I VECTEUR DE L'ESPACE

Les définitions et opérations sur les vecteurs du plan se généralisent dans l'espace

1 VECTEURS COLINÉAIRES

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie, qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

— Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2 VECTEURS COPLANAIRES

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

CONSÉQUENCE :
Pour démontrer qu'un point D appartient à un plan $\mathscr{P}$ défini par trois points non alignés A, B et C on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

II REPÉRAGE DANS L'ESPACE

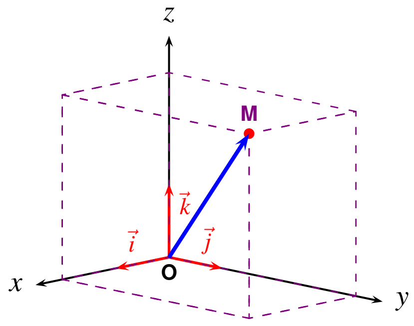
1 COORDONNÉES D'UN POINT

Dans un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x;y;z)$ est le triplet de coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

x est l'abscisse, y est l'ordonnée, z est la cote.



2 CALCULS AVEC LES COORDONNÉES

Les propriétés de calcul vectoriel étudiées dans le plan restent valables dans l'espace.

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$.

— $\vec{u}=\vec{v}$ si, et seulement si, $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$.
— Le vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}\,(x+x';y+y';z+z')$.
— Pour tout réel k, $k\vec{u}\,(kx;ky;kz)$.

Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace :
— le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
— le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

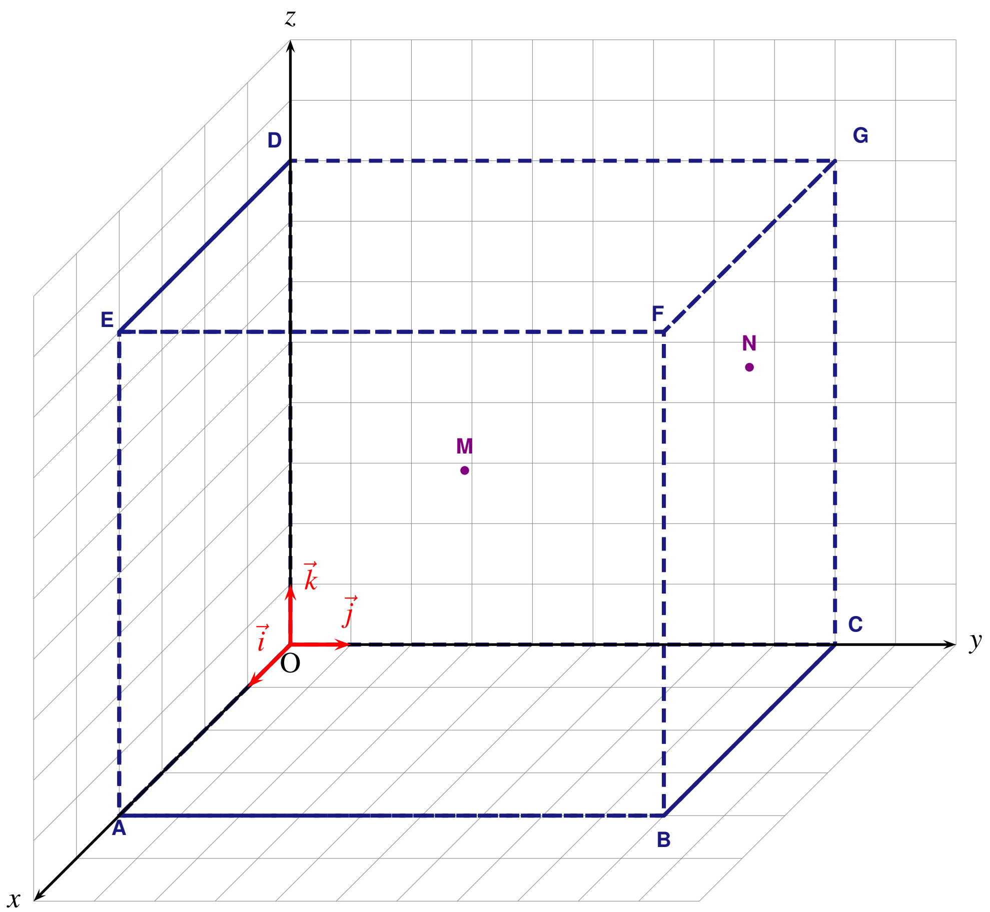
NORME ET DISTANCE

Dans un repère **orthonormal** $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$,

— Le vecteur $\vec{u}\,(x;y;z)$ a pour norme :
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
— La distance entre les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B\,(x_B;y_B;z_B)$ est donnée par
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$
— Deux vecteurs $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy'+zz'=0$.

EXERCICE 1

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le pavé droit $OABCDEFG$.



1. Lire les coordonnées des points E et G.
2. Placer le point P de coordonnées $(5;8;6)$ dans le repère précédent.
3. La cote du point M est égale à 5, lire les coordonnées du point M.
4. N est un point du plan (BCG), lire les coordonnées du point N.

EXERCICE 2

L'espace est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Les points $A\,(1;4;-6)$, $B\,(-5;2;0)$ et $C\,(-2;3;-3)$ sont-ils alignés ?
2. Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs $\vec{u}\,(-2;a;1)$ et $\vec{v}\,(3;1;b)$ soient colinéaires.
3. Les points $A\,(2;-1;-1)$, $B\,(5;1;2)$, $C\,(4;0;0)$ et $D\,(2;-2;-4)$ sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 3

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;1)$ et $D(6;3;0)$.

1. Les points A, B et C déterminent-ils un plan ?
2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

EXERCICE 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(4;-1;2)$, $B(3;-2;1)$, $C(1;0;1)$ et $D(3;4;1)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
3. Le point $E(3;y;1)$ appartient au plan ABC, calculer son ordonnée.
4. La droite (ED) est-elle parallèle au plan (yOz) ?

EXERCICE 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1;4;-3)$, $B(2;-2;3)$, $C(1;0;1)$, $D(1;-2;-1)$ et $E(-1;3;-4)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Montrer que les points A, D et E déterminent un plan.
3. Les points A, C, D et E sont-ils coplanaires ? Qu'en est-il des points A, B, C, D et E ?
4. Déterminer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}=9\vec{i}$.
5. Montrer que la droite (CH) est perpendiculaire au plan (ADE)

EXERCICE 6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(2;-1;3)$, $B(-2;3;1)$, $C(-2;0;4)$, $D(9;-5;8)$ et $E(x;y;6)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
2. Le point E appartient à la droite (AB). Déterminer son abscisse et son ordonnée.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
4. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire au plan (ABC).

EXERCICE 7

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;3;-1)$ et $B(1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point C intersection de la droite (AB) avec le plan (xOy).
2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de la droite (AB) avec le plan (yOz).
3. La droite (AB) est-elle sécante avec le plan (xOz) ?