I Nombre dérivé

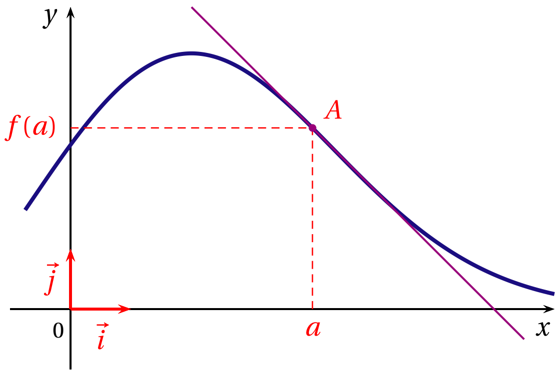
1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a en restant dans I, on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a.
On note alors :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2 Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite passant par le point $A\big(a;f(a)\big)$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.



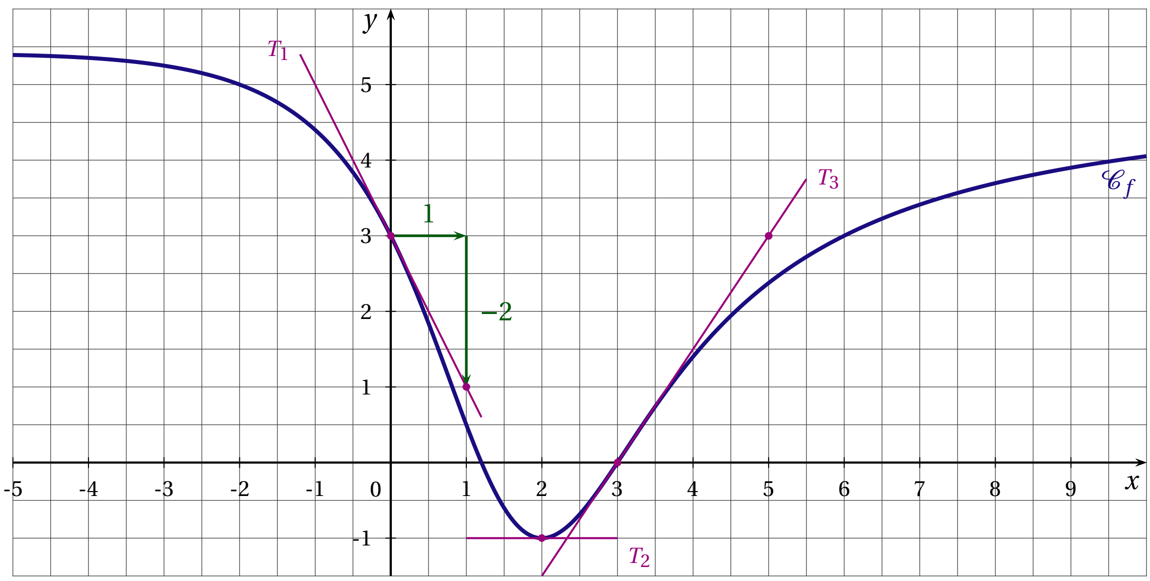
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$$

EXEMPLE

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite T_1 est égal à -2. Ainsi, $\boxed{f'(0)=-2}$
2. La tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f'(2)=0}$
3. La droite T_3, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées $(3;0)$ et $(5;3)$. Son coefficient directeur a est
   $$a=\frac{3-0}{5-3}=\frac{3}{2}$$
   Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. Donc $\boxed{f'(3)=\frac{3}{2}}$

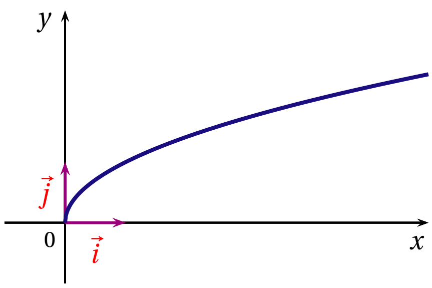
Remarque

La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x=0$ en 0.
Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



II Fonction dérivée

1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Lorsque pour tout réel x appartenant à I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I. Elle est notée f'.

