BAC 2018

SÉRIE ES

ANNALES DES SUJETS DE MATHÉMATIQUES
SESSION 2018

OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

Les sujets proposés sont établis à partir des énoncés mis en ligne par D. Vergès sur le site de L' A.P.M.E.P

SOMMAIRE DES SUJETS DE LA SESSION 2018

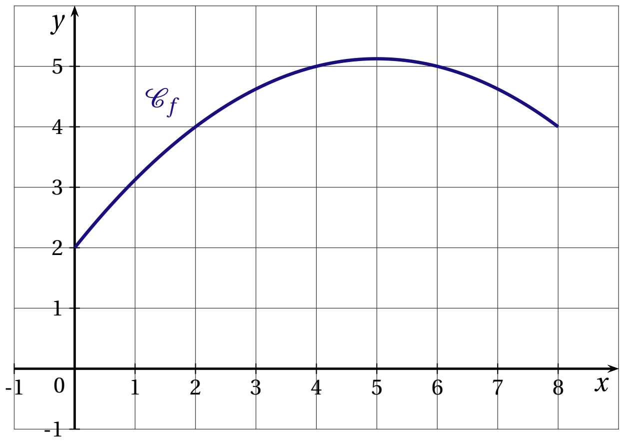
AMÉRIQUE DU NORD 2018

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

1. Un pépiniériste cultive des bulbes de fleurs. La probabilité qu'un bulbe germe, c'est-à-dire qu'il donne naissance à une plante qui fleurit, est de 0,85.
   Il prélève au hasard 20 bulbes du lot. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 bulbes.
   On peut affirmer que :
   a) La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,103.
   b) La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,067.
   c) La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,830.
   d) La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,933.

2. On considère une fonction f définie sur $[0;8]$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :



   a) $8 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$ b) $9 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$
   c) $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$ d) $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$

3. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.
   Une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est la fonction G définie par :
   a) $G(x) = \ln(x)$ b) $G(x) = x\ln(x)$ c) $G(x) = x\ln(x) - x$ d) $G(x) = \dfrac{1}{x}$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x) > 0$ est :
   a) $]0;+\infty[$ b) $]0;1[$ c) $]1;+\infty[$ d) $]\mathrm{e};+\infty[$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ». Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

PARTIE A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.
   Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

   Rappel : *lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par :*

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux.
   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %.

PARTIE B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2\,500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Quelle est la probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois ?
2. a) Trouver, arrondie à l'entier, la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0{,}95$.
   b) Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

PARTIE C

On admet maintenant que :

— 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;

— 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.
On appelle :

— E l'évènement : « le ruban LED est d'extérieur » ;

— D l'évènement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.
3. D'autre part on sait que 6 % de tous les rubans LED sont défectueux.
   Calculer puis interpréter $P_{\overline{E}}(D)$.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.
En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017+n$.
Ainsi on a $u_0 = 120$.

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$.
   b) Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.
2. Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre ne charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
   On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.
   Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 120
Tant que .......................
    n ← n+1
    ............................
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
   b) Quelle est l'année affichée en sortie d'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis démonter que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50.$$
   c) Résoudre par le calcul l'inéquation $u_n > 190$.
   Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.
Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

— 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;

— 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

— A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;

— B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

— a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017+n$;

— b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017+n$.
L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

PARTIE A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est l'état stable du système.
3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif ?

