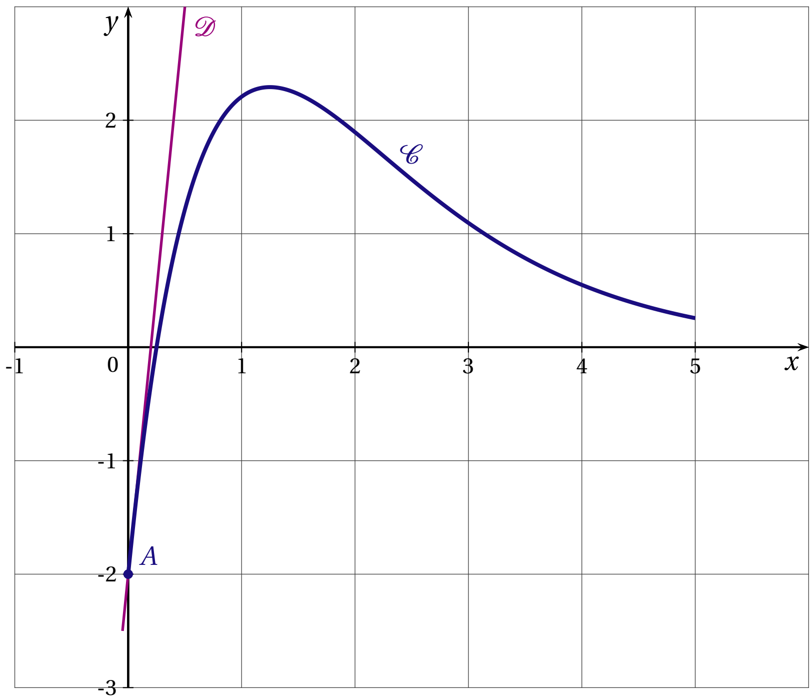
   On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.

   L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ?

   Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax-2)\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x-2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax+a+2)\mathrm{e}^{-x}$$

   b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

   c) Donner l'expression de $f'(x)$.
3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$. On pourra faire un tableau.

   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

   c) Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8*x+10)*\exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x+10)\,\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $\left[g(x),x\right]$ $\rightarrow (8*x-18)*\exp(-x)$
3	Résoudre $\left[(8*x-18)*\exp(-x)>0,x\right]$ $\rightarrow x>9/4$

   En utilisant ces résultats :

   a) Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

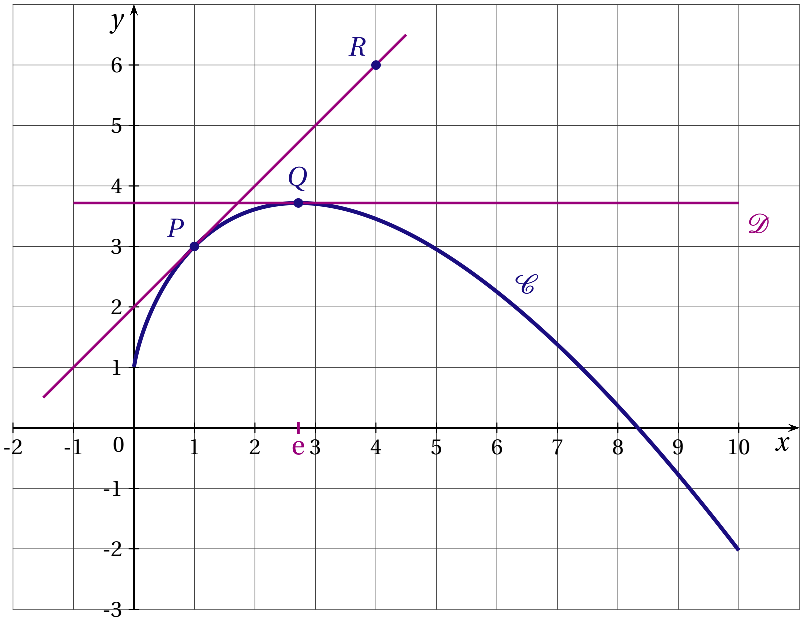
   a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

   b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2017

EXERCICE 1 (5 points)

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;10]$.



On considère les points $P(1;3)$ et $R(4;6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\text{e} \approx 2{,}718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

   a) $y = 2x + 1$ b) $y = x + 2$ c) $y = 2x + 2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
   a) f est convexe sur l'intervalle $]0;10]$;
   b) f est concave sur l'intervalle $]0;10]$;
   c) f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0;10]$.

   Laquelle ?
4. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$ par deux entiers consécutifs.