2 Dérivées des fonctions de référence

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$\mathbb{R}$	$f(x)=ax+b$	a
$\mathbb{R}$	$f(x)=x^n \quad (n \text{ entier } n\geqslant 1)$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x)=\frac{1}{x^n} \quad (n \text{ entier } n\geqslant 1)$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$]0;+\infty[$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3 Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u\times v$	$u'v+uv'$
Quotient ($v\neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Inverse ($v\neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$

EXEMPLES

1. Produit de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

   Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

   $f=uv$ d'où $f'=u'v+uv'$. Avec pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$u(x)=2+\frac{x^2}{3} \quad \text{d'où} \quad u'(x)=\frac{2x}{3}$$
$$v(x)=1-\frac{2}{x} \quad \text{d'où} \quad v'(x)=\frac{2}{x^2}$$

   Soit pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{2x}{3}\times\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{2}{x^2}\times\left(2+\frac{x^2}{3}\right)\\ &=\frac{2x}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{3}\\ &=\frac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}\end{aligned}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f'(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}$.

2. Quotient de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

   Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

   $f=\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$u(x)=4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x)=4$$
$$v(x)=x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x)=2x$$

   Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

III Dérivée et variations d'une fonction

1 Théorème 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.

— Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

— Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

— Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

— Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

3 Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

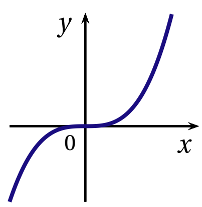
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	*minimum*	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	*maximum*	$\searrow$	

Remarques

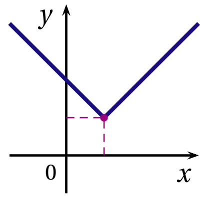
1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.

2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|+1$.
f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



POINT MÉTHODE

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$:

— on détermine la dérivée f' de f ;

— on étudie le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$;

— on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de f' est constant;

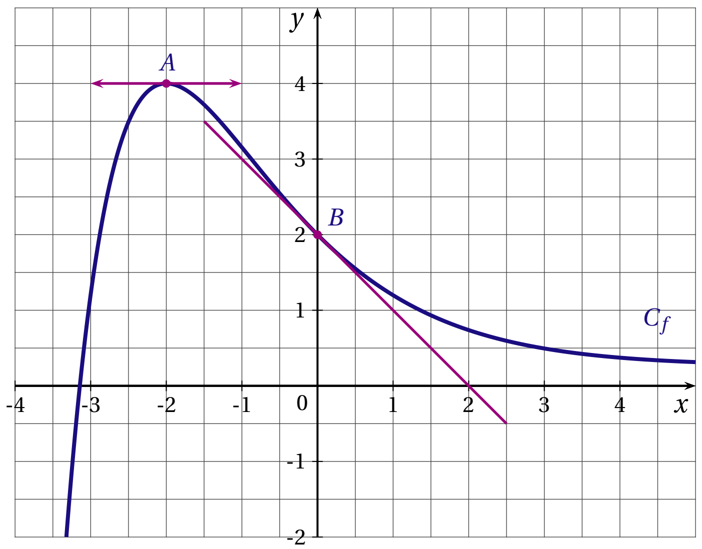
— on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 1

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère du plan. On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ vérifie les propriétés suivantes :

— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses;

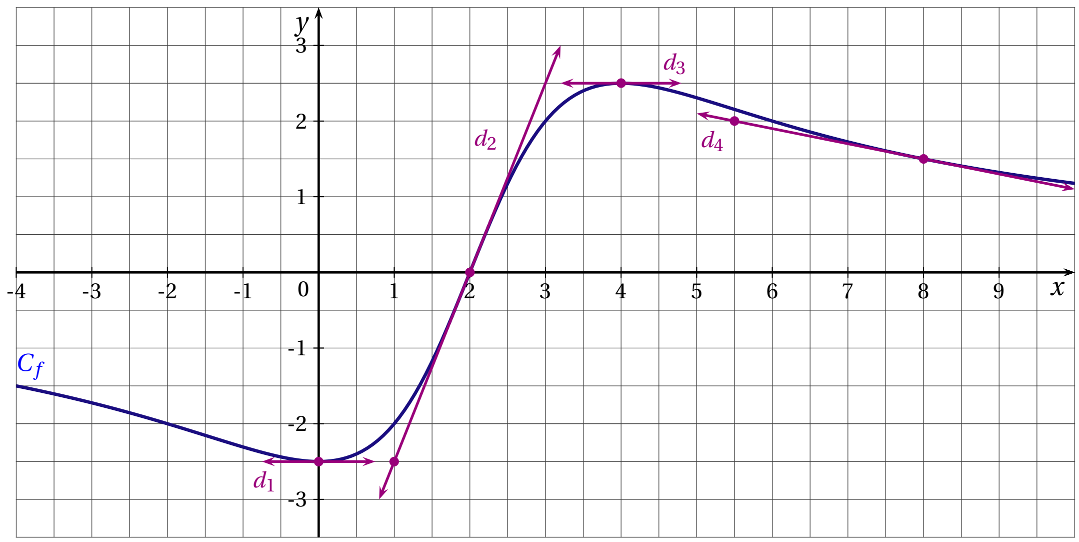
— la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B(0;2)$ passe par le point de coordonnées $(2;0)$.