PARTIE B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.
On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}25b_n$ puis que
$$a_{n+1} = 0{,}60a_n + 0{,}25.$$
2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

```
n ← 0
a ← 0,46
Tant que ......................
    n ← n + 1
    ............................
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
   b) Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}625$ pour tout entier naturel n.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
   b) Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n,

$$a_n = -0{,}165 \times 0{,}60^n + 0{,}625.$$

   c) Résoudre par le calcul l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}62$.
   Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

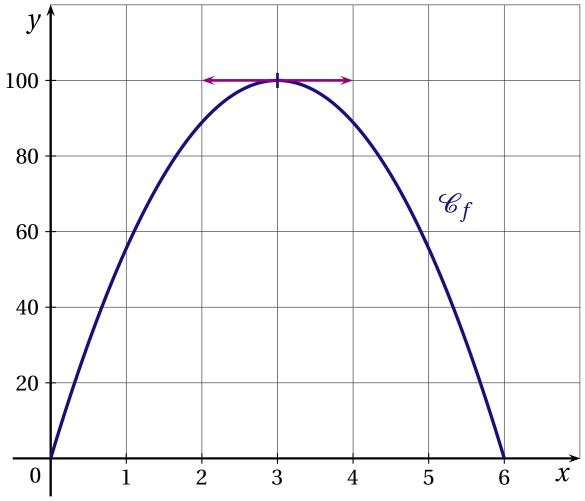
EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

PARTIE B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $g(x) = 12{,}5x\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

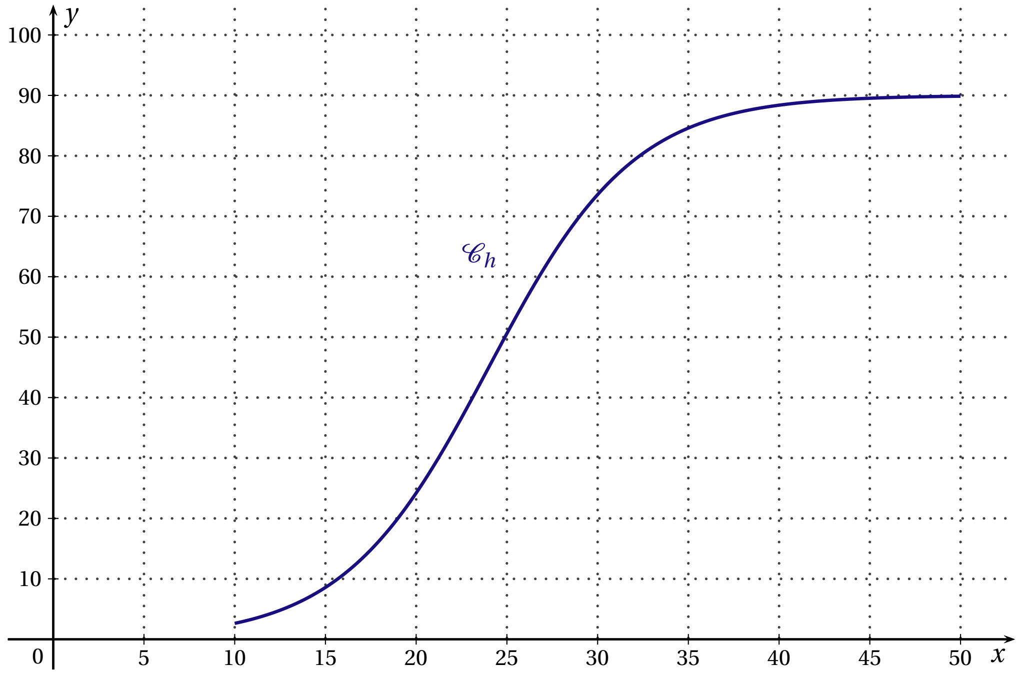
1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$,
$$g'(x) = (12{,}5 - 1{,}5625x)\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}.$$
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

PARTIE C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10;50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).
La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver (90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22{,}5\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^2}$
2	`Dériver (22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))`^{2}`)` $\dfrac{5{,}625\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10;50]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1>0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10;50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.
5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « *satisfaction* » atteint 80.
   Arrondir au millier d'euros.

AMÉRIQUE DU SUD 2018

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

f est la fonction définie sur $[0;12]$ par $f(x)=2x\mathrm{e}^{-x}$.

PARTIE A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver $\left(2*x*\exp(-x)\right)$ $-2*x*\exp(-x)+2*\exp(-x)$
2	Factoriser $\left(-2*x*\exp(-x)+2*\exp(-x)\right)$ $2*(1-x)*\exp(-x)$
3	Dériver $\left(2*(1-x)*\exp(-x)\right)$ $2*x*\exp(-x)-4*\exp(-x)$
4	Factoriser $\left(2*x*\exp(-x)-4*\exp(-x)\right)$ $2*(x-2)*\exp(-x)$

1. Vérifier le résultat de la ligne 1 donné par le logiciel de calcul formel.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats donnés par le logiciel de calcul formel sans les justifier.

2. a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$ en le justifiant.
   b) Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet deux solutions dans $[0;12]$.
   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
3. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;12]$.

PARTIE B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

— x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool;

— $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. a) Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.
   b) À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal?
   Quelle est alors sa valeur? Arrondir au centième.
2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
   Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation?

EXERCICE 2 (6 points) *commun à tous les candidats*

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.
On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

— le stock contient 30 % de valises à deux roues ;

— 98 % des valises à deux roues réussissent les tests ;

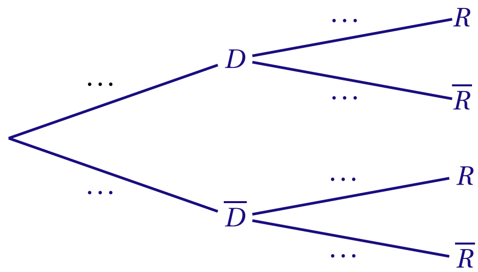
— 95 % des valises à quatre roues réussissent les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les évènements suivants :

— D : « La valise a deux roues » ;

— R : « La valise réussit les tests ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, illustrant cette situation.

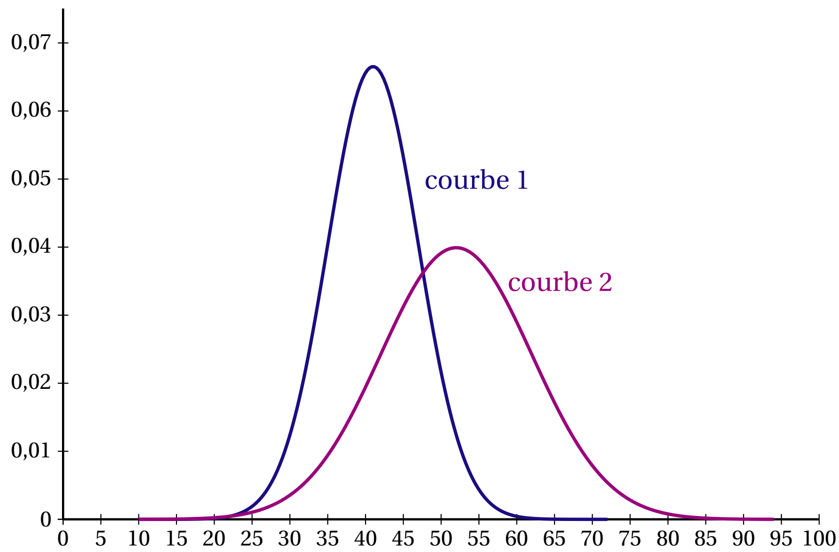


2. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de 0,959.
3. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

PARTIE B

Parmi les tests de solidité effectués, l'un d'eux consiste à charger la valise et à la faire rouler sur une piste bosselée. On appelle « durée de vie » de la valise, le nombre de kilomètres parcourus avant d'atteindre une certaine usure des roues.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque valise à deux roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 41$ et d'écart-type $\sigma = 6$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque valise à quatre roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 52$ et d'écart-type $\sigma' = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'une valise à deux roues ait une durée de vie supérieure à 52 kilomètres ?
2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les densités associées aux variables aléatoires X et Y.
   À l'aide de ce graphique, déterminer pour quel type de valise (à deux roues ou à quatre roues) la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 50 kilomètres est la plus grande. Expliquer.



PARTIE C

L'entreprise souhaite commercialiser un nouveau modèle de valises. Afin de mieux connaître les attentes des consommateurs, elle réalise un sondage auprès de 2 000 personnes. Parmi elles, 872 déclarent que la solidité est le principal critère pris en compte lors de l'achat (devant la légèreté, le prix, la couleur ...).

1. Estimer par un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % la proportion de consommateurs pour lesquels la solidité est le principal critère de choix.
2. Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,04 ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

— 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;

— 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;

— les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année $(2017+n)$. De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année $(2017+n)$.
On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.

1. a) Calculer a_1. Interpréter le résultat.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$ puis en déduire que $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

2. a) Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.
   Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$	Tant que $A > 0{,}5$	Tant que $A \leqslant 0{,}5$
$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
$N \leftarrow N + 1$	$N \leftarrow N + 1$	Fin Tant que
Fin Tant que	Fin Tant que	$N \leftarrow N + 1$
Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$

   b) Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$.

   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.

4. À l'aide de l'expression donnée dans la question 3. b), résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}5$.
   Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché.
En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

— 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;

— 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;

— les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :

— a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017+n)$;

— b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017+n)$;

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année $(2017+n)$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   b) Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018.
3. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est un état stable de la matrice et interpréter le résultat.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

PARTIE B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1. a) Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$	Tant que $A > 0{,}5$	Tant que $A \leqslant 0{,}5$
$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
$N \leftarrow N + 1$	$N \leftarrow N + 1$	Fin Tant que
Fin Tant que	Fin Tant que	$N \leftarrow N + 1$
Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$

   b) Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92n + 0{,}625$.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.
3. À l'aide de l'expression donnée dans la question 2. b), résoudre l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}5$.
   Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?

EXERCICE 4 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Les quatre affirmations sont indépendantes.

1. Un caractère est présent dans une population selon une proportion $p = 0{,}1$.
   Dans un échantillon de 400 personnes, on observe ce caractère sur 78 individus.

   AFFIRMATION 1 : Au seuil de 95 %, cet échantillon est représentatif de la population totale pour ce caractère.
   Rappel : Lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donné par :
   $$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

2. Dans une gare, le temps d'attente à un guichet donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;7]$.

   AFFIRMATION 2 : Le temps d'attente moyen à ce guichet est de 4 minutes.

3. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

   AFFIRMATION 3 : La valeur moyenne de g sur l'intervalle $[-2;2]$ est égale à $\dfrac{16}{3}$.

4. x désigne un nombre réel négatif.

   AFFIRMATION 4 : $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ est un nombre positif quel que soit le nombre réel x.

ANTILLES GUYANE 2018

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-10;10]$ par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-3x}$.
   L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-10;10]$:
   a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions d) 3 solutions ou plus

2. Dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ on considère la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$;
   l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1 est :
   a) $y=1$ b) $y=x-1$ c) $y=1-x$ d) $y=x+1$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$.
   La meilleure valeur approchée du réel t tel que $P(X > t) = 0{,}025$ est :
   a) $t \approx 0{,}97$ b) $t \approx 19{,}12$ c) $t \approx 28$ d) $t \approx 30{,}88$

4. Anne prévoit d'appeler Benoît par téléphone à un moment choisi au hasard entre 8 h 30 et 10 h. Benoît sera dans un train à partir de 9 h pour un trajet de plusieurs heures.
   Quelle est la probabilité qu'Anne appelle Benoît alors qu'il est dans le train ?
   a) $\dfrac{60}{150}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{6}{13}$ d) $\dfrac{1}{3}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans tout cet exercice les résultats seront arrondis au centième si nécessaire

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

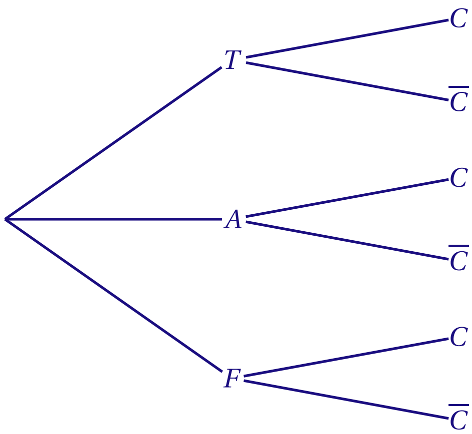
Victor a téléchargé un jeu sur son téléphone. Le but de ce jeu est d'affronter des obstacles à l'aide de personnages qui peuvent être de trois types : « Terre », « Air » ou « Feu ».
Au début de chaque partie, Victor obtient de façon aléatoire un personnage d'un des trois types et peut, en cours de partie, conserver ce personnage ou changer une seule fois de type de personnage.
Le jeu a été programmé de telle sorte que :

- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Terre » est 0,3 ;
- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type « Air » est 0,5 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Terre », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,5 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Air », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,4 ;
- si la partie débute avec un personnage de type « Feu », la probabilité que celui-ci soit conservé est 0,9.

On note les évènements suivants :

- T : la partie débute avec un personnage de type « Terre » ;
- A : la partie débute avec un personnage de type « Air » ;
- F : la partie débute avec un personnage de type « Feu » ;
- C : Victor conserve le même personnage tout au long de la partie.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que Victor obtienne et conserve un personnage de type « Air ».
3. Justifier que la probabilité que Victor conserve le personnage obtenu en début de partie est 0,53.
4. On considère une partie au cours de laquelle Victor a conservé le personnage obtenu en début de partie. Quelle est la probabilité que ce soit un personnage de type « Air » ?

PARTIE B

On considère 10 parties jouées par Victor, prises indépendamment les unes des autres.
On rappelle que la probabilité que Victor obtienne un personnage de type « Terre » est 0,3.
Y désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de personnages de type « Terre » obtenus au début de ses 10 parties.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu exactement 3 personnages de type « Terre » au début de ses 10 parties.
3. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type « Terre » au début de ses 10 parties.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes.

Franck joue en ligne sur internet.
Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :

— quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;

— quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : « Franck gagne la partie » et P l'état : « Franck perd la partie ».
Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :

— g_n la probabilité que Franck gagne la n-ième partie ;

— p_n la probabilité que Franck perde la n-ième partie.

Dans cette période, Franck a gagné la première partie.

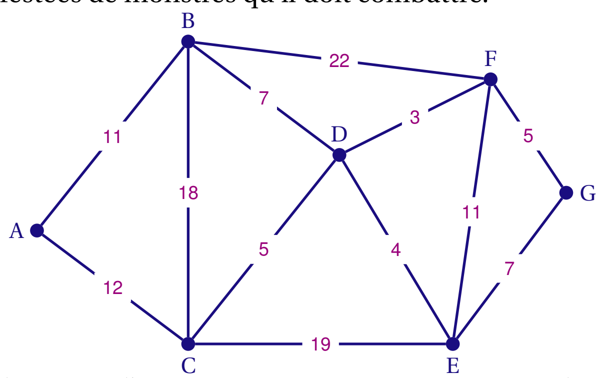
1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.
2. a) Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.

   b) Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.
3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes.
Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.
Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. a) Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

   b) Donner un tel chemin.
2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
   Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?
3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.
   Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0{,}4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1{,}028\,v_n \end{array}\right.$$

1. a) Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

   b) Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 10$
$V \leftarrow 8$
Tant que $U > V$
$U \leftarrow U + 0{,}4$
$V \leftarrow V \times 1{,}028$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

   En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46. Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « An essay on the principle of population » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

   Il écrit :

   > « *Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique.* »

   En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

   On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

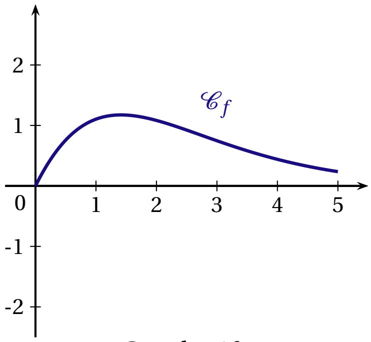
   a) Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ?

   On arrondira le résultat au millième.

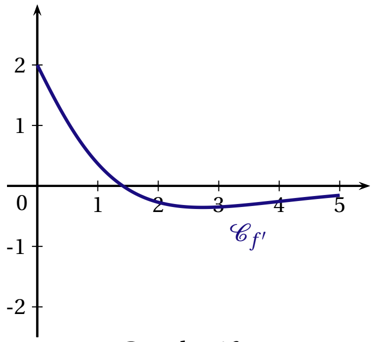
   b) À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

   c) À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait -elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

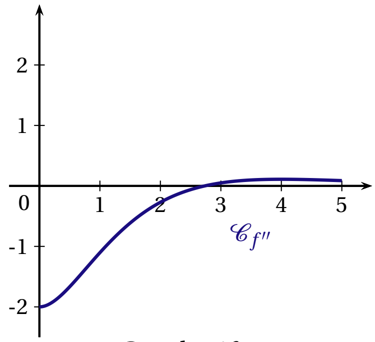
EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*



Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_{f'}$



Courbe $\mathscr{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

PARTIE A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.
2. a) Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.
   b) Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
   Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.
3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

   $y = x$ $\qquad$ $y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

4. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f'(x\,\mathrm{d}x$ où f' est la fonction dérivée de f.
   Comment s'interprète graphiquement ce nombre I ?

PARTIE B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \left(-x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$.
   b) Déterminer les variations de f sur $[0;5]$ et préciser l'abscisse de son maximum.
   c) Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.
2. Avec un outil de calcul on obtient, pour $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(1)$, la même valeur approchée 1,103 64.
   Ces deux valeurs sont-elles égales ?

ANTILLES GUYANE SEPTEMBRE 2018

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité.

Une grande enseigne souhaite étudier l'évolution du chiffre d'affaires des ventes de ses produits « bio ».