PARTIE B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0;10]$.
   c) Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0;10]$.
3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;10]$.

   Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x+1} + x - 1$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne en annexe, à remettre avec la copie, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$ dans un repère d'origine O.

PARTIE A

1. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ on a : $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 1$.
2. a) Montrer que sur l'intervalle $[1; 10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution le nombre $\alpha = 2 + 2\ln 2$.
   b) Placer sur le graphique fourni en annexe le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse α.
3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[1; 10]$ de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est $[2 + 2\ln 2; 10]$.
   En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.

PARTIE B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable.
Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.
La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi, si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors $f(x)$ représente le coût, en euros, de production d'une coque.

1. Calculer, au centime près, le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.
2. a) Montrer que produire 339 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire de production.
   b) En déduire le coût minimal de production d'une coque, en euros, au centime près.

PARTIE C

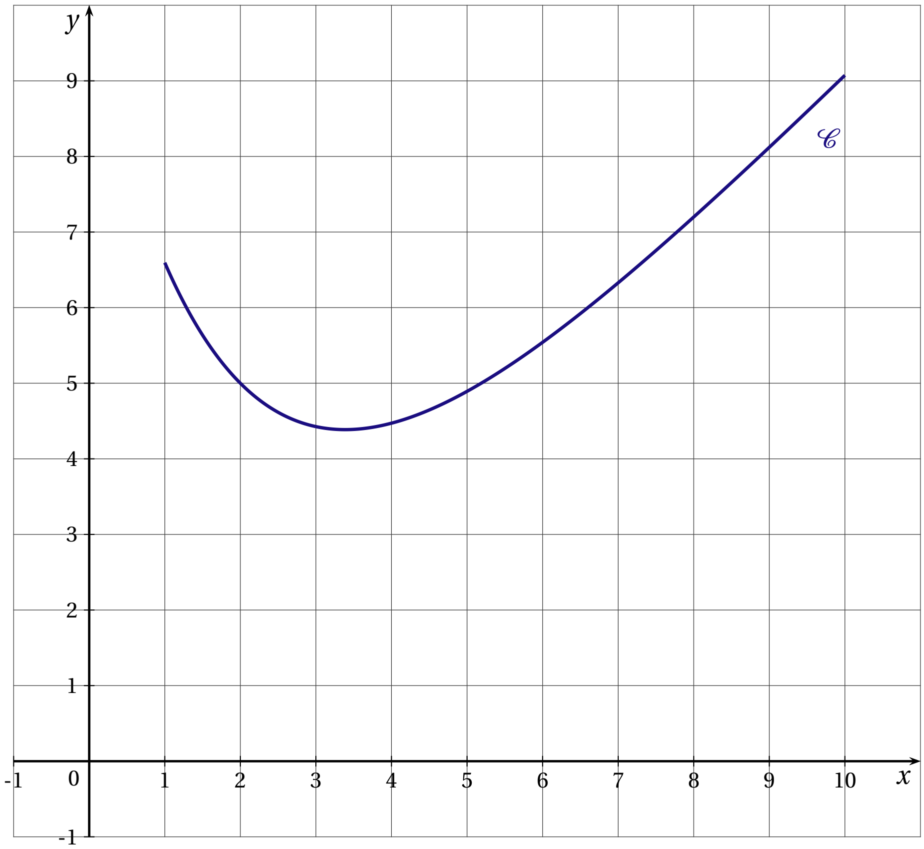
Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$$

où x désigne le nombre de centaines de coques produites et $g(x)$ le prix de vente d'une coque en euros.
Estimer les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise.

ANNEXE

À remettre avec la copie



EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite géométrique (u_n), de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule le 25ᵉ terme de cette suite, c'est-à-dire u_{24} :

```
U ← ...
Pour N allant de 1 à 24
    U ← ...
Fin pour
```

   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

   c) Calculer u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0{,}01$.

3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{24}$.
   Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$S \leftarrow 0$ Pour N allant de 0 à 24 $S \leftarrow S + 50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour	$S \leftarrow 0$ Pour N allant de 0 à 24 $S \leftarrow 50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour	$S \leftarrow 50$ Pour N allant de 0 à 24 $S \leftarrow S + 50 \times 0{,}9^N$ Fin Pour

   a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme S_{24}. Préciser lequel en justifiant la réponse.

   b) Calculer la somme S_{24}.
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité près.