Donner les valeurs de $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.

EXERCICE 2

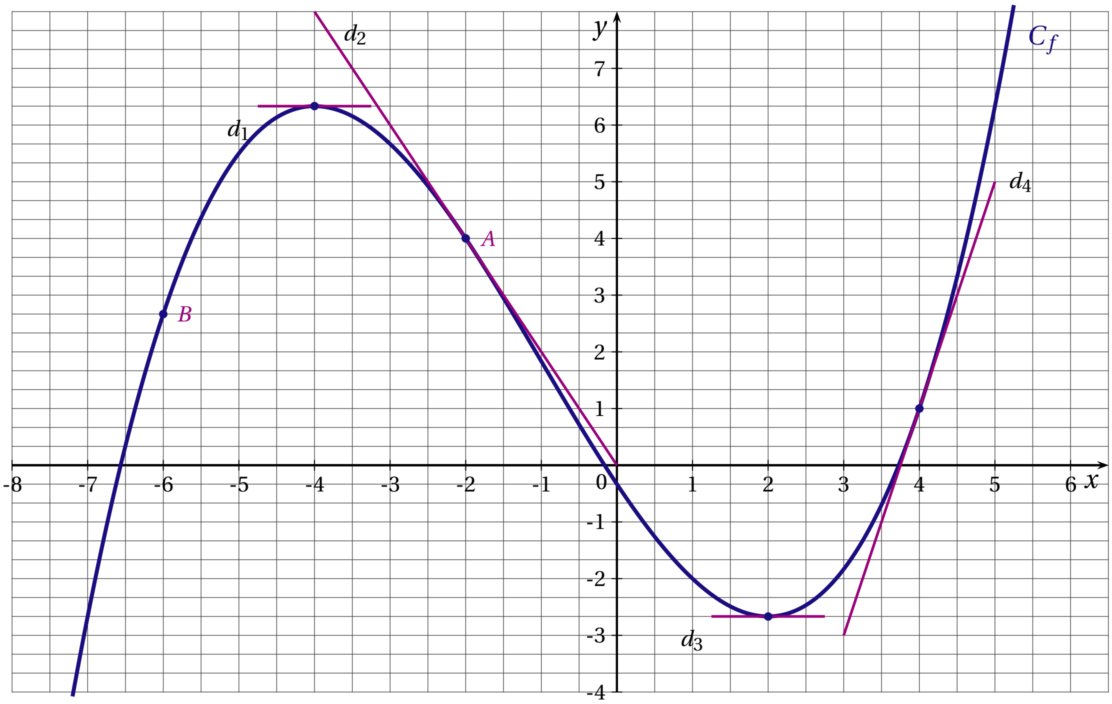
Sur la figure ci-dessous les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(8)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(8)$.
3. En déduire les équations réduites des tangentes d_1, d_2, d_3 et d_4.

EXERCICE 3

Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f.



1. Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$.
3. La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -2 passe par l'origine du repère. Déterminer $f'(-2)$.
4. La tangente T à la courbe C_f au point $B\left(-6;\dfrac{8}{3}\right)$ est parallèle à la droite d_4.

   Déterminer $f'(-6)$ puis, donner une équation de la tangente T à la courbe au point B. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer la dérivée $f'(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} + 1$
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - \dfrac{5}{x}$

EXERCICE 5

1. Donner une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 5$ au point d'abscisse -1.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

   Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{13x}{2} + \dfrac{29}{3}$

1. Donner une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle une deuxième tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$?