Les données collectées ces dernières années sont les suivantes :

Années	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Chiffre d'affaires (millier d'euros)	330	361	392	432	489	539

1. Calculer le taux d'évolution en pourcentage du chiffre d'affaires entre 2012 et 2013.
2. Un cabinet d'étude avait, en 2012, conduit une étude et modélisé le chiffre d'affaires des ventes de produits bio par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représentait le chiffre d'affaires, exprimé en millier d'euros, de l'année $2012+n$.

   Dans cette modélisation, on suppose que le chiffre d'affaires augmente de 9 % chaque année à partir de 2012 et on construit un algorithme donnant en sortie le terme u_n pour un entier naturel n donné par l'utilisateur.

   a) Dans les algorithmes ci-dessous, N est un entier, donné par l'utilisateur, qui désigne le nombre d'années écoulées depuis l'année 2012 et U un nombre réel qui désigne le chiffre d'affaires en $2012+N$.

   Justifier que les algorithmes A et C ne conviennent pas.

ALGORITHME A	ALGORITHME B	ALGORITHME C

$U \leftarrow 330$
Pour i variant de 1 à N
   $W \leftarrow 1{,}09 \times U$
Fin Pour
	$U \leftarrow 330$
	Pour i variant de 1 à N
	   $U \leftarrow 1{,}09 \times U$
	Fin Pour
		Pour i variant de 1 à N
		   $U \leftarrow 330$
		   $U \leftarrow 1{,}09 \times U$
		Fin Pour

   On admet que l'algorithme B convient.

   b) Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme B, recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous.

valeur de i		1	...
valeur de U	330		...

   c) Justifier, qu'au vu de ces résultats, le cabinet d'étude conclut que ce modèle n'est pas pertinent dès 2016.

3. Le cabinet d'étude décide de modéliser ce chiffre d'affaires, exprimé en millier d'euros, par la suite (v_n) définie par $v_0 = 432$ et $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 110$ pour tout entier naturel n.

   Le terme v_n représente alors ce chiffre d'affaires en $2015+n$.

   a) Calculer v_1 et v_2.

   b) On pose $w_n = v_n - 1\,100$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   c) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

   En déduire que $v_n = 1\,100 - 668 \times 0{,}9^n$ pour tout entier naturel n.

   d) Ce modèle permet-il d'envisager que le chiffre d'affaires dépasse un jour 2 millions d'euros?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts.
Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

PARTIE A

Une étude réalisée par la compagnie a établi que, sur cette ligne, pour une réservation en agence, 5 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement alors que, pour une réservation par Internet, 2 % des clients ne se présentent pas à l'embarquement.
Les réservations en agence représentent 30 % de l'ensemble des réservations.
Pour un embarquement donné et une réservation prise au hasard, on considère les évènements suivants :

— A : « la réservation a été faite en agence » ;

— I : « la réservation a été faite par Internet » ;

— E : « le passager se présente à l'embarquement ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Démontrer que la probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est de 0,029.
3. Calculer la probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement.

PARTIE B

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.
On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

PARTIE C

Cette compagnie affirme que 98 % de ses clients sont satisfaits.
Sur les 400 réponses à une enquête de satisfaction, il y a 383 réponses exprimant leur satisfaction.
Ce résultat contredit-il l'affirmation de la compagnie ?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

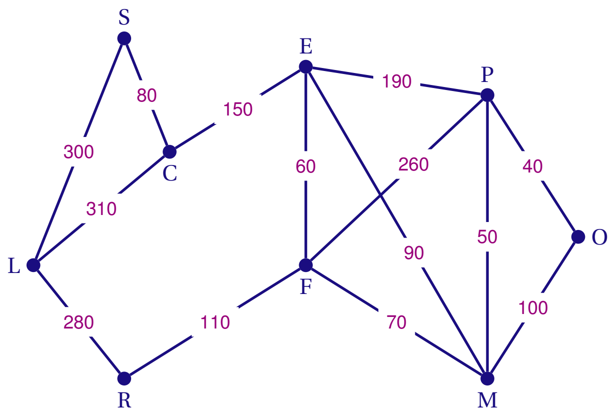
Un laboratoire en botanique étudie l'évolution d'une espèce végétale en fonction du temps.
Cette espèce compte initialement 2 centaines d'individus.
Au bout de 2 semaines, l'espèce végétale compte 18 centaines d'individus.
Au bout de 3 semaines, l'espèce végétale prolifère et s'élève à 30,5 centaines d'individus.
Au bout de 10 semaines, on en compte 90 centaines.
On modélise cette évolution par une fonction polynomiale f donnant le nombre d'individus de l'espèce, exprimé en centaine, en fonction du temps écoulé x, exprimé en semaine.
Ainsi $f(2) = 18$; $f(3) = 30{,}5$ et $f(10) = 90$.
On admet que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d, sont des réels.

1. Justifier que $d = 2$.
2. Montrer que a, b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 8a+4b+2c=16 \\ 27a+9b+3c=28{,}5 \\ 1000a+100b+10c=88 \end{cases}$.
3. Déterminer les matrices A, X et B qui permettent d'écrire le système précédent sous la forme $AX = B$.
4. Résoudre le système.
5. En supposant que l'évolution suit, sur l'intervalle $[0;13]$, le modèle décrit par la fonction f, déterminer au bout de combien de temps la quantité de l'espèce étudiée sera maximale (arrondir à la semaine près).

PARTIE B

Le laboratoire en botanique possède un parc d'étude dans lequel est observée l'évolution de différentes espèces d'arbres.

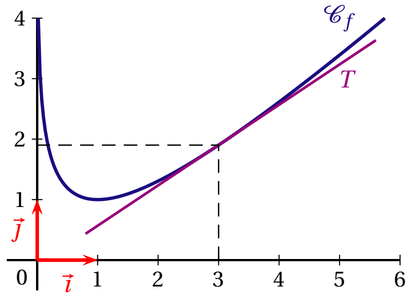
Les agents chargés du nettoyage circulent dans le parc depuis le local technique (L) jusqu'aux différentes parcelles plantées d'arbres : C, E, F, M, O, P, R et S.
Les sommets du graphe ci-contre représentent les différentes parcelles, et les arêtes marquent les allées permettant de se déplacer dans le parc. Les étiquettes rapportent la distance en mètre entre les parcelles.



1. a) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et en y revenant ? Si oui, donner un tel parcours.
   b) Existe-t-il un parcours empruntant toutes les allées, une et une seule fois, en partant du local technique (L) et sans nécessairement y revenir ? Si oui, donner un tel parcours.
2. Déterminer un parcours de distance minimale joignant le local technique à la parcelle O.

EXERCICE 3 (3 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 3$.



Cette tangente T à $\mathscr{C}_f$ passe-t-elle par l'origine du repère ?

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

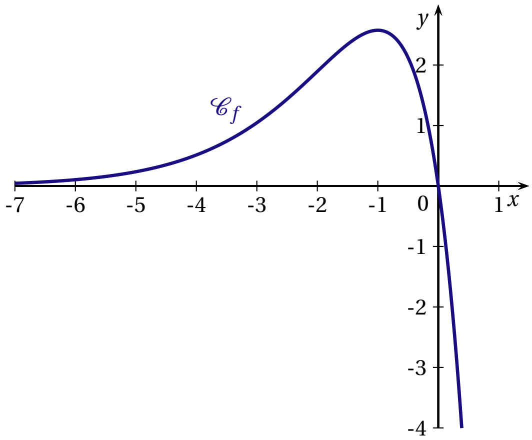
Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -7x\mathrm{e}^x.$$

Cette fonction admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée f' et une dérivée seconde f''.
On donne ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, une expression de $F(x)$ peut être :
   a) $(-7-7x)\mathrm{e}^x$ b) $-7\mathrm{e}^x$ c) $-7x\mathrm{e}^x$ d) $(-7x+7)\mathrm{e}^x$

2. Soit A l'aire, exprimée en unité d'aire, comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=0$. On a :
   a) $3 < A < 4$ b) $5 < A < 6$ c) $A < 0$ d) $A > 7$

3. On a :
   a) f' est positive sur l'intervalle $[-6;0]$
   b) f est convexe sur l'intervalle $[-1;0]$
   c) $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x=-1$
   d) f'' change de signe en $x=-2$.

PARTIE B

On considère la loi normale X de paramètres $\mu = 19$ et $\sigma = 5$.

4. La meilleure valeur approchée de $P(19 \leqslant X \leqslant 25)$ est :
   a) 0,385 b) 0,084 c) 0,885 d) 0,5

5. Une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geqslant 25)$ est :
   a) $p \approx 0{,}885$ b) $p \approx 0{,}115$ c) $p \approx 0{,}385$ d) $p \approx 0{,}501$

6. Le nombre entier k tel que $P(X > k) \approx 0{,}42$ à 10^{-2} près est :
   a) $k=19$ b) $k=29$ c) $k=20$ d) $k=14$

ASIE 2018

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises.

   La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.

   Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses?

   a) 0,20 b) 0,62 c) 0,38 d) 0,58

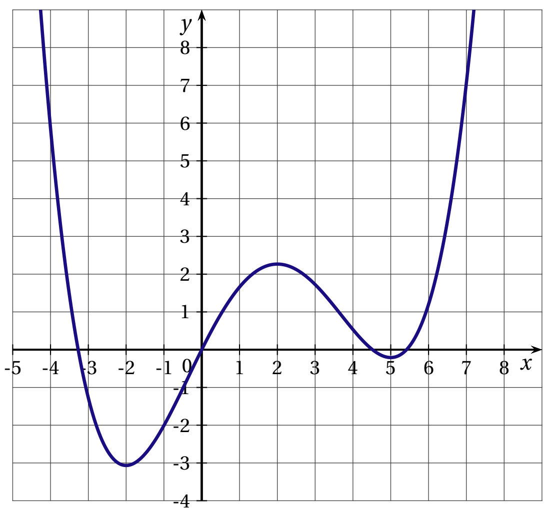
2. Pour tout évènement E on note $P(E)$ sa probabilité. X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 30 et d'écart type σ. Alors :

   a) $P(X = 30) = 0{,}5$ b) $P(X < 40) < 0{,}5$
   c) $P(X < 20) = P(X > 40)$ d) $P(X < 20) > P(X < 30)$

3. En France, les ventes de tablettes numériques sont passées de 6,2 millions d'unités en 2014 à 4,3 millions d'unités en 2016. Les ventes ont diminué, entre 2014 et 2016, d'environ :

   a) 65 % b) 31 % c) 20 % d) 17 %

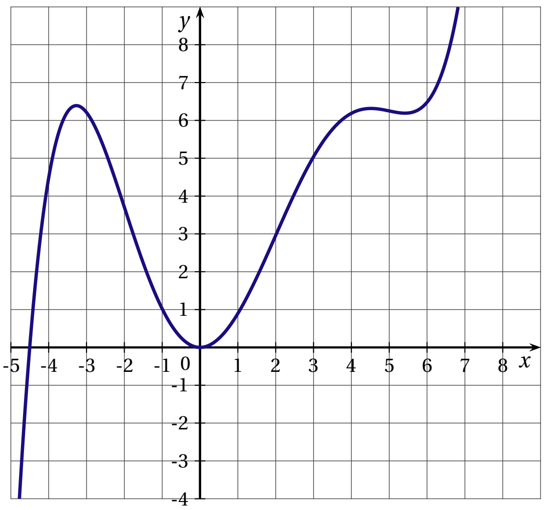
Pour les questions 4 et 5, on donne ci-dessous, la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

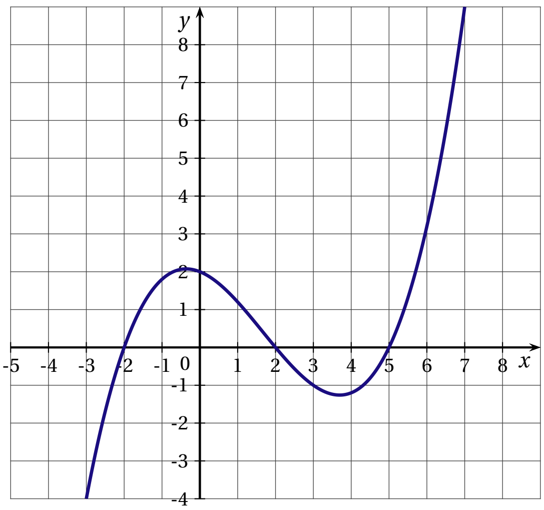


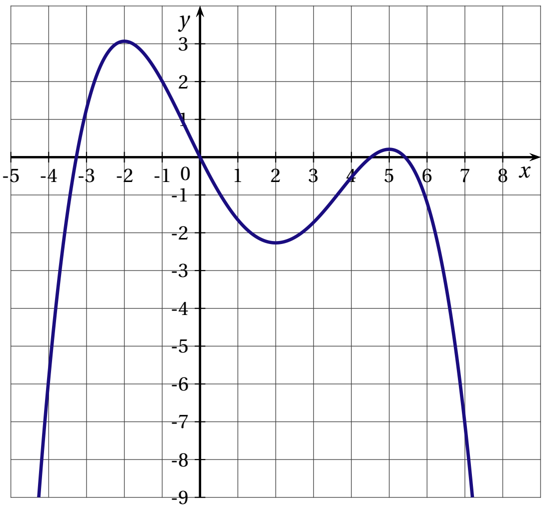
3. Soit f' la dérivée de f et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

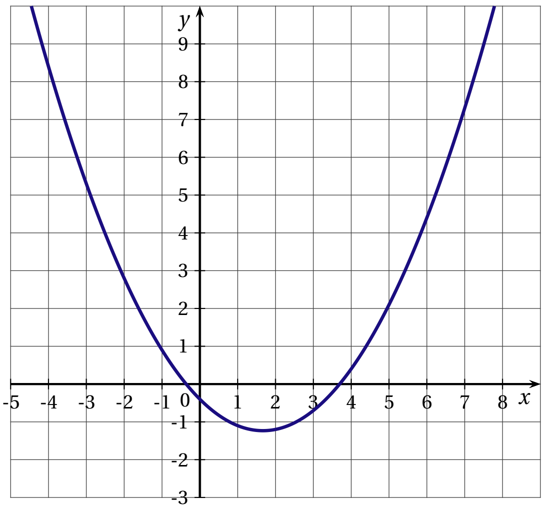
   a) f' est positive sur $[2;4]$ b) f' est négative sur $[-3;-1]$
   c) F est décroissante sur $[2;4]$ d) F est décroissante sur $[-3;-1]$

4. Une des courbes ci-dessous représente la fonction f''. Laquelle?

a)

y
8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

b)

y
8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

c)

y
3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

d)

y
9 8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

EXERCICE 2 (4 points) *commun à tous les candidats*

Un navigateur s'entraîne régulièrement dans le but de battre le record du monde de traversée de l'Atlantique à la voile.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième si nécessaire.
Pour tous évènements A et B, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $P(A)$ la probabilité de A et si B est de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

PARTIE A

Le navigateur décide de modéliser la durée de sa traversée en jour par une loi normale de paramètres $\mu = 7$ et $\sigma = 1$.

1. Quelle est la probabilité que le navigateur termine sa course entre 5 et 8 jours après le départ ?
2. Dans sa catégorie de voilier, le record du monde actuel est de 5 jours. Quelle est la probabilité que le navigateur batte le record du monde ?

PARTIE B

Une entreprise nommée « Régate », s'intéresse aux résultats de ce navigateur.
La probabilité qu'il réalise la traversée en moins de 6 jours est de 0,16.
Si le navigateur réalise la traversée en moins de 6 jours, l'entreprise le sponsorise avec une probabilité de 0,95.
Sinon, l'entreprise hésite et le sponsorise avec une probabilité de 0,50.
On note :

— M l'évènement « la traversée est réalisée par le navigateur en moins de 6 jours » ;

— F l'évènement « l'entreprise sponsorise le navigateur ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité que l'entreprise ne sponsorise pas le navigateur à la prochaine course est 0,428.
3. L'entreprise a finalement choisi de ne pas financer le navigateur.
   Calculer la probabilité que le navigateur ait tout de même réalisé la traversée en moins de 6 jours.

PARTIE C

L'entreprise « Régate » sponsorise plusieurs catégories de sportifs dans le monde nautique.
Ces derniers doivent afficher le slogan « Avec Régate j'ai 97 % de chance d'être sur le podium ! ».
L'étude des résultats sportifs de l'année a révélé que, parmi 280 sportifs de chez « Régate », 263 sont montés sur le podium. Que penser du slogan ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.
On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

1. a) Avec ce modèle, vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.
   b) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}12u_n - 18$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que .................... faire
    U ← ···
    N ← ···
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12.
   Préciser son terme initial.
   b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
   En déduire u_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.
   Que peut-on en déduire ?
4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$150 + 1{,}12^n \times 150 > 600.$$

   b) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.
5. En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement : afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
   En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
   Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Pour la nouvelle année, Lisa prend la bonne résolution d'aller au travail tous les matins à vélo. Le premier jour, très motivée, Lisa se rend au travail à vélo. Par la suite, elle se rend toujours au travail à vélo ou en voiture.
Elle se rend compte que :

— si elle a pris son vélo un jour, cela renforce sa motivation et elle reprend le vélo le lendemain avec une probabilité de 0,7 ;

— si elle a pris sa voiture un jour, la probabilité qu'elle reprenne la voiture le lendemain est de 0,5.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets A et B où :

— A est l'évènement « Lisa prend le vélo » ;

— B est l'évènement « Lisa prend la voiture ».

On note, pour tout entier naturel n non nul :

— a_n la probabilité que Lisa aille au travail à vélo le jour n ;

— b_n la probabilité que Lisa aille au travail en voiture le jour n.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b) En déduire la matrice de transition M.
2. a) Donner les valeurs de a_1 et b_1 correspondant à l'état initial.
   b) Calculer la probabilité arrondie au centième que Lisa prenne le vélo le 8e jour.
3. Déterminer l'état stable du graphe puis interpréter le résultat obtenu.
4. a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n non nul : $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,5b_n$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,5$.
5. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,626$.

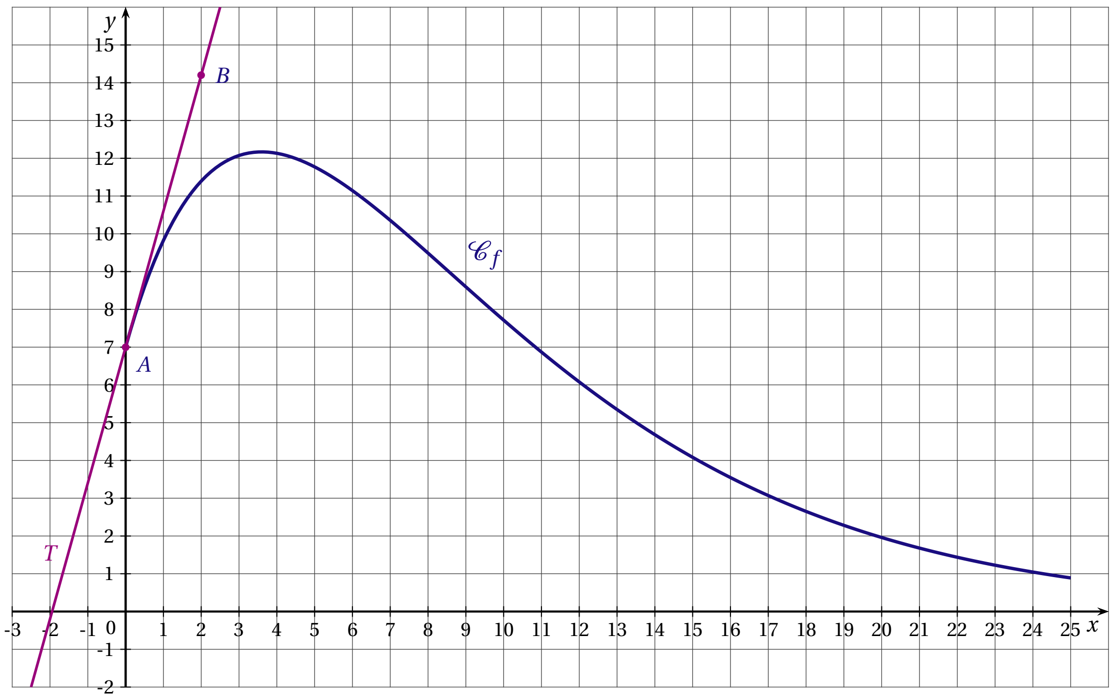
$N \leftarrow 1$
$A \leftarrow 1$
Tant que .... faire
$\quad A \leftarrow \cdots$
$\quad N \leftarrow \cdots$
Fin Tant que

   b) Quelle est la valeur de N après exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

PARTIE A

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0;25]$ par : $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels.
On a représenté également sa tangente T au point $A(0;7)$. T passe par le point $B(2;14,2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.
2. a) Déterminer par un calcul, le coefficient directeur de la droite T.
   b) Exprimer, pour tout $x \in [0;25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b.
   c) Montrer que a et b sont solutions du système $\begin{cases} a - 0,2b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$.
   En déduire la valeur de a.

PARTIE B

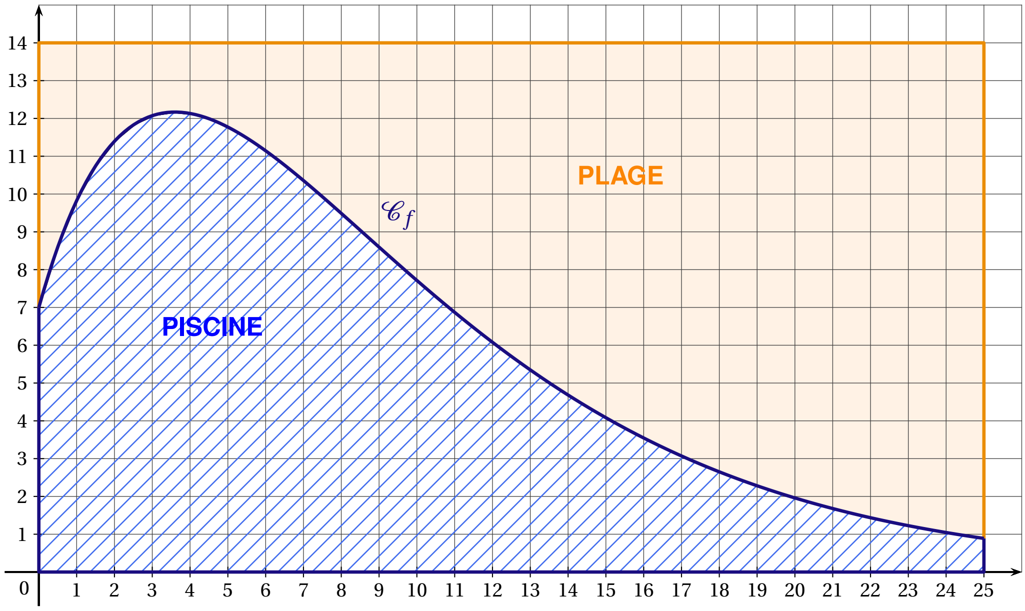
1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;25]$ par $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$. Justifier.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;25]$.
   Donner une valeur approchée au dixième de α.
3. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant.

Dériver $((-25x-160)\mathrm{e}^{-0,2x})$
$(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$

Exploiter ce résultat pour donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE C

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable.
Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie précédente.



1. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ?
2. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.

   Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?

CENTRES ÉTRANGERS 2018

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$.
   a) $f'(x) = -\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}$ b) $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$
   c) $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ d) $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

2. D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017.
   L'arrondi au dixième du taux d'évolution annuel moyen est de :
   a) 10,5 % b) 68,8 % c) 39,3 % d) 20,8 %

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$.
   L'arrondi au centième de $P(X \geqslant 12,5)$ est :
   a) 0,58 b) 0,42 c) 0,54 d) 0,63

4. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[14;16]$.
   $P(X \leqslant 15,5)$ est égal à :
   a) 0,97 b) 0,75 c) 0,5 d) $\dfrac{1}{4}$

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit.
Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.
On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours; ainsi, $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est de 1 878,8 kg.
2. On affirme que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1{,}02a_n - 100$.
   a) Justifier à l'aide de l'énoncé la relation précédente.
   b) On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :
   $$b_n = a_n - 5000.$$
   Démontrer que la suite (b_n) est géométrique. Préciser son premier terme b_0 et sa raison.
   c) En déduire pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1{,}02^n$.
   d) En déterminant la limite de la suite (a_n), justifier que les algues finissent par disparaître.
3. a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine le nombre de jours nécessaire à la disparition des algues.

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que ...
    A ← ...
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher ...
```