4. Pour tout entier naturel n, on note $S_n = u_0 + \cdots + u_n$.
   On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $S_n = 500 - 450 \times 0{,}9^n$.

   a) Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   b) Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.
   Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez deux fournisseurs :

— un fournisseur A qui lui garantit 99 % d'étuis non défectueux ;

— un fournisseur B qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

On sait également que 80 % des étuis achetés par l'entreprise proviennent du fournisseur A (le reste provenant du fournisseur B).
On choisit au hasard un étui de smartphone et on considère les évènements suivants :

— A : « l'étui provient du fournisseur A » ;

— B : « l'étui provient du fournisseur B » ;

— D : « l'étui est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un étui soit défectueux.
3. On choisit un étui au hasard et on constate qu'il est défectueux.
   Montrer que la probabilité qu'il provienne du fournisseur B est égale à 0,6.

PARTIE B

On rappelle que le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux.
Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent du fournisseur B. Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur B.
   On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.
2. Faut-il informer le fournisseur B d'un problème ?

PARTIE C

Un étui est considéré comme conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.
Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B.
On note X la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que X suit une loi normale d'espérance 20 mm.

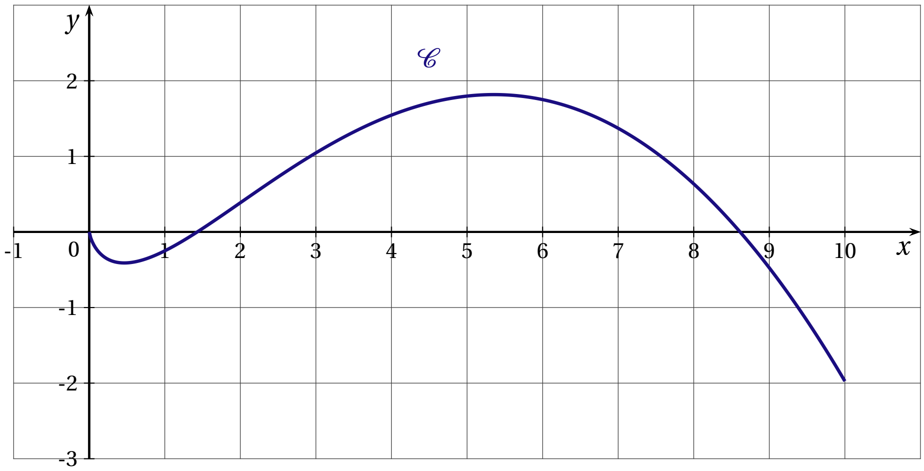
1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de X est égal à 0,2.
   Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.
2. Déterminer une valeur de l'écart-type de X pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

PONDICHÉRY 2017

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;10]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0;10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

   a) 1 b) 2 c) 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

   a) nul b) strictement positif c) strictement négatif

3. La fonction f' est :

   a) croissante sur $]0;10]$ b) croissante sur $[4;7]$ c) décroissante sur $[4;7]$

4. On admet que pour tout x de l'intervalle $]0;10]$ on a : $f'(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + 1$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet sur cet intervalle un point d'inflexion :

   a) d'abscisse 2,1 b) d'abscisse 0,9 c) d'abscisse 2

EXERCICE 2 (5 points)

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.
Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

— 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes;

— parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans;

— parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

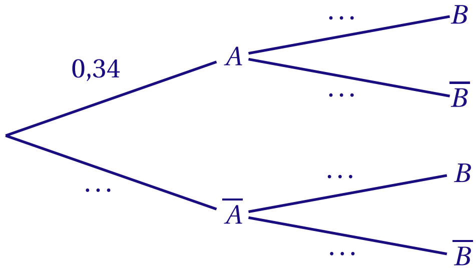
On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :

— A : « le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes »;

— B : « le coureur a moins de 60 ans »;

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$. De plus $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2. a) Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.

   b) Vérifier que $P\left(\overline{B}\right) \approx 0{,}123$.

   c) Calculer $P_{\overline{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

PARTIE B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.

   Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3. a) Calculer $P(T \leqslant 300)$.

   b) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0{,}9$.

   c) Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici deux propositions d'algorithmes :

ALGORITHME 1	ALGORITHME 2
$U \leftarrow 150$	$U \leftarrow 150$
$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$
Tant que $U \geqslant 220$	Tant que $U < 220$
$U \leftarrow 0{,}8 \times U + 45$	$U \leftarrow 0{,}8 \times U + 45$
$N \leftarrow N + 1$	$N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que	Fin Tant que

   a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.
   Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

   b) Quelle est la valeur numérique de n calculée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 225 - 75 \times 0{,}8^n$.