   Si oui donner son équation.

EXERCICE 7

Dans chaque cas, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer $f'(x)$.

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-3x^2+\dfrac{5}{x}$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^3+2\sqrt{x}+5$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-x$

EXERCICE 8

Calculer la dérivée de chacune des fonctions.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-2x)\left(0{,}5x^2+1\right)$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-x^2\right)\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.
3. g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)\sqrt{x}$
4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
5. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
6. h est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

EXERCICE 9

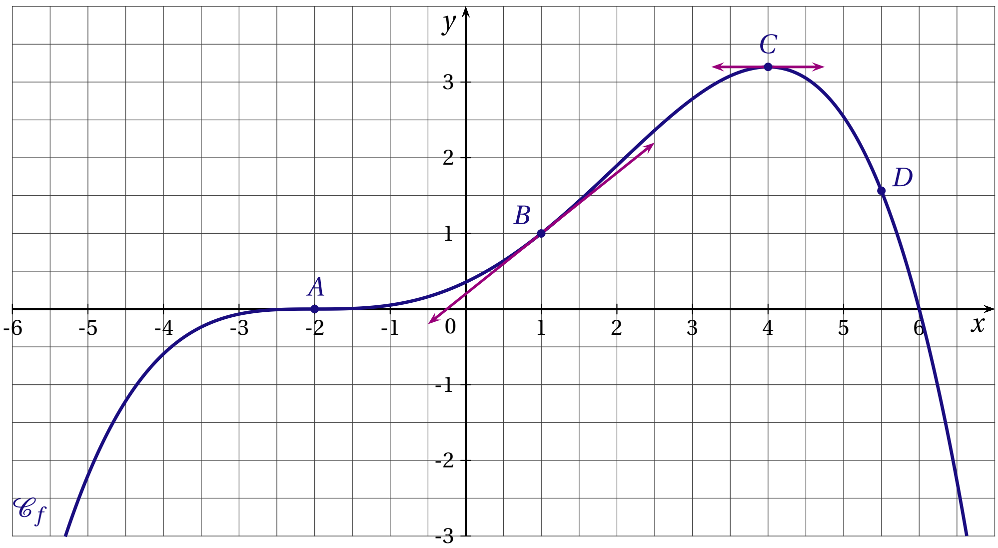
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2;0)$, $B(1;1)$, $C(4;3{,}2)$ et $D\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{25}{16}\right)$.

L'axe des abscisses est tangent en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C.

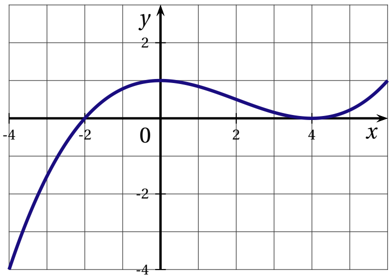
La tangente à la courbe au point B passe par le point $M(-4;-3)$.



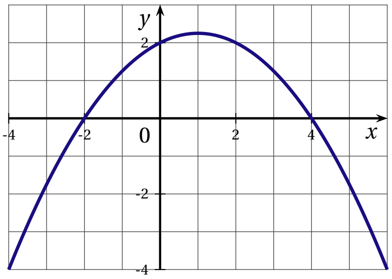
À partir du graphique et des données de l'énoncé, répondre aux questions suivantes.

1. Dresser sans justification le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $f'(-2)$, $f'(4)$ et $f'(1)$.
3. Quel est l'ensemble solution de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$?

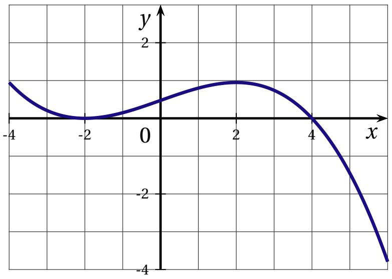
4. On donne $f'(5{,}5) = -2{,}5$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D avec l'axe des ordonnées.
5. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

