CONTRÔLE N° 9

EXERCICE 1

Une usine fabrique des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux. La direction estime que 10% des articles fabriqués sont défectueux.
On prélève un échantillon aléatoire supposé avec remise de 200 articles.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'articles défectueux dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence d'articles défectueux dans les échantillons de taille 200.
3. Sur les 200 articles prélevés on trouve 27 articles défectueux. Au seuil de risque de 5% que penser de l'hypothèse de la direction ?

EXERCICE 2

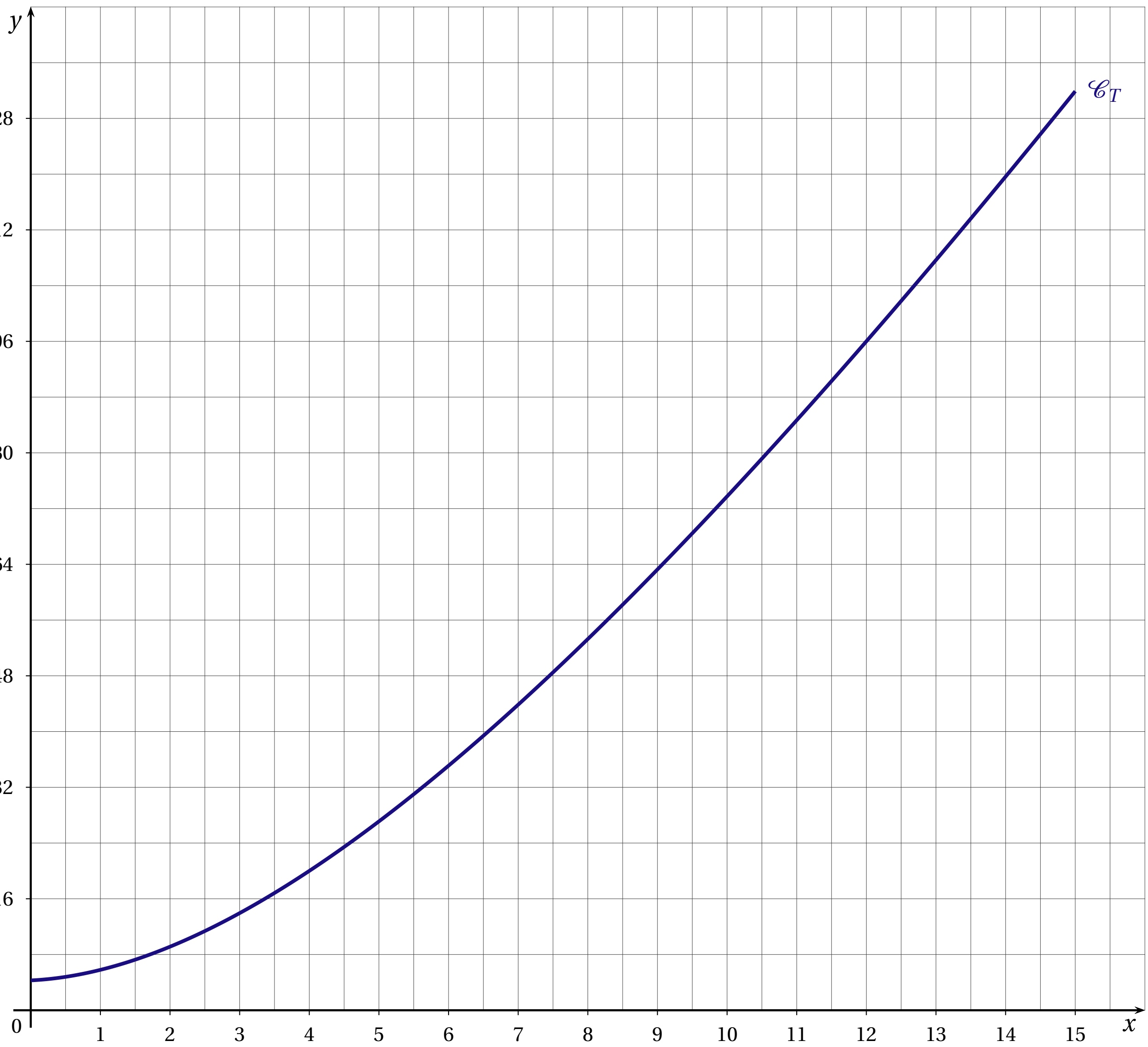
Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;15]$ par

$$C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

1. Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$
   a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique :
      — les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
   b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;15]$ on a :
   $$B'(x) = \frac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x + 14)^2}$$
   c) Étudier les variations de la fonction B.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE 1


y
128
112
96
80
64
48
32
16
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
x
$\mathscr{C}_T$

EXERCICE 3

Lors de sa création au 1er janvier 2010, un club de sport a 300 adhérents. À la fin de la première année, trois quarts des adhérents se réinscrivent et 120 nouveaux membres adhèrent.
Pour tout nombre entier naturel n, on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, exprimé en centaines, n années après la création du club.
On a donc $a_0 = 3$. On suppose que le nombre d'adhérents au club évolue de la même façon les années suivantes. Ainsi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 1{,}2$.

PARTIE A : Étude graphique de la suite (a_n)

1. Dans le repère donné en annexe, tracer la droite D d'équation $y = 0{,}75x + 1{,}2$ et la droite Δ d'équation $y = x$.
   Placer a_0 sur l'axe des abscisses et, en utilisant les droites D et Δ, placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 (*laisser apparents les traits de construction*).
2. Quel semble être le sens de variation de la suite (a_n) ?

PARTIE B : Étude numérique de la suite (a_n)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 4{,}8$ pour tout nombre entier naturel n.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
2. Calculer u_0. Exprimer u_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n.
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} - a_n = 0{,}45 \times 0{,}75^n$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (a_n)
5. Si l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit selon ce modèle, le club peut-il avoir 500 adhérents durant une année ? Pourquoi ?

ANNEXE 2