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.
   On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

   — 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;

   — 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

   La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.
   Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe.
Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0;7]$.
2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.
3. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel?

   a) $[9;17]$ b) $[18;26]$ c) $[27;35]$

PARTIE B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$ d'expression :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}.$$

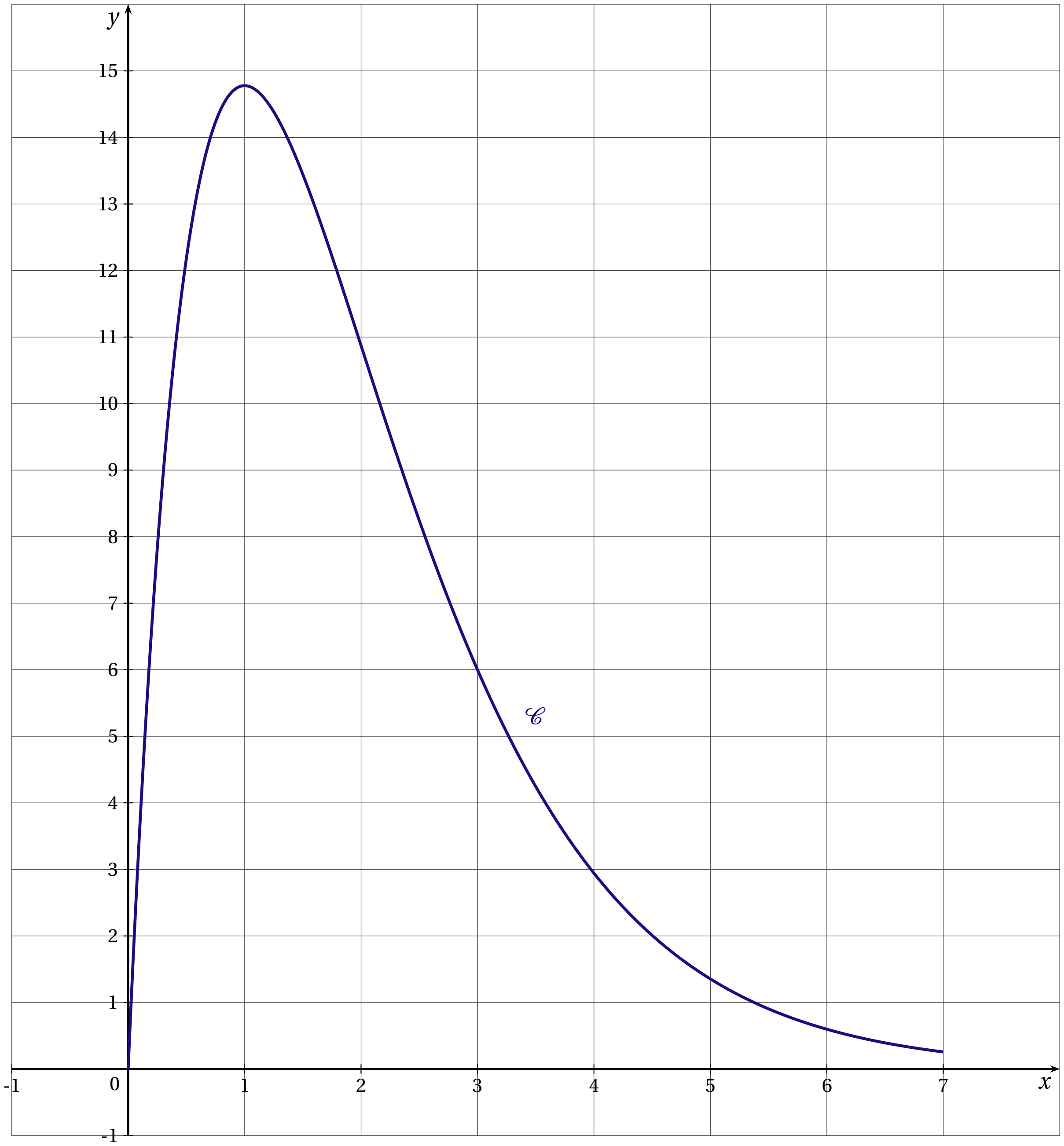
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$, $f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
   b) Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0;7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
   b) On admet que $\alpha \approx 0{,}36$ à 10^{-2} près.
   Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;7]$ par :

   $$F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}.$$

   a) Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;7]$.
   b) Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.
5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).
   a) Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.
   b) L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.
   Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

ANNEXE
N'est pas à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT 2017

SÉRIE ES (OBLIGATOIRE) - L (SPÉCIALITÉ)

INDEX THÉMATIQUE