EXERCICE 10

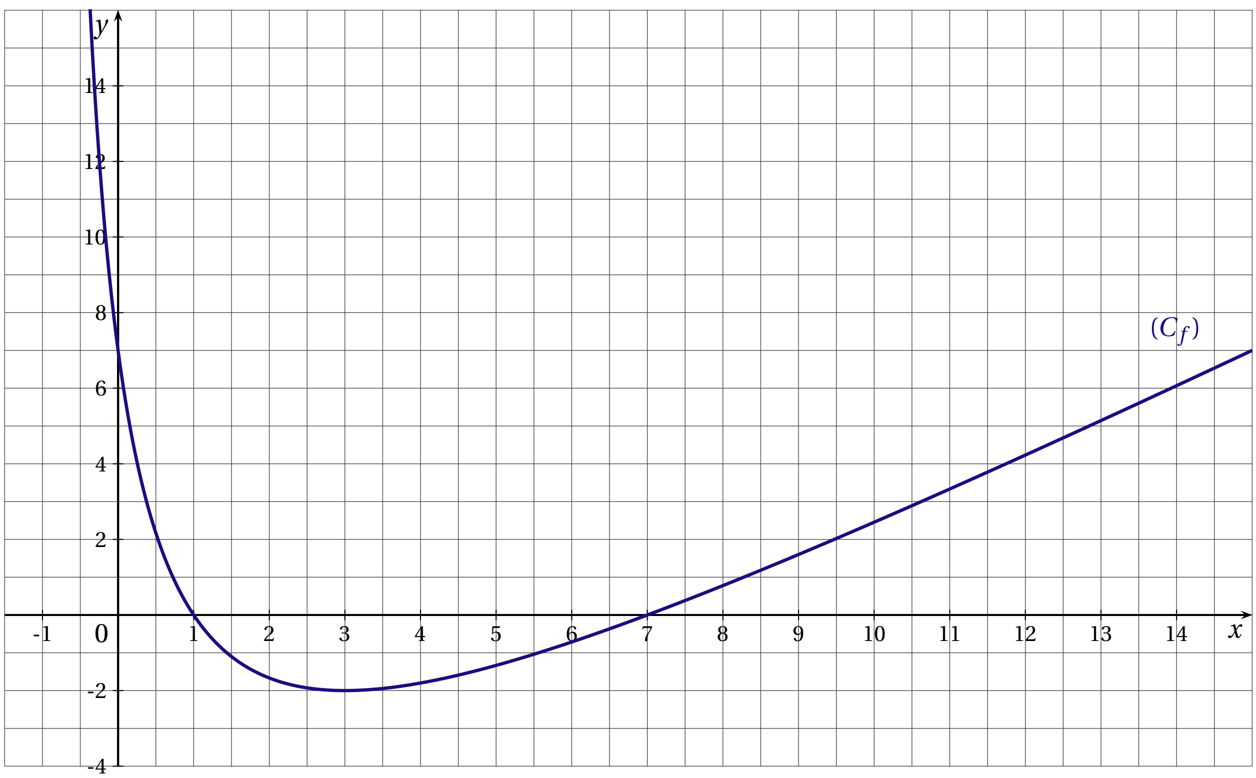
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-8x+7}{x+1}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
Sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, notée C_f, est donnée ci-dessous à titre indicatif.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer sur le graphique donné, la tangente T.

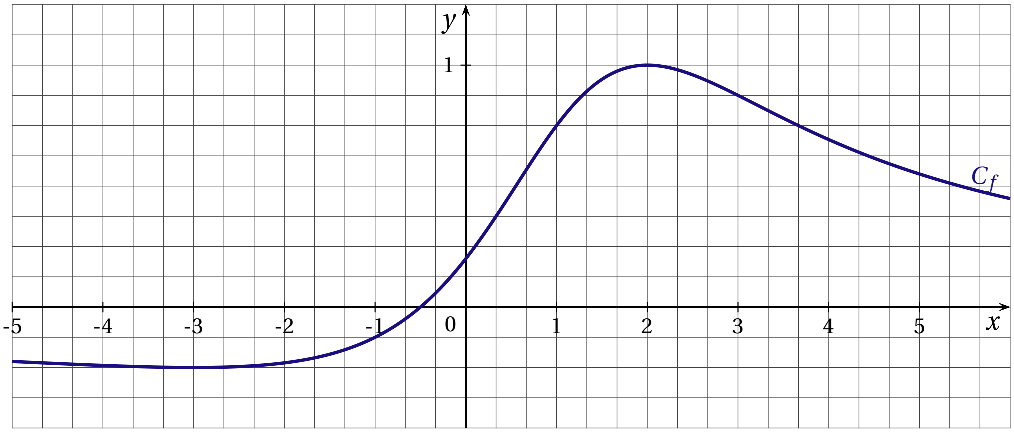


EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Calculer la dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+12}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.