   b) Quel est le résultat renvoyé par l'algorithme?
4. a) Résoudre par le calcul l'inéquation $5000 - 3000 \times 1{,}02^n \leqslant 0$.
   b) Quel résultat précédemment obtenu retrouve-t-on?

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance. Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants :

— fonctionnel (F) ;

— en sursis (S) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ;

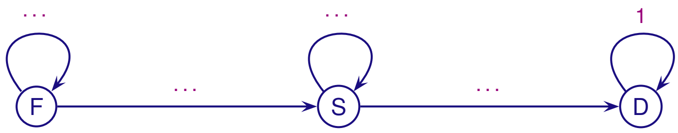
— défaillant (D) s'il ne fonctionne plus.

La société a observé que d'un jour sur l'autre :

— concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;

— concernant les automates en sursis, 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1. a) Reproduire et compléter le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



   b) Interpréter le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe.

   c) Voici la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre F, S, D.
   Préciser la signification du coefficient 0,2 dans cette matrice.

2. À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates. On note ainsi pour tout entier naturel n :

   — f_n la probabilité qu'un automate soit fonctionnel le n-ième jour ;

   — s_n la probabilité qu'un automate soit en sursis le n-ième jour ;

   — d_n la probabilité qu'un automate soit défaillant le n-ième jour.

   On note alors $P_n = \begin{pmatrix} f_n & s_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste le n-ième jour.
   Enfin, la société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels : on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer P_1.

   b) Montrer que, le 3e jour, l'état probabiliste est $\begin{pmatrix} 0,729 & 0,217 & 0,054 \end{pmatrix}$.

   c) Vérifier que ce graphe possède un unique état stable $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Quelle est la signification de ce résultat pour la situation étudiée ?

3. a) Justifier que pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0,1 f_n + 0,8 s_n$.

   b) On vérifierait de même que pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = 0,2 s_n + d_n \quad \text{et} \quad f_{n+1} = 0,9 f_n.$$

   Compléter l'algorithme ci-dessous de sorte qu'il affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← ...
F ← 1
N ← 0
Tant que ...
    D ← 0,2 × S + D
    S ← 0,1 × F + 0,8 × S
    F ← 0,9 × F
    N ← ...
Fin Tant que
Afficher ...
```

c) Au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient-elle supérieure à 30 % ?

d) Dans le codage de la boucle « Tant que », l'ordre d'affectation des variables D, S et F est-il important ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40 % des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

1. On choisit au hasard une guirlande dans le stock.

   — On note A l'évènement « la guirlande provient du fournisseur A » et B l'évènement « la guirlande provient du fournisseur B ».

   — On note I l'évènement « la guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur ».

   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

   b) Montrer que la probabilité $P(I)$ de l'évènement I est 0,3.

   c) On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur. Le responsable de l'entreprise estime qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

      Le responsable a-t-il raison ? Justifier.

2. Une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur est vendue 5 € et une guirlande pouvant être utilisée uniquement en intérieur est vendue 3 €.

   Calculer le prix moyen d'une guirlande prélevée au hasard dans le stock.

3. Lors d'un contrôle qualité, on prélève au hasard 50 guirlandes dans le stock. Le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On admet que la proportion de guirlandes défectueuses est égale à 0,02.

   Calculer la probabilité qu'au moins une guirlande soit défectueuse. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

4. L'entreprise souhaite connaître l'opinion de ses clients quant à la qualité de ses guirlandes électriques. Pour cela elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau de confiance de 95 % à l'aide d'un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 8 %.

   Combien l'entreprise doit-elle interroger de clients au minimum ?

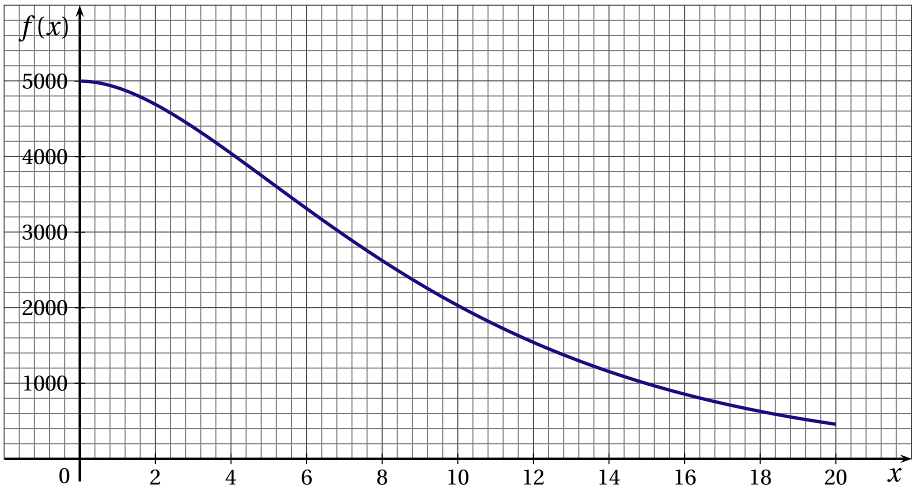
EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0;20]$ par :

$$f(x) = 1\,000(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

PARTIE A - Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.



1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3\,000$.
2. Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de f entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

PARTIE B - Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;20]$.
   Démontrer que pour tout x de $[0;20]$, $f'(x) = -200x\mathrm{e}^{-0,2x}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0;20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution α sur $[0;20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;20]$ par l'expression $F(x) = -5\,000(x+10)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f sur $[0;20]$.
   Calculer $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

PARTIE C - Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0;20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.
Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

1. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ?
2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2;8]$. Interpréter ce résultat.

FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION 2018

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 12$.
Pour tout évènement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
   a) $p(X = 10)$
   b) $p(X \geqslant 45)$
   c) $p(21 \leqslant X \leqslant 69)$
   d) $p(21 \leqslant X \leqslant 45)$
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.
3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $p(X \leqslant a) = 0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

PARTIE B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 280 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.
3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

EXERCICE 2 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

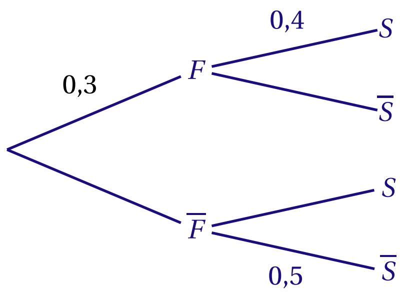
Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les évènements suivants :

— S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »

— F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



1. La probabilité $p_{\overline{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève soit :
   a) inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon ;
   b) un garçon inscrit dans un club de sport ;
   c) inscrit dans un club de sport ou un garçon ;
   d) un garçon sachant qu'il est inscrit dans un club de sport.
2. On admet que $p(F) = 0,47$. La valeur arrondie de $p_F(S)$ est :
   a) 0,141 b) 0,255 c) 0,400 d) 0,638

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $[-1;4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
   a) $y = -3x^2 + 6x$ b) $y = 3x - 2$ c) $y = 3x - 3$ d) $y = 2x - 1$
2. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1; a]$ est nulle pour :
   a) $a = 0$ b) $a = 1$ c) $a = 2$ d) $a = 3$

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10m.
On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.
Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05m.
Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

— d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière);

— ensuite une baisse de 15cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018.
   Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.
   a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.
   Préciser son terme initial.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.
3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
   a) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ? Justifier la réponse.
4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

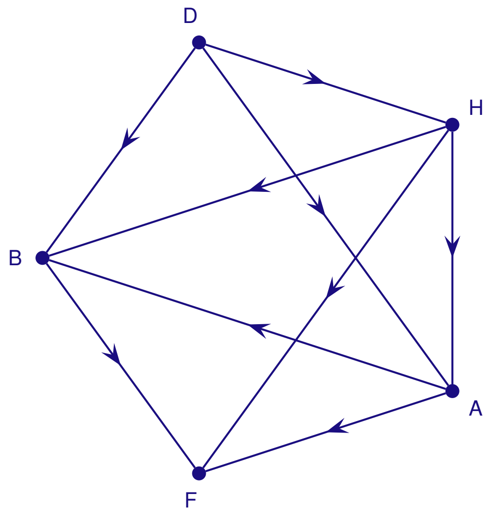
```
N ← 0
U ← 605
Tant que ..................... faire
    U ← .........
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme.
   b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?
   c) En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

PARTIE A

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux.
Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.
Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).
Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

   a) Déterminer M.

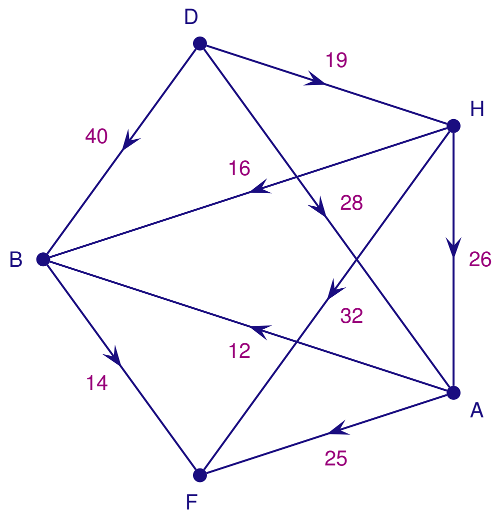
   b) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

   Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?

   Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-dessous.
   Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F. Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



PARTIE B

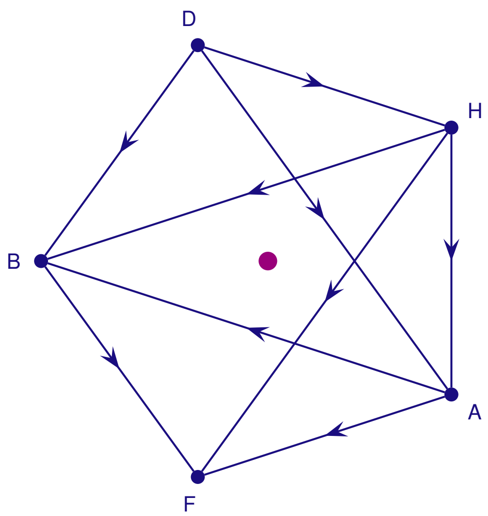
Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter l'annexe 1 à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N.

ANNEXE 1



EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2;4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2;0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2;4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

   a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2;4]$.

   b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $G(x) = (-x-1)^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive F de f.

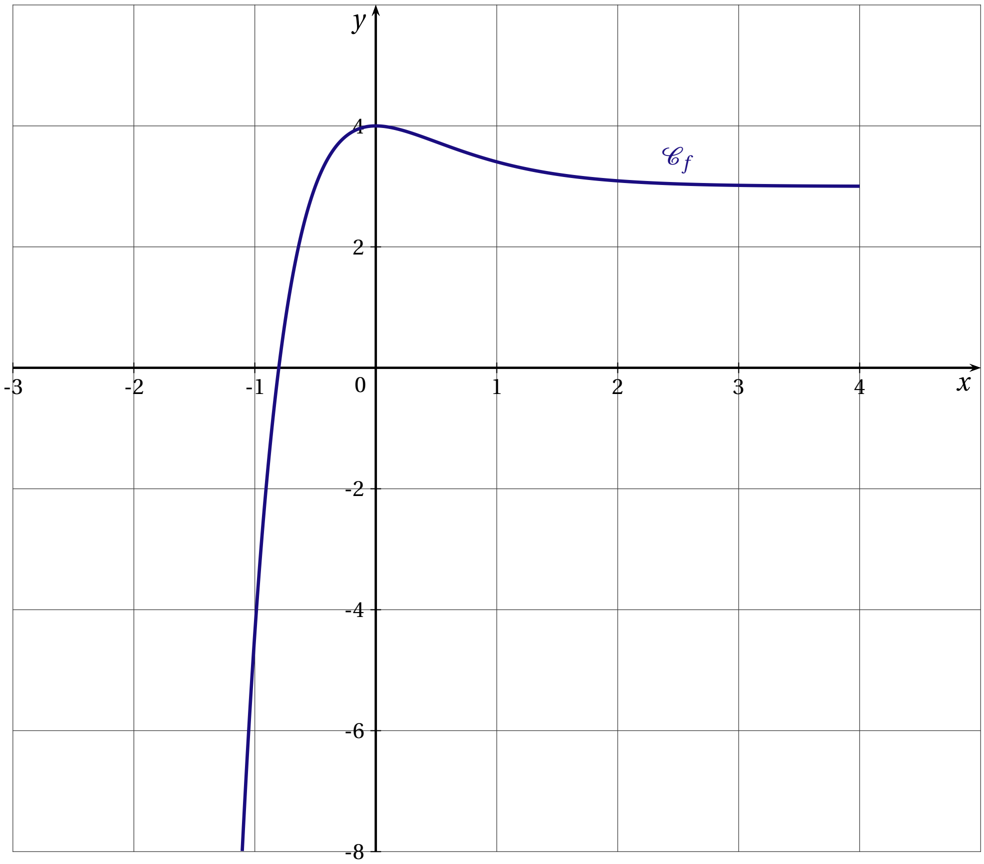
6. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.

   b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathscr{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

   c) Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée au centième.

ANNEXE



FRANCE MÉTROPOLITAINE, LA RÉUNION SEPTEMBRE 2018

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère l'algorithme ci-contre :
   On affecte 3 à la variable N.
   Que contient la variable S, arrondie au dixième, à la fin de l'exécution de l'algorithme?

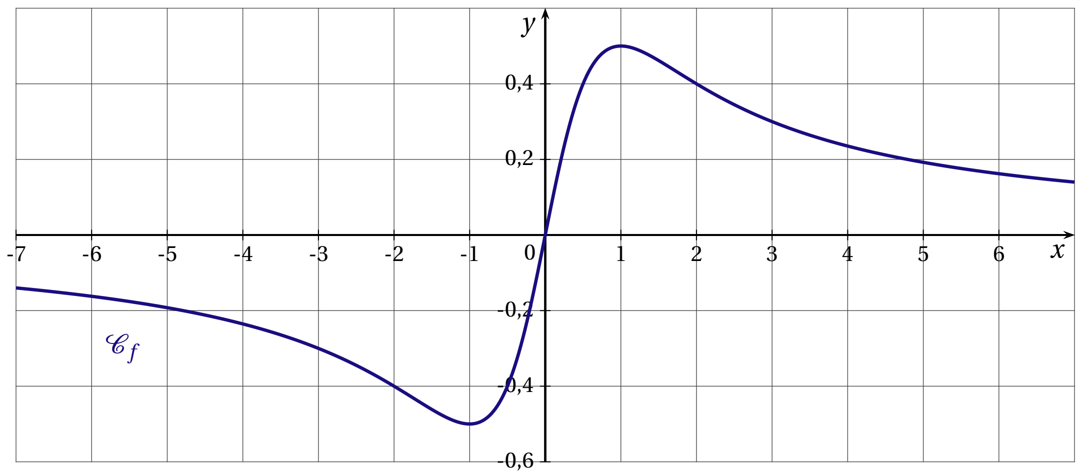
```
v ← 9
S ← 9
Pour i allant de 1 à N
    v ← 0,75 × v
    S ← S + v
Fin Pour
```

a) 24,6 b) -25 c) 27 d) 20,8

2. Soit a un réel, l'expression $\dfrac{2\mathrm{e}^{a-1}}{(\mathrm{e}^{a})^2}$ est égale à :

a) 1 b) $2\mathrm{e}^{3a-1}$ c) e^{-2} d) $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{a+1}}$

Pour les questions 3, 4 et 5, on considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.



