

EXERCICE 1

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 85 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 10 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

La semaine de la décision est notée 0, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice où :

- a_n est le pourcentage des salariés qui travaillent le matin la n-ième semaine après la prise de décision ;
- b_n est le pourcentage des salariés qui travaillent l'après-midi la n-ième semaine après la prise de décision.

PARTIE A

1. La semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

Calculer la matrice P_1 décrivant la répartition du travail une semaine après la prise de décision.

2. On note M la matrice carrée telle que, pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = M \times P_n$.

- a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- b) En déduire la matrice M telle que $P_{n+1} = M \times P_n$.

3. Calculer P_3 . Interpréter le résultat obtenu.

PARTIE B

On admet, qu'à long terme, la répartition des salariés entre ceux qui travaillent le matin et ceux qui travaillent l'après-midi se stabilise.

Soit $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'état stable on a alors $P = M \times P$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $a + b = 1$.

1. Montrer que a et b vérifient l'égalité $0,2a - 0,9b = 0$.
2. Déterminer a et b .
3. Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

1. a) Traduire le système (S) $\begin{cases} 4x + 4y + 3z = 24 \\ 5x + 4y = 20 \\ 3y + 4z = 24 \end{cases}$ par une égalité matricielle de la forme $AX = B$.

b) À l'aide la calculatrice déterminer la matrice A^{-1} et résoudre le système.

2. Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

a) Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont solutions du système (S) ?

b) Représenter ci-dessous, la résolution graphique du système (S).

ANNEXE

(À rendre avec la copie)