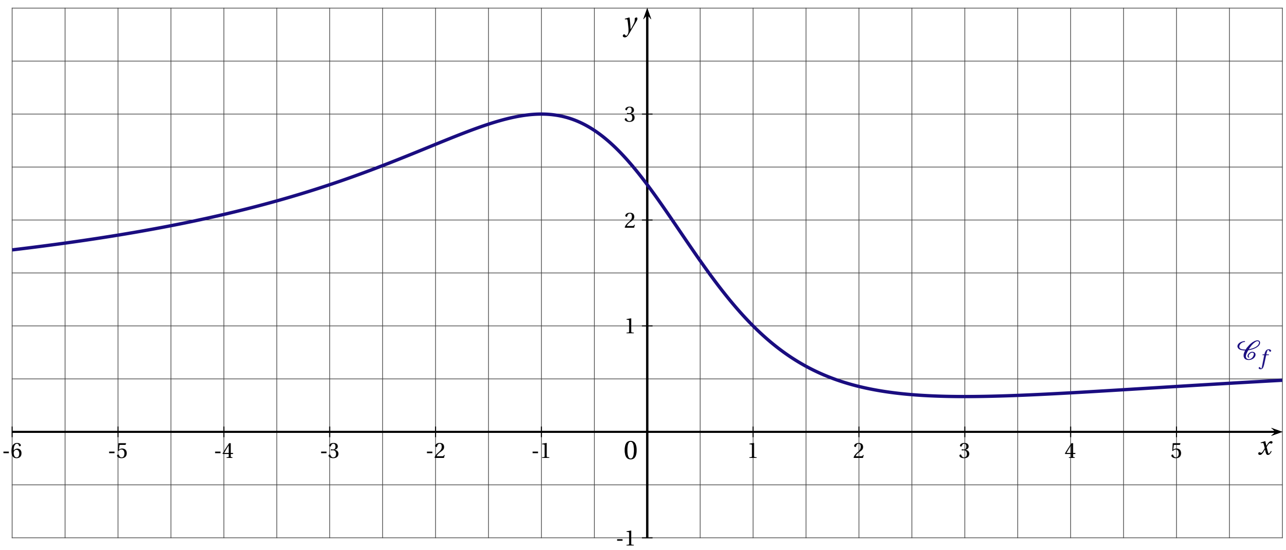
   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer la tangente T dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+3}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

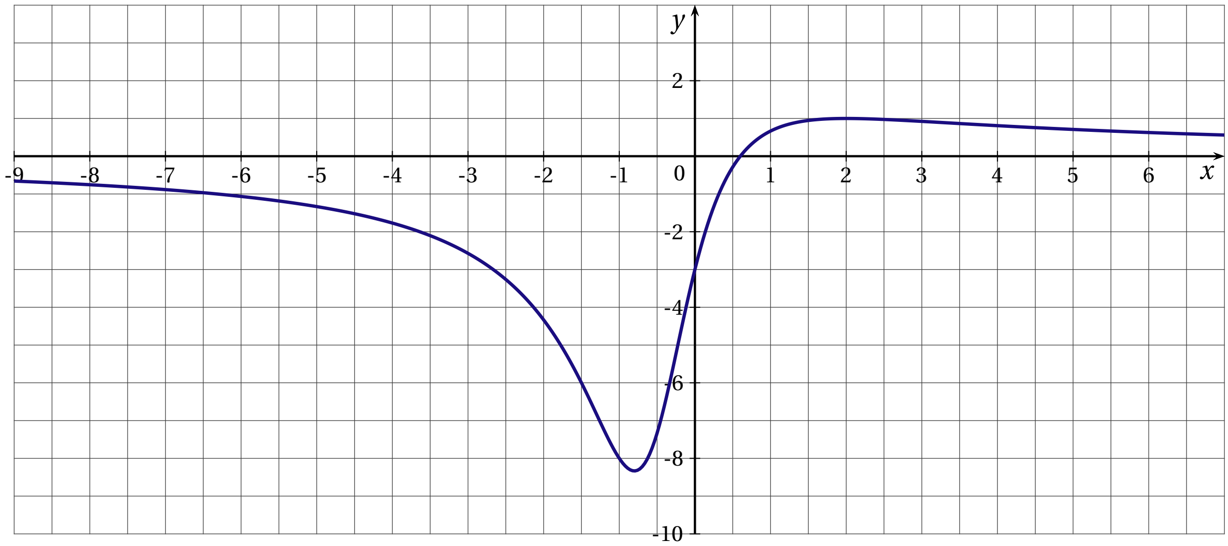
1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 14