3. Le nombre de solutions dans $[-7;7]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

4. Une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = -0,3$ sur l'intervalle $[-1;6]$ est :

a) -3 b) $-0,3$ c) 0,3 d) 3

5. Le nombre de points d'inflexion dans $[-7;7]$ de $\mathscr{C}_f$ est :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties A, B et C sont indépendantes.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si besoin, au millième.

PARTIE A

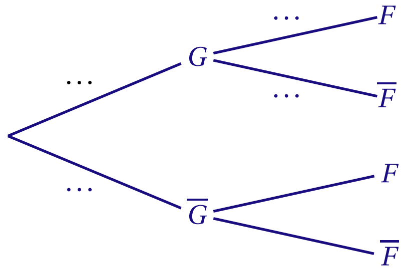
Une étude réalisée dans des écoles en France indique que 12,9 % des élèves sont gauchers. Parmi ces gauchers, on trouve 40 % de filles.
On choisit au hasard un élève et on considère les évènements suivants :

— G : « l'élève est gaucher » ;

— F : « l'élève est une fille ».

Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire. De plus, si B est un évènement de probabilité non nulle, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Recopier l'arbre pondéré ci-contre et traduire sur cet arbre les données de l'exercice.
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille gauchère ?
3. Dans ces écoles, il y a 51 % de filles.
   Montrer que $p\left(\overline{G} \cap F\right) = 0,4584$.
4. Sachant que l'on est en présence d'une élève fille, quelle est la probabilité qu'elle soit droitière ?



PARTIE B

En France, la proportion de gauchers est de 13 %.
Un club d'escrime compte 230 adhérents dont 110 gauchers.

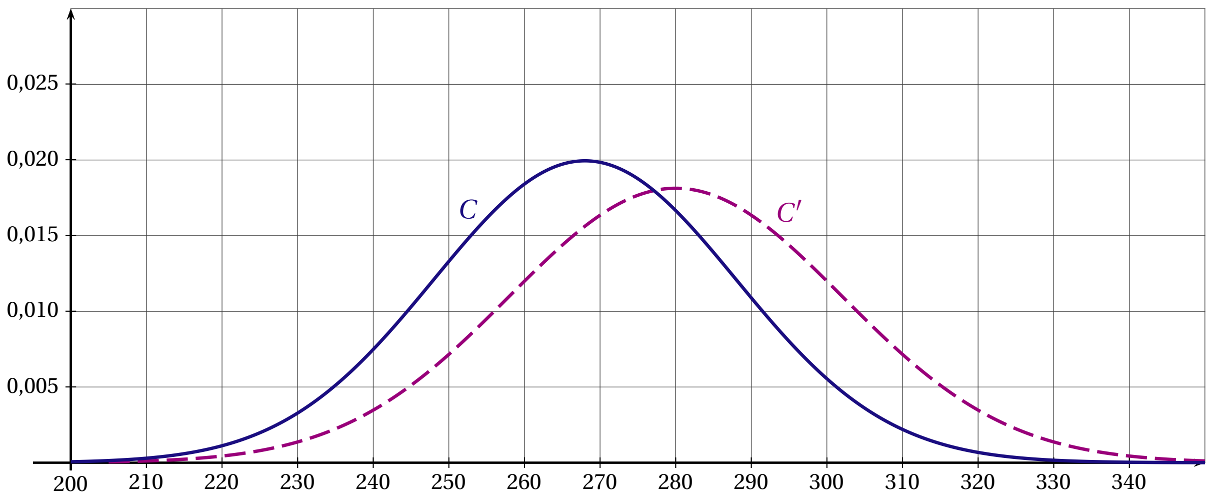
1. Quelle est la fréquence de gauchers observée dans le club d'escrime ?
2. À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, déterminer si le club d'escrime est représentatif de la population française.

PARTIE C

Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs gauchers est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 268$ et d'écart type $\sigma_1 = 20$.
Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs droitiers est modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 280$ et d'écart type $\sigma_2 = 22$.

1. a) Déterminer $P(X \leqslant 300)$ et $P(Y \leqslant 300)$.

   b) Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
2. Sur le graphique ci-dessous, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ représentent les fonctions de densité des variables aléatoires X et Y.
   Indiquer, pour chaque variable aléatoire X et Y, la courbe correspondante. Justifier.


0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
C
C′
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une école de danse a ouvert ses portes en 2016. Cette année là, elle comptait 800 inscrits.
Chaque année, elle prévoit une augmentation de 15 % des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'inscrits l'année $2016+n$.
Chaque inscrit paye une cotisation annuelle de 150 euros, sur laquelle l'école conserve un bénéfice de 20 euros après avoir payé tous ses frais fixes. L'école économise ce bénéfice afin de construire une nouvelle salle de danse. Pour cela, elle a besoin d'un budget de 125 000 euros.

PARTIE A

Les données sont saisies dans une feuille de calcul donnée en annexe.
Le format de cellule a été choisi pour que les nombres de la colonne C soient arrondis à l'unité.

1. Quelle formule peut-on saisir en C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre d'inscrits l'année de rang n ?
2. Quelle formule peut-on saisir en E3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le bénéfice cumulé à l'année de rang n ?
3. Compléter sur l'annexe, à rendre avec la copie, les six cellules des lignes qui correspondent aux années 2021 et 2022.
4. En quelle année l'école pourra-t-elle construire sa nouvelle salle de danse ?

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

	A	B	C	D	E
1	année	rang de l'année	nombre d'inscrits	bénéfice annuel	bénéfices cumulés
2	2016	0	800	16 000	16 000
3	2017	1	830	16 600	32 600
4	2018	2	865	17 300	49 900
5	2019	3	904	18 080	67 980
6	2020	4	950	19 000	86 980
7	2021	5			
8	2022	6			

PARTIE B

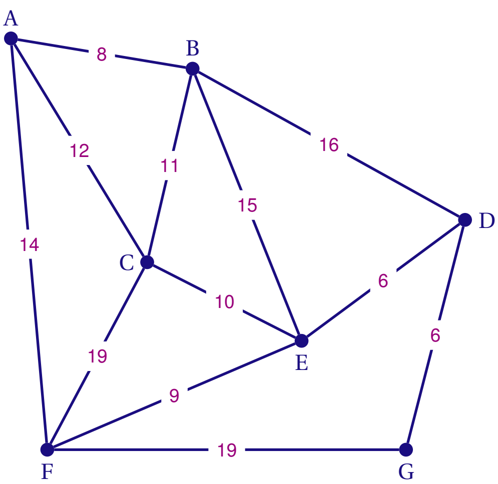
1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}15u_n - 90$ et préciser u_0.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 600$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   Préciser sa raison et son premier terme v_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 \times 1{,}15^n + 600$.
3. À partir de quelle année, cette école accueillera-t-elle plus de 2 000 adhérents ?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Un investisseur immobilier doit visiter plusieurs biens à vendre dans une ville.
Le graphe ci-contre représente le plan de la ville. Les biens à visiter sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F et G.
Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minute, entre deux biens.



1. a) Afin de découvrir la ville, l'investisseur souhaite emprunter, une fois et une seule, chacune des rues reliant les biens. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un tel trajet?

   b) Donner un exemple d'un tel trajet et préciser sa durée en minute.

2. Lorsque l'investisseur immobilier termine ses visites par le bien A, il souhaite revenir au bien G le plus rapidement possible. Déterminer ce plus court chemin à l'aide d'un algorithme. Quelle est sa durée en minute?

PARTIE B

L'investisseur commande une étude sur la population de sa ville qui lui révèle qu'en 2018, 80 % des locataires occupent un studio et 20 % des locataires occupent un T2 (appartement de deux pièces).
Le nombre total de locataires ne varie pas mais chaque année :

— la moitié des locataires en studio le conserve tandis que l'autre moitié change pour un T2;

— un quart des locataires en T2 change pour un studio tandis que les autres conservent leur T2.

On considère les événements suivants :

— S : « le locataire occupe un studio »;

— T : « le locataire occupe un T2 ».

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets S et T.

2. Pour tout entier naturel n, on note s_n la proportion de locataires en studio et t_n la proportion de locataires en T2 l'année $2018 + n$.

   a) Donner la matrice de transition associée à ce graphe.

   b) Donner l'état initial du graphe.

   c) Quel sera le pourcentage, arrondi à 0,1 %, de locataires en studio en 2023?

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.
2. On admet que, pour tout $x \in [1;5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

   a) Montrer que, pour tout $x \in [1;5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

   b) Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1;5]$.

3. a) Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.

   b) Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

4. a) Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1;5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
   Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1;5]$ par $G(x) = 2x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction g.

   b) En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1;5]$.

   c) Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

LIBAN 2018

EXERCICE 1 (6 points) *commun à tous les candidats*

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

— S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;

— M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

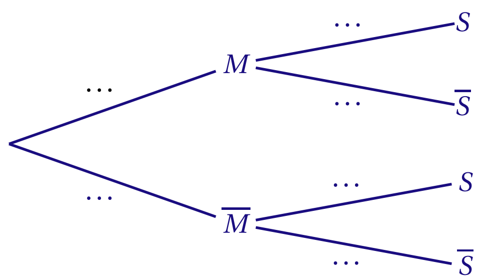
1. On admet que :

   — Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;

   — Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

   a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$; $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right)$.

   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   c) Montrer que : $P(S) = 0{,}02192$.

   d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}).
   Commenter le résultat obtenu.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   c) Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :

      — la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;

      — la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

   d) Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. a) Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.
   b) Calculer u_2.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0,75 × U + 20
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

   a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20			
Valeur de N	0			
Condition $U < 70$	vrai		vrai	faux

   b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b) Préciser son premier terme v_0.
   c) En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.
   d) Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.
   e) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   f) En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans un pays deux opérateurs se partagent le marché des télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

— parmi les clients de l'opérateur *EfficaceRéseau*, 70 % se réabonnent à ce même opérateur et 30 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* ;

— parmi les clients de l'opérateur *GenialPhone*, 55 % se réabonnent à ce même opérateur et 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.

On note E l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *EfficaceRéseau* » et G l'état : « la personne possède un contrat chez l'opérateur *GenialPhone* ».
À partir de 2018, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.
On note également :

— e_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;

— g_n la probabilité que le client possède un contrat avec l'opérateur *GenialPhone* au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$;

— $P_n = \begin{pmatrix} e_n & g_n \end{pmatrix}$ désigne la matrice ligne traduisant l'état probabiliste du système au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$.

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2018, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez *EfficaceRéseau*, ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets E et G.
2. a) Déterminer la matrice de transition M associée au graphe en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.
   b) Vérifier qu'au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020, environ 57 % des clients ont un contrat avec l'opérateur *EfficaceRéseau*.
3. a) On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
   Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $e_{n+1} = 0{,}25e_n + 0{,}45$.
4. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au 1$^{\text{er}}$ janvier $(2018+n)$:

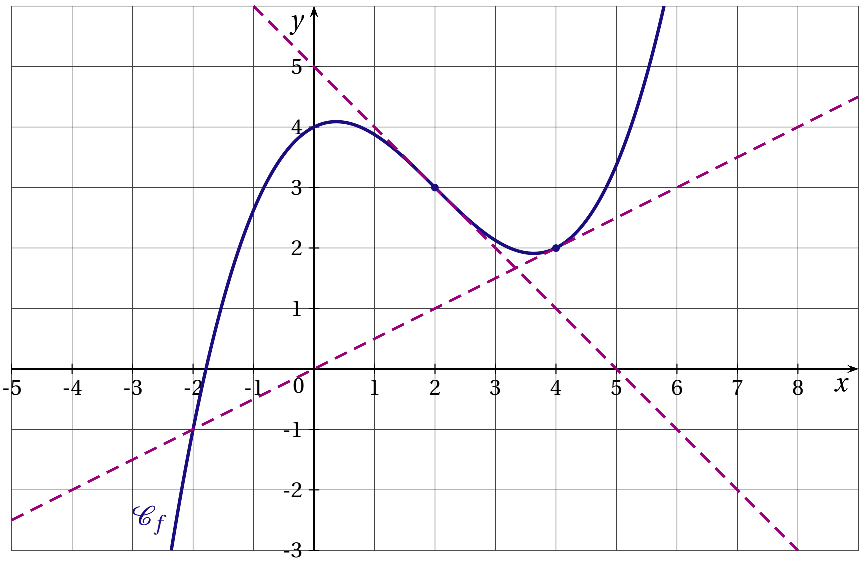
```
E ← 0,1
G ← 0,9
Pour I allant de 1 à N
    E ← ··· × E + ···
    G ← ···
Fin Pour
Afficher E et G
```

   b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $N = 3$. Arrondir au centième.
   c) Déterminer l'état stable du système et interpréter votre réponse dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule bonne réponse.

Pour les questions 1 et 2 et 3, on a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes aux points d'abscisses respectives 2 et 4.



1. $f'(4)$ est égal à :
   a) 2 b) -1 c) 0,5 d) 0

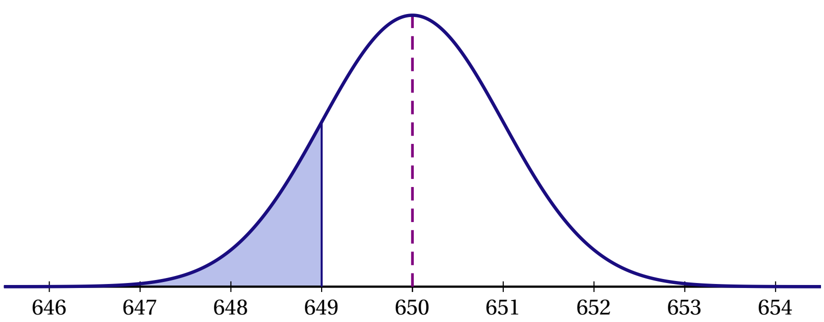
2. f est convexe sur l'intervalle :
   a) $]-\infty;2]$ b) $]-\infty;0,5]$ c) $[0;4]$ d) $[2;5]$

3. Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;5]$ est :
   a) $-0,1$ b) 2,5 c) 2,9 d) 14,5

4. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que

$$P(X \leqslant 649) \approx 0,1587.$$

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



a) $P(X \leqslant 651) \approx 0,6587$ b) $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0,683$
c) $\sigma = 650$ d) $\mu = 649$

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;25]$ par $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

   a) On admet que f est dérivable sur $[1;25]$.

   Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1;25]$, $f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.

   b) Résoudre dans $[1;25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1;25]$.

   d) Démontrer que dans l'intervalle $[1;25]$, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

   e) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

   On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

   En utilisant les résultats obtenus à la question 1 :

   a) Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.

   Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b) Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.

   c) Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

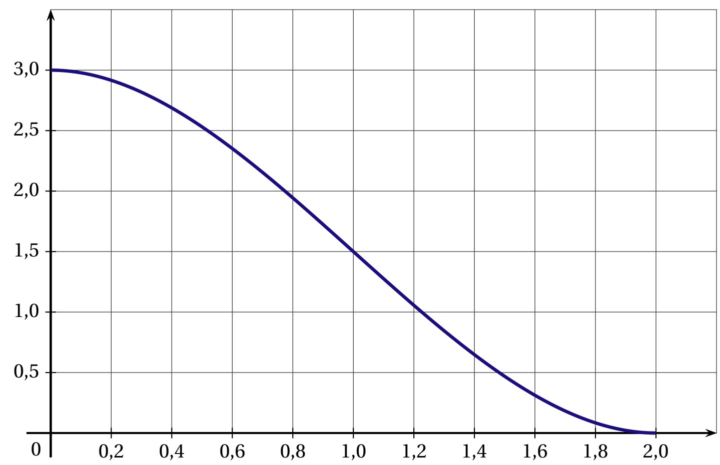
NOUVELLE CALÉDONIE 2018

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie.

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,5]$ par $f(x) = x\ln(x)+1$. Pour tout $x \in]0\,;\,5]$,
   a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
   b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}+1$
   c) $f'(x) = \ln(x)+2$
   d) $f'(x) = \ln(x)+1$
2. On donne ci-dessous la courbe C représentant un fonction g sur $[0\,;\,2]$.



   a) g est concave sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   b) $g''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;\,2]$.
   c) La courbe C admet un point d'inflexion sur $[0\,;\,2]$.
   d) $g'(1) > 0$.
3. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} 3\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. On a :
   a) $I = 3$
   b) $I = 6$
   c) $I = -3$
   d) $I = 3\ln(2)$
4. Pour tout évènement E, on note $P(E)$ sa probabilité. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}3$.
   a) $P(X=3) = 120 \times 0{,}3^2 \times 0{,}78$
   b) $P(X=3) = 12 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7^7$
   c) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}972$
   d) L'espérance de X est 5,15.

EXERCICE 2 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

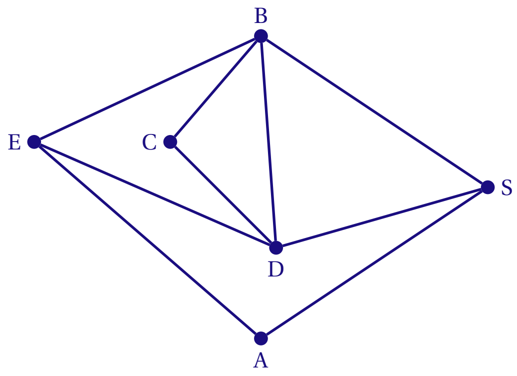
Dans un quartier d'une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque trimestre.
Après observations, ils constatent que, chaque trimestre, 123 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 37,5 % des chômeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.
Au début du premier trimestre 2017 (1er janvier 2017), le nombre de demandeurs d'emploi était de 490.
On note u_n le nombre de demandeurs d'emploi au début du n-ième trimestre après le 1er janvier 2017.
Ainsi, $u_1 = 490$.
Dans tout l'exercice, les valeurs seront arrondies à l'unité.

1. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième et du troisième trimestre 2017.
2. Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = 0{,}625u_n + 123.$$

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 328$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.
   b) Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 162 \times 0{,}625^{n-1} + 328$.
4. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du deuxième trimestre 2019.
5. Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30 % par rapport au premier trimestre 2017 ?
   Si oui, indiquer à quelle date son objectif sera atteint. Justifier la réponse.

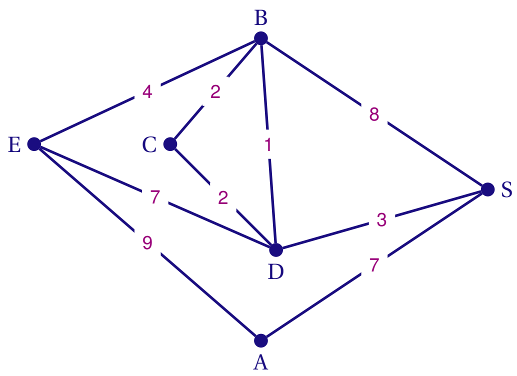
EXERCICE 2 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*



Naïma fait partie d'une école de musique. En vue du spectacle de fin d'année, elle souhaite déposer à vélo des affiches publicitaires sur les panneaux de sa ville. Les pistes cyclables reliant ces panneaux sont représentées sur le graphe $\mathcal{G}$ ci-contre.
Le sommet E désigne son école de musique, le sommet S la salle de spectacle et les sommets A, B, C, et D les panneaux d'affichage.

1. Déterminer, en justifiant la réponse, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   a) complet;
   b) connexe.
2. Naïma pourra-t-elle déposer ses affiches sur tous les panneaux en allant de son école de musique à la salle de spectacle et en empruntant une et une seule fois chaque piste cyclable?
   Justifier la réponse. Si un tel trajet existe, en citer un.
3. Donner la matrice d'adjacence M liée à ce graphe dans laquelle les sommets seront classés dans l'ordre suivant : E, A, B, C, D, S.
4. On donne la matrice incomplète M^2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les coefficients manquants de la matrice M^2, en détaillant les calculs.
   b) Combien existe-t-il de chemins permettant de se rendre de l'école de musique à la salle de spectacle en empruntant exactement deux pistes cyclables?
5. Lorsqu'elle a déposé ses affiches, Naïma a relevé le temps de trajet entre chaque panneau d'affichage.
   Le graphe ci-dessous indique ces durées, exprimées en minutes.

   Indiquer, à l'aide d'un algorithme, le chemin permettant à Naïma de se rendre le plus rapidement possible de son école de musique à la salle de spectacle le soir de la représentation.
   Donner la durée de ce parcours.



EXERCICE 3 (6 points) *commun à tous les candidats*

Dans une entreprise, 60 % des salariés viennent au travail en transports en commun et parmi eux, seulement 7,5 % ont un trajet d'une durée inférieure à 30 minutes. Parmi les employés qui n'utilisent pas les transports en commun, 28,5 % ont un trajet d'une durée inférieure à 30 minutes.
Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.
On interroge au hasard un employé de l'entreprise et on considère les évènements suivants :

— C : « l'employé utilise les transports en commun » ;

— R : « le trajet de l'employé a une durée inférieure à 30 minutes ».

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

PARTIE A

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation et le compléter.
2. a) Calculer $P(C \cap R)$ et interpréter le résultat obtenu.
   b) Montrer que $P(R) = 0,159$.
3. On interroge un employé choisi au hasard dont la durée du trajet est inférieure à 30 minutes. Calculer la probabilité qu'il utilise les transports en commun.

PARTIE B

Une étude a montré que la durée du trajet en minutes d'un employé peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. Déterminer $P(X \leqslant 30)$. Indiquer si ce résultat est cohérent avec la partie A, en justifiant la réponse.
2. Déterminer $P(20 \leqslant X \leqslant 60)$ et en déduire $P(X > 60)$.
3. Dans cette question, on se propose de déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \geqslant a) \approx 0,008$.
   a) On admet que lorsque la valeur de a augmente, la valeur de $P(X \geqslant a)$ diminue.
   On considère l'algorithme ci-dessous, où X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart type $\sigma = 10$.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il permette de répondre à la question.

```
a ← 60
Y ← 0,023
Tant que Y > 0,008
    a ← ···
    Y ← P(X ⩾ a)
Fin Tant que
```

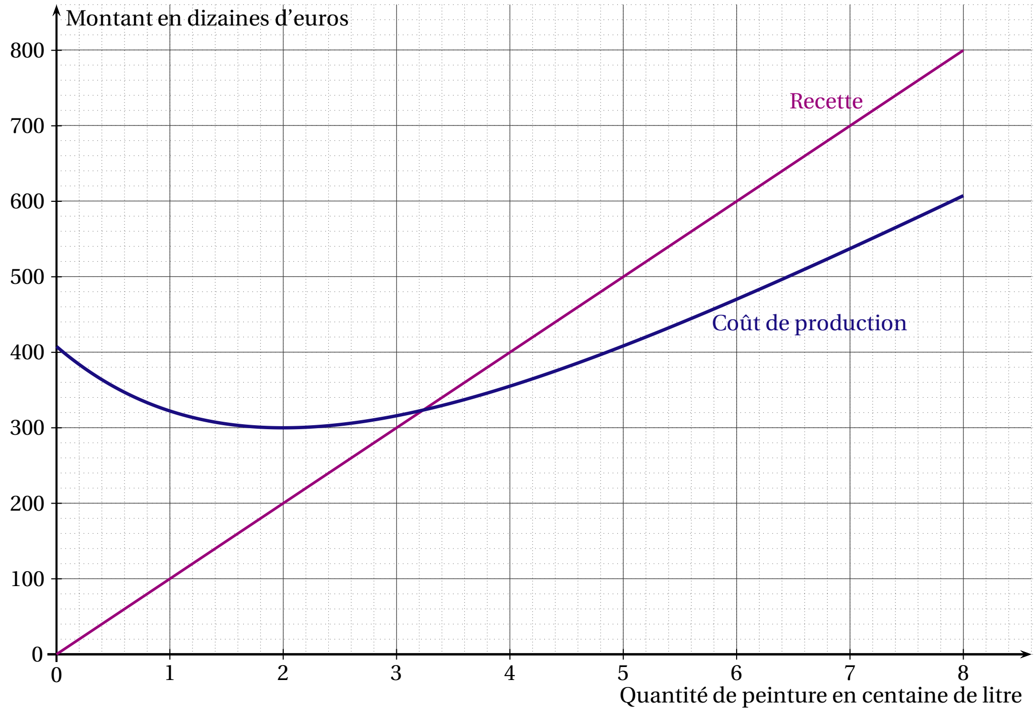
   b) On exécute cet algorithme.
   Recopier et compléter le tableau suivant, en utilisant autant de colonnes que nécessaire.

a	60	61	62			
Y	0,023	0,018	0,014			

4. Donner la valeur de a obtenue après exécution de l'algorithme.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

L'entreprise ECOLOR est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres. Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.



PARTIE A : lecture graphique

À l'aide du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le coût de production de 200 litres de peinture.
2. Quelle est la production de peinture pour avoir une recette de 5 000 euros?
3. À partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice?
4. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3 000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 800 litres? Justifier.

PARTIE B : étude du bénéfice

Le bénéfice en dizaine d'euros correspondant à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ par :

$$f(x) = 25x - 150\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(8)$, puis en donner les valeurs arrondies au centième.
2. Montrer que la dérivée f' de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ est :

$$f'(x) = 25 + 75\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$

3. Déterminer le signe de f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $[0;8]$.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;8]$ puis en donner la valeur arrondie au centième.

   b) En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise ECOLOR réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.

NOUVELLE CALÉDONIE MARS 2019

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Des professeurs d'éducation physique et sportive proposent à leurs élèves de terminale un cycle de demi-fond qui consiste à courir 3 fois 500 mètres.
Le temps cumulé obtenu à l'issue d'un cycle définit une note de performance notée sur 14 points.
Le barème est différent entre les garçons et les filles.
4 classes sont regroupées et 40 % des élèves sont des filles.
60 % des filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

PARTIE A

On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves.
On note :

— F l'évènement : « L'élève est une fille » ;

— G l'évènement : « L'élève est un garçon » ;

— M l'évènement : « La note de performance est supérieure ou égale à 7 sur 14 ».

Pour tout évènement E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ sa probabilité. Pour tout évènement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Déterminer $P(F \cap M)$.
3. Sachant que $P(M) = 0{,}64$, déterminer $P(G \cap M)$ puis en déduire $P_G(M)$, arrondie au millième.
4. Sachant qu'une personne interrogée a obtenu une note de performance supérieure ou égale à 7 points sur 14, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

PARTIE B

On considère un groupe de 70 filles d'un autre établissement.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles de ce groupe ayant une note de performance supérieure ou égale à 7 sur 14.
Les notes obtenues sont indépendantes les unes des autres.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = 0{,}6$.

Calculer la probabilité arrondie au dix-millième qu'exactement 30 filles obtiennent une note de performance supérieure ou égale à 7.

PARTIE C

Cette épreuve permet de développer sa VMA (vitesse maximale aérobie) qui correspond à une vitesse de course rapide. L'unité de mesure de la VMA est le km/h.
On choisit un élève au hasard parmi les 120 élèves.
On admet que la VMA d'un élève pris au hasard est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 11{,}8$ et d'écart type $\sigma = 1{,}2$.

1. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3}, qu'un élève de terminale de ce lycée ait une VMA comprise entre 10 et 13 km/h ?
2. Déterminer la valeur arrondie au dixième de α tel que $P(Y \leqslant \alpha) = 0{,}8$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Aucune justification n'est demandée.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie.

PARTIE A

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

   La valeur exacte de $f'(\mathrm{e})$ est :

   a) 0 b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ c) 1 d) e^2

2. Entre janvier 2005 et décembre 2012, le prix hors taxe du tarif réglementé du gaz a augmenté de 80 %.

   Quel est le taux annuel d'augmentation du prix du gaz sur la même période arrondi à 0,01 % ?

   a) 10 % b) 7,62 % c) 6,75 % d) 8,76 %

3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q=1{,}05$ et de premier terme $u_1=3$.

   La valeur exacte de $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{49}$ est égale à :

   a) $S=\dfrac{1-1{,}05^{49}}{1-1{,}05}$ b) $S=3\times\dfrac{1+1{,}05^{49}}{1+1{,}05}$ c) $S=595{,}280$ d) $S=3\times\dfrac{1-1{,}05^{49}}{1-1{,}05}$

4. Lors du passage en caisse dans un supermarché, on considère que le temps d'attente d'un client, exprimé en minute, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;12]$.

   Quelle est la probabilité que le temps d'attente d'un client soit compris entre 2 et 5 minutes ?

   a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{7}{12}$ c) $\dfrac{1}{12}$ d) $\dfrac{1}{3}$

PARTIE B

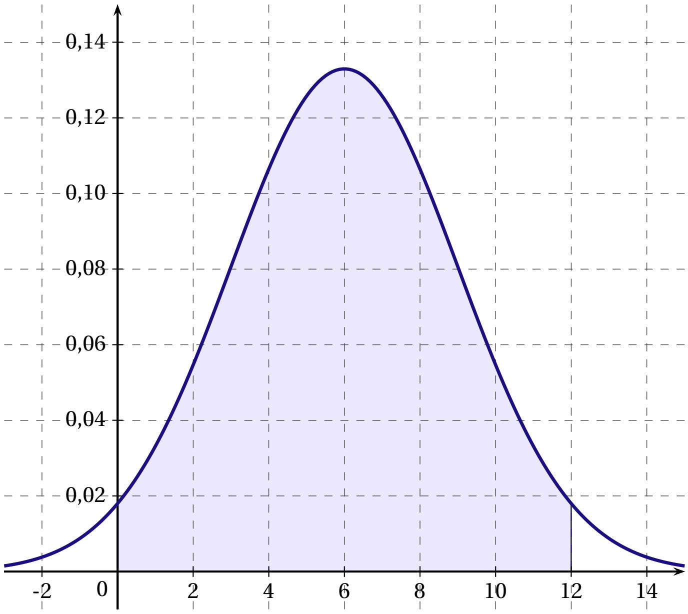
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.
Une réponse exacte justifiée rapporte 1 point, une réponse fausse, non justifiée ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Lors d'une élection, un candidat sollicite un institut de sondage pour qu'il détermine un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion des intentions de vote en sa faveur.

