EXERCICE 1

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

PARTIE A

1. Calculer D^2 et D^3.
2. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{4}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$
3. Soit A la matrice telle que $A = P \times D \times P^{-1}$. Calculer A.
4. Montrer que $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$ et $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = \dfrac{5}{2} u_{n+1} - u_n$.

1. Pour tout entier n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   a) Donner V_0 et V_1.
   b) Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.
2. On admet que pour tout entier n, $V_n = A^n \times V_0$, $D^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
   a) Calculer $P \times D^6$.
   b) Exprimer V_6 en fonction de V_0 , P et D.
   c) En déduire les valeurs de u_6 et u_7.

EXERCICE 2

1. a) Traduire le système $(S)\left\{\begin{array}{rcr} 4x+3y+3z & = & 24 \\ y+z & = & 6 \\ x+2y & = & 8 \end{array}\right.$ par une égalité matricielle de la forme $AX = B$.

   b) À l'aide la calculatrice déterminer la matrice A^{-1} et résoudre le système.

2. Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

   a) Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont solutions du système (S) ?

   b) Représenter ci-dessous, la résolution graphique du système (S).

ANNEXE

(*À rendre avec la copie*)