   AFFIRMATION 1 : Afin que cet intervalle ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02, l'institut de sondage doit interroger au minimum 10 000 personnes.

2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 6.

   On donne ci-dessous la courbe qui représente la densité f associée à la variable aléatoire X. La partie grisée vaut 0,95 unité d'aire.



AFFIRMATION 2 : L'écart type de X est égal à 6.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie.
À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, 80 % des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

1. a) Donner une estimation du nombre d'enfants inscrits à l'été 2018.

   b) Donner le nombre minimal de tentes nécessaire pour loger l'ensemble des inscrits pendant l'été 2018.

2. Soit (u_n) la suite numérique qui modélise le nombre d'inscrits lors de l'année $2017 + n$. Ainsi $u_0 = 160$.
   Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.

3. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de u_n	160					

   a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017 + n$?

   b) Recopier et compléter ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier.

   c) Donner une estimation du nombre d'inscrits en 2021.

4. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 250$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et préciser son terme initial.

   b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 250 - 90 \times 0{,}8^n$.

   d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. En 2017, la colonie comptait 22 tentes.
   Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose l'algorithme ci-dessous :

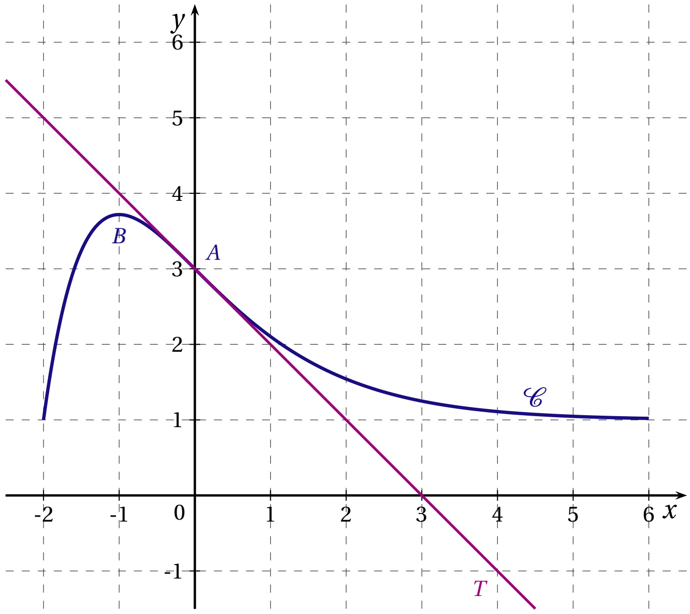
```
U ← 160
N ← 0
Tant que ············ faire
    U ← 0,8U + 50
    N ← ···
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre au problème.

   b) Quelle est la valeur de N obtenue après exécution de cet algorithme ?

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[-2;6]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.
Le point A de coordonnées $(0;3)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2;6]$.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point B d'abscisse -1.



PARTIE A

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$.
2. Déterminer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
3. Déterminer le signe de f' sur $[-2;6]$.
4. Donner la convexité de f sur $[-2;6]$.
5. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

PARTIE B

La fonction f est définie par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} + 1$ pour tout $x \in [-2;6]$.

1. Déterminer la valeur exacte de $f(6)$ puis en donner la valeur arrondie au centième.
2. Montrer que, pour tout $x \in [-2;6]$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Étudier le signe de f' sur $[-2;6]$ puis donner le tableau des variations de f sur $[-2;6]$.
4. Un logiciel de calcul formel donne l'information suivante :

`Dériver` $((-x-3)\mathrm{e}^{-x})$
$(x+2)\mathrm{e}^{-x}$

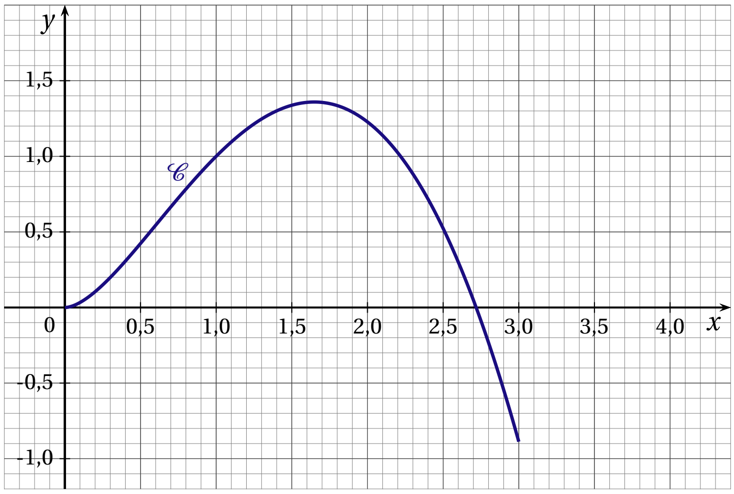
   a) Déterminer une primitive de f sur $[-2;6]$.

   b) Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1;0]$. On donnera sa valeur exacte puis sa valeur arrondie au dixième.

POLYNÉSIE 2018

EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;3]$ par $f(x) = x^2(1-\ln x)$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;3]$, on note f' sa fonction dérivée et on admet que sa dérivée seconde f'' est définie sur $]0;3]$ par : $f''(x) = -1-2\ln x$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Sur $]0;3]$, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse :

   a) e b) 2,72 c) $\frac{1}{2}\mathrm{e}+1$

2. $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse :

   a) e b) $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ c) $\sqrt{\mathrm{e}}$

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;3]$ on a :

   a) $f'(x) = x(1-2\ln x)$ b) $f'(x) = -\frac{2}{x}$ c) $f'(x) = -2$

4. Sur l'intervalle $[1;3]$:

   a) f est convexe b) f est décroissante c) f' est décroissante

5. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e s'écrit :

   a) $y = -x+\mathrm{e}$ b) $y = -\mathrm{e}x$ c) $y = -\mathrm{e}x+\mathrm{e}^2$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,001 près.

PARTIE A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

— 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

— 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

— 80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

— A : « l'employé fait partie du service A » ;

— B : « l'employé fait partie du service B » ;

— C : « l'employé fait partie du service C » ;

— T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité d'un évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$.

1. a) Justifier que $P(A) = 0{,}45$.
   b) Donner $P_A(T)$.
   c) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.
3. Montrer que $P(T) = 0{,}482$.
4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

PARTIE B

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque employé en France, associe son temps de trajet quotidien, en minutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart type 10.

1. Calculer la probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes.
2. Déterminer $P(X > 50)$.
3. À l'aide de la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée du nombre a à l'unité près, tel que $P(X > a) = 0{,}2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

PARTIE C

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressés par cette offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieure à 0,15 avec un niveau de confiance de 0,95. Quel est le nombre minimal d'employés à consulter ?

EXERCICE 3 (4 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

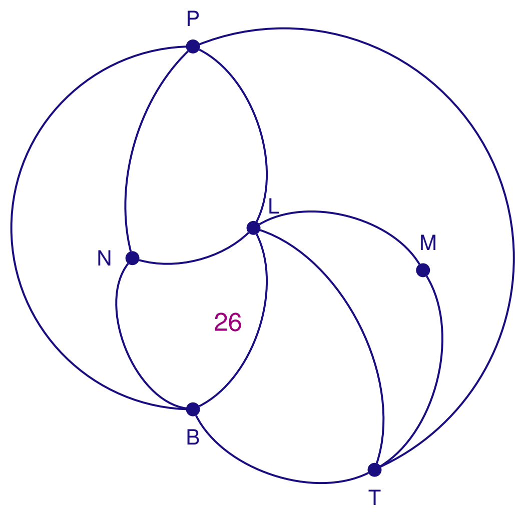
En économie le résultat net désigne la différence entre la recette et les charges d'une entreprise sur une période donnée. Lorsqu'il est strictement positif, c'est un bénéfice.
Propriétaire d'une société, Pierre veut estimer son résultat net à la fin de chaque mois.
À la fin du mois de janvier 2018, celui-ci était de 10 000 euros.
Pierre modélise ce résultat net par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 10000$ et de terme général u_n tel que $u_{n+1} = 1{,}02u_n - 500$ où n désigne le nombre de mois écoulés depuis janvier 2018.

1. Quel est le montant du résultat net réalisé à la fin du mois de mars 2018 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 25000$.
   a) Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme a_0 et la raison.
   b) Exprimer a_n en fonction de n et montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 25000 - 15000 \times 1{,}02^n$.
   c) Résoudre l'inéquation $25000 - 15000 \times 1{,}02^n > 0$ où n désigne un entier naturel.
   Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.
3. À l'aide d'un algorithme, Pierre souhaite déterminer le cumul total des résultats nets mensuels de la société jusqu'au dernier mois où l'entreprise est bénéficiaire.
   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le nombre de mois pendant lesquels l'entreprise est bénéficiaire et la variable S le cumul total des résultats nets mensuels sur cette période.

```
U ← 10000
S ← 0
N ← 0
Tant que ..................
    S ..................
    U ..................
    N ..................
Fin Tant que
```

EXERCICE 3 (4 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).
Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



PARTIE A

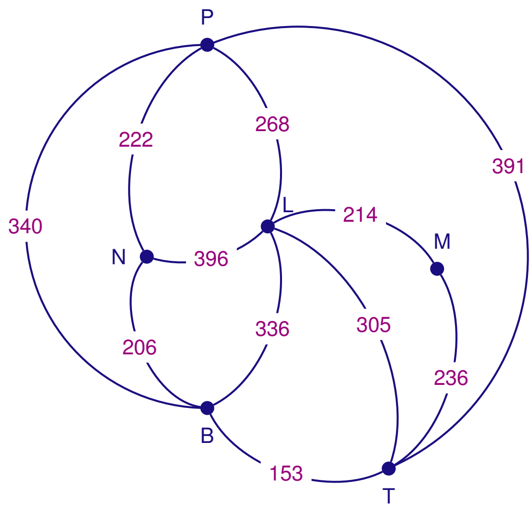
1. a) Quel est l'ordre du graphe ?
   b) Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.
2. a) On admet que le graphe est connexe. Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.
   b) Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.
3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétique). On donne :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

   a) Recopier et compléter la matrice d'adjacence.
   b) Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente.
   Déterminer le nombre de trajets possibles.

PARTIE B

On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.
Déterminer un trajet qui minimise son temps de parcours.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

— la fonction f définie sur $[0;14]$ par $f(x) = 2\,000\mathrm{e}^{-0,2x}$ pour le produit A ;

— la fonction g définie sur $[0;14]$ par $g(x) = 15x^2 + 50x$ pour le produit B, où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.

PARTIE A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes.
   Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

PARTIE B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;14]$ on pose $h(x) = f(x) + g(x)$.
On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0;14]$.

1. a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?
   b) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;14]$ $h'(x) = -400\mathrm{e}^{-0,2x} + 30x + 50$.
2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle $[0;14]$ est :

x	0		14
variation de h'			$h'(14) \approx 446$
	-350	$\nearrow$	

a) Justifier que l'équation $h'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;14]$ et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

b) En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;14]$.

3. Voici un algorithme :

$Y \leftarrow -400\exp(-0{,}2X) + 30X + 50$
Tant que $Y \leqslant 0$
    $X \leftarrow X + 0{,}1$
    $Y \leftarrow -400\exp(-0{,}2X) + 30X + 50$
Fin Tant que

a) Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?

b) En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0,001 près de α après l'exécution de l'algorithme.

4. a) Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur $[0;14]$ est :

$$H(x) = -10\,000\mathrm{e}^{-0{,}2x} + 5x^3 + 25x^2.$$

b) Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

POLYNÉSIE SEPTEMBRE 2018

EXERCICE 1 (4 points) *commun à tous les candidats*

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Une justification est attendue.

AFFIRMATION A

Un objet subit trois augmentations successives de 10 %. Une baisse de 25 % suffit à ramener le prix de cet objet en dessous de son prix initial.

AFFIRMATION B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées $(2;3)$.

AFFIRMATION C

La valeur exacte de la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\dfrac{1}{3}$ est : $6\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{13}\right]$.

AFFIRMATION D

Dans un hôtel, le petit déjeuner n'est servi que jusqu'à 10 heures 15 minutes. Pierre, qui réside dans cet hôtel, se lève entre 9 heures et 11 heures.
On admet que l'heure de lever de Pierre est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9;11]$. La probabilité que Pierre ne puisse pas prendre son petit déjeuner est 0,425.

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.
Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,001 *près*

PARTIE A

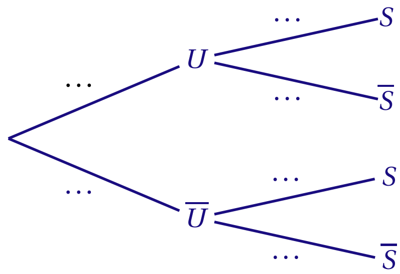
Une étude portant sur la recharge des véhicules électriques indique que 10 % des recharges sont effectuées sur des bornes publiques. Dans les autres cas, la recharge s'effectue chez des particuliers.
Il existe deux types de recharge : la recharge « standard » et la recharge « accélérée ».
Les recharges « standard » représentent 25 % des recharges effectuées sur des bornes publiques et 95 % des recharges effectuées chez les particuliers.
On choisit au hasard un véhicule électrique qui vient d'être rechargé et on considère les évènements suivants :

— U : « la recharge a été effectuée sur une borne publique » ;

— S : « la recharge a été effectuée de façon standard ».

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus, $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Justifier que $P(S) = 0{,}88$.
3. Sachant que le véhicule choisi a été rechargé de façon standard, calculer la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique.

PARTIE B

Une société fabriquant des batteries pour véhicules électriques effectue une charge complète de chacune de ses batteries lors de la fabrication. Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de charge de ces batteries, exprimée en heures, par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 6 et d'écart type σ.

1. Sachant qu'environ 95 % des durées de charge sont comprises entre 2,6 h et 9,4 h, justifier que l'on peut choisir $\sigma = 1{,}7$.
2. a) Calculer $P(T > 7)$.

   b) Sachant que l'une des batteries mise en charge n'est pas rechargée complètement au bout de 7 heures, quelle est la probabilité qu'elle ne le soit toujours pas au bout de 9 heures ?

PARTIE C

Le fabriquant de batteries affirme que 80 % de ses batteries peuvent assurer 350 cycles de rechargement complet sans perte significative de puissance.
Une association de consommateurs réalise une enquête sur 57 batteries de cette marque.
Parmi celles-ci, seules 40 n'ont pas subi de perte de puissance significative. Cette étude peut-elle remettre en cause l'affirmation du constructeur ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Au 1er janvier 2018, madame DURAND dispose d'un capital de 16 000 €. Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.

PARTIE A

On modélise le montant du capital de madame DURAND au 1er janvier par une suite (u_n). Plus précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital de madame DURAND disponible le 1er janvier de l'année $2018+n$.
On a donc $u_0 = 16000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
3. a) Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant votre réponse.
   b) Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
4. À l'aide d'un algorithme, madame DURAND souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur ou égal à 2 000 €.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← ···
N ← 0
Tant que U ···
    N ← ···
    U ← ···
Fin Tant que
```

   b) Quelle est la valeur numérique contenue par la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme?

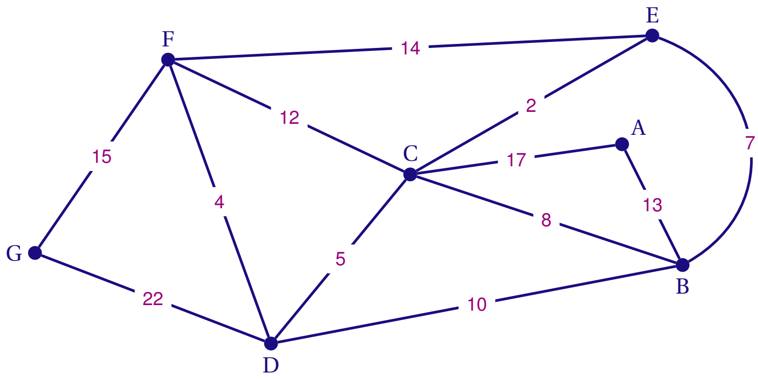
PARTIE B

Cherchant à anticiper la diminution de son capital disponible, madame DURAND décide d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.
On note v_n la valeur du capital le 1er janvier de l'année $2018+n$. On a ainsi $v_0 = 16000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0{,}85 \times v_n + 300$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 2000$.
   a) Calculer w_0.
   b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85.
   c) En déduire que, pour tout entier n, $v_n = 2000 + 14000 \times 0{,}85^n$.
3. En s'y prenant ainsi, madame DURAND espère toujours disposer d'un capital supérieur à 2 500 €. A-t-elle raison?

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

En vacances, Assan et Chloé projettent de visiter sept sites touristiques et se sont procurés le plan des sentiers reliant ces sites.
Ci-dessous, ils ont représenté ce plan par un graphe connexe pondéré par les temps de parcours en minutes séparant les lieux de visites notés A, B, C, D, E, F et G.



PARTIE A

1. Est-il possible, pour Assan et Chloé, d'effectuer un trajet empruntant une et une seule fois tous les sentiers ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer, par la méthode de votre choix, le trajet le plus court leur permettant de relier la station A à la station G en précisant le temps de parcours.

PARTIE B

Sur les sites B et G, l'office de tourisme loue des audio-guides que les visiteurs peuvent rendre sur l'un ou l'autre des deux sites à la fin de la journée. Une étude a mis en évidence que chaque jour :

— 10 % des audio-guides loués sur le site B sont rendus sur le site G, les autres étant rendus sur le site B ;

— 15 % des audio-guides loués sur le site G sont rendus sur le site B, les autres étant rendus sur le site G.

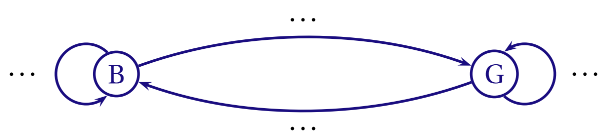
On étudie l'évolution de la répartition des audio-guides sur les deux sites.
Pour tout entier naturel non nul n :

— on note b_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site B à la fin de la n-ième journée,

— on note g_n la probabilité qu'un audio-guide choisi au hasard soit rendu sur le site G à la fin de la n-ième journée.

À l'ouverture de la saison, il y a autant d'audio-guides sur le site B que sur le site G.
Pour tout entier naturel non nul n, on note $P_n = \begin{pmatrix} b_n & g_n \end{pmatrix}$ la matrice de l'état probabiliste à la fin de la n-ième journée. On rappelle que $b_n + g_n = 1$. On pose $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. Donner la matrice de transition M associée au graphe.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n M$.
   a) Calculer P_2. On approchera les valeurs à 10^{-3} près.
   b) Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

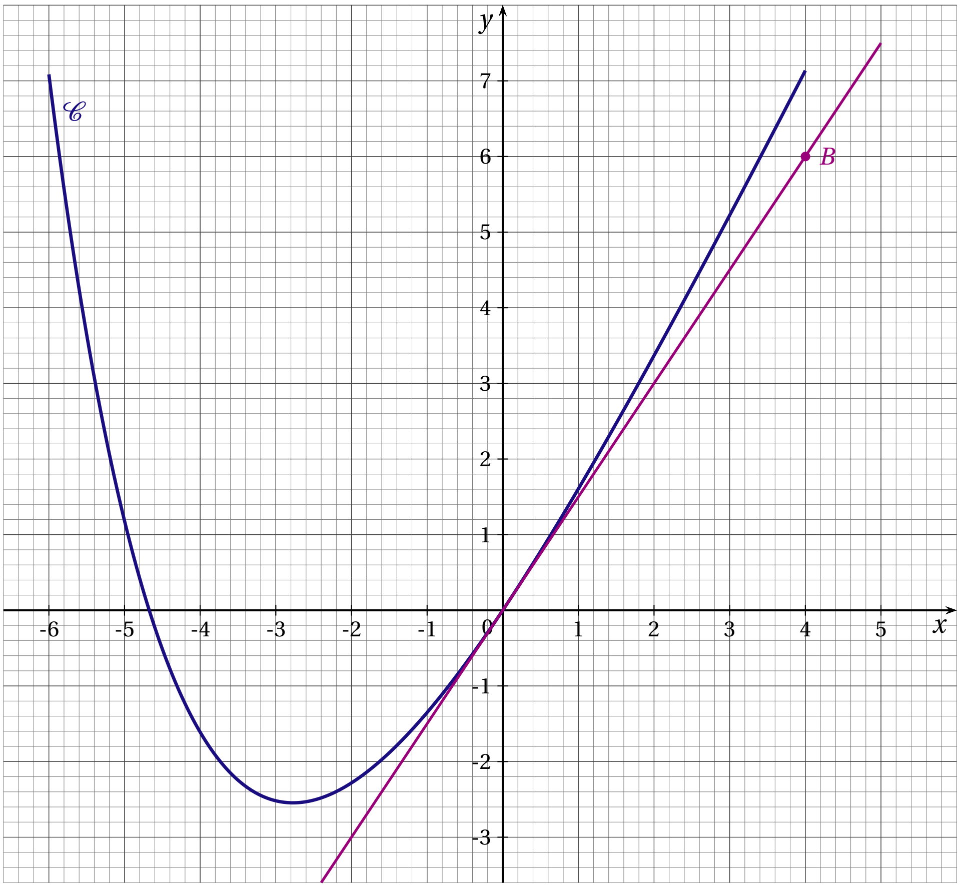
Dans la suite, on admettra que pour tout entier naturel n, on a $b_{n+1} = 0{,}75 b_n + 0{,}15$.

4. Parmi les quatre propositions suivantes, une seule fournit, pour tout entier n, l'expression de b_n en fonction de n. Préciser laquelle et justifier votre réponse :
   a) $b_n = -0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}6$
   b) $b_n = -0{,}6 \times 0{,}75^n + 0{,}1$
   c) $b_n = 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}6$
   d) $b_n = -0{,}1 \times 0{,}75^n - 0{,}6$

5. La personne chargée de la gestion des audio-guides prétend que le site G accueillera un jour moins de 35 % des audio-guides. Qu'en pensez-vous ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 (6 points) *commun à tous les candidats*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6; 4]$ et dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde sur l'intervalle $[-6; 4]$.



On a représenté $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
La droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère et par le point $B(4; 6)$.

1. Avec la précision permise par le graphique :
   a) donner la valeur de $f(0)$;
   b) donner la valeur de $f'(0)$;
   c) conjecturer la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 4]$.
2. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$ et que son expression est
$$f(x) = 2x - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$
   a) Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
   b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est l'intervalle $[-2\ln(4); 4]$.
   c) Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-6; 4]$.
   d) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
3. Donner un encadrement au centième près de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-6; 4]$.
4. Démontrer la conjecture émise dans la question 1. c.
5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $g(x) = x^2 - x - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
   On admet que la fonction g est dérivable sur $[0; 4]$.

a) Montrer que la fonction g est une primitive la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

b) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
En donner une valeur approchée à 0,01 près.

PONDICHÉRY 2018

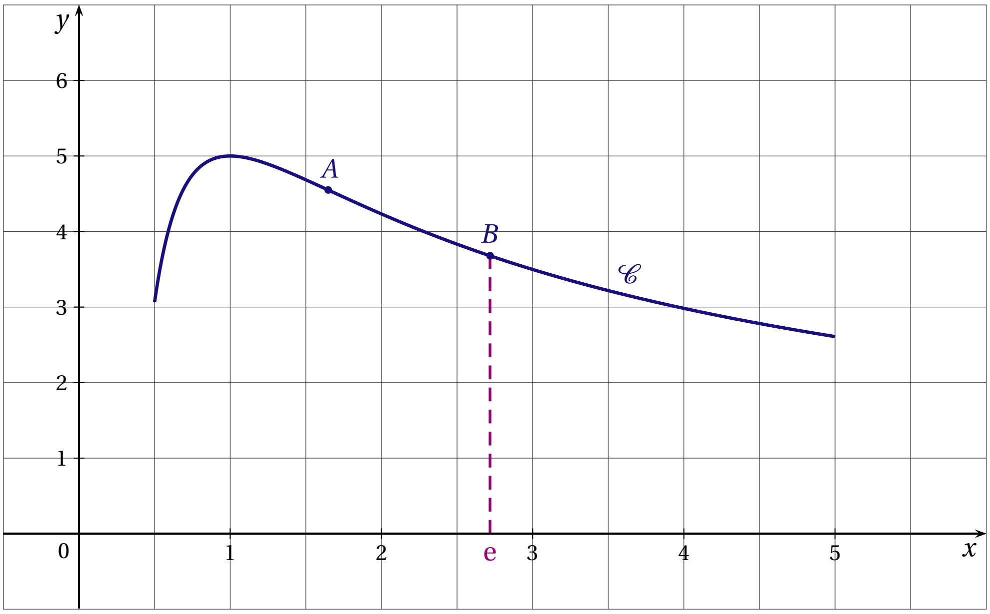
EXERCICE 1 (5 points) *commun à tous les candidats*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5;5]$ par :

$$f(x) = \frac{5+5\ln x}{x}.$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0,5;5]$. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,5;5]$ on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}.$$

1. La fonction f' est :
   a) positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5;5]$
   b) négative ou nulle sur l'intervalle $[1;5]$
   c) négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5;1]$
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est égal à :

   a) $-\dfrac{5}{e^2}$ b) $\dfrac{10}{e}$ c) $\dfrac{5}{e^3}$

3. La fonction f' est :
   a) croissante sur l'intervalle $[0,5;1]$
   b) décroissante sur l'intervalle $[1;5]$

c) croissante sur l'intervalle $[2;5]$

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

a) 1,65 b) 1,6 c) $e^{0,5}$

5. On note $\mathscr{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

a) $20 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 30$ b) $10 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 15$ c) $5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$

EXERCICE 2 (5 points) *commun à tous les candidats*

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,01 près.

PARTIE A

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).
Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40 % paient en espèces;
  - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact;
  - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret;
  - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.
On considère les évènements suivants :

— V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € »;
— E : « pour son achat, le client a réglé en espèces »;
— C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret »;
— S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. a) Donner la probabilité de l'évènement V, notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.
   b) Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.
   b) Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à 0,62.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant.
On admet que X suit la loi normale de moyenne 27,5 et d'écart-type 3.
On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.
2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre 24,50 € et 30,50 €.

PARTIE C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique.
Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique.
Déterminer, avec un niveau de confiance de 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité ES*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.
   On précisera la valeur de v_0.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

   a) Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.
   b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   c) Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 €par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
   En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.
   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :
   — d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   — chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

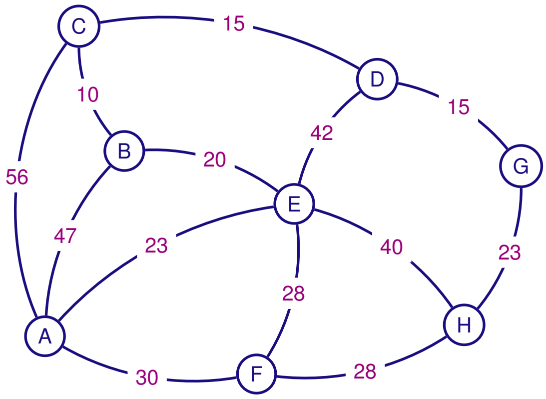
   a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.
   b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.
   c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
   Argumenter la réponse.

EXERCICE 3 (5 points) *candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.
Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

PARTIE B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

— s'il a utilisé les transports en commun un jour donné, il utilisera le covoiturage le lendemain avec une probabilité de 0,53;

— s'il a utilisé le covoiturage un jour donné, il effectuera le lendemain ses déplacements en transport en commun avec une probabilité de 0,78.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.
Pour tout entier naturel n, on note :

— c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018;

— t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018;

La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.
Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. a) Préciser l'état probabiliste initial P_0.

   b) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets :

   — « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage;

   — « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.

2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.

3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

4. Soit la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.

   a) Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.

   b) Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points) *commun à tous les candidats*

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à 0,01 *près.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par :

$$f(x) = (3{,}6x + 2{,}4)\mathrm{e}^{-0{,}6x} - 1{,}4.$$

PARTIE A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;4]$ on a $f'(x) = (-2{,}16x + 2{,}16)\mathrm{e}^{-0{,}6x}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;4]$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

   On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variation sous forme approchée.
3. On admet que la fonction F définie par :

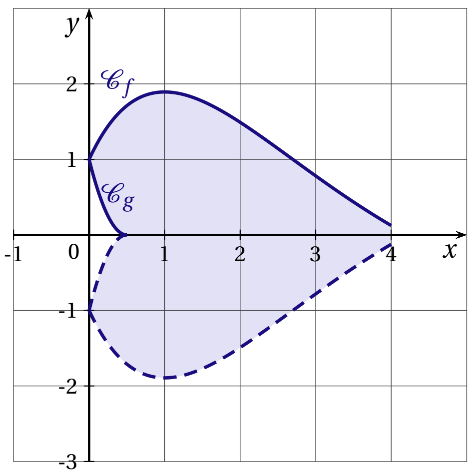
$$F(x) = (-6x - 14)\mathrm{e}^{-0{,}6x} - 1{,}4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis en donner une valeur numérique approchée.

PARTIE B

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.
On considère la fonction g définie par $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0;0{,}5]$.
On a tracé ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{0{,}5} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.
2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés) ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

   Ce domaine apparaît grisé sur la figure ci-dessus.

   Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

BACCALAURÉAT 2018

SÉRIE ES OBLIGATOIRE ET SPÉCIALITÉ

INDEX THÉMATIQUE