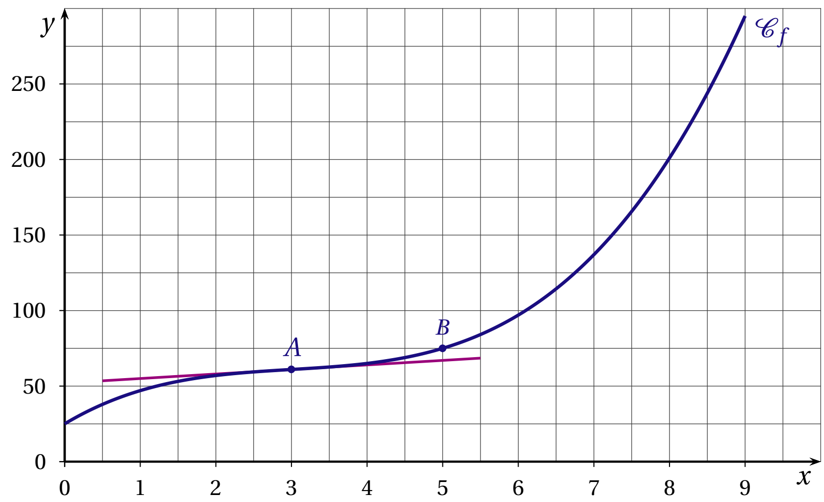
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.
   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 15

La capacité de production mensuelle d'une entreprise est limitée à 9 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le coût total de production $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;61)$ est tracée sur le graphique.
La tangente au point $B(5;75)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.

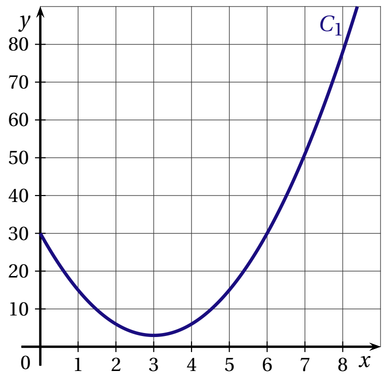


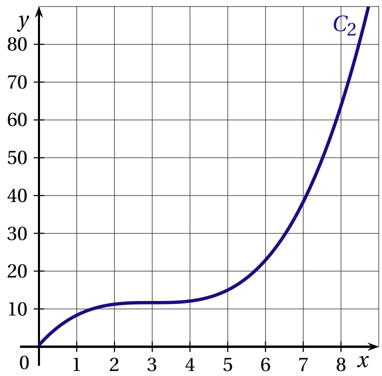
On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;9]$ et, on note f' la fonction dérivée de la fonction f.

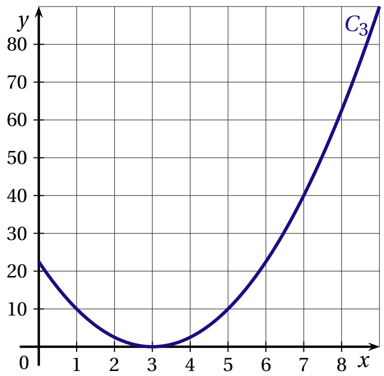
PARTIE A

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;9]$ à la dérivée du coût total de production.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?







PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE C

Le prix de vente d'un article est de 30 €. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise pour x milliers d'articles vendus est donné par $B(x) = 30x - f(x)$.

1. Pour quelle quantité d'articles vendus, le bénéfice est-il maximal ?
2. Déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.

EXERCICE 16

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;15]$ par

$$C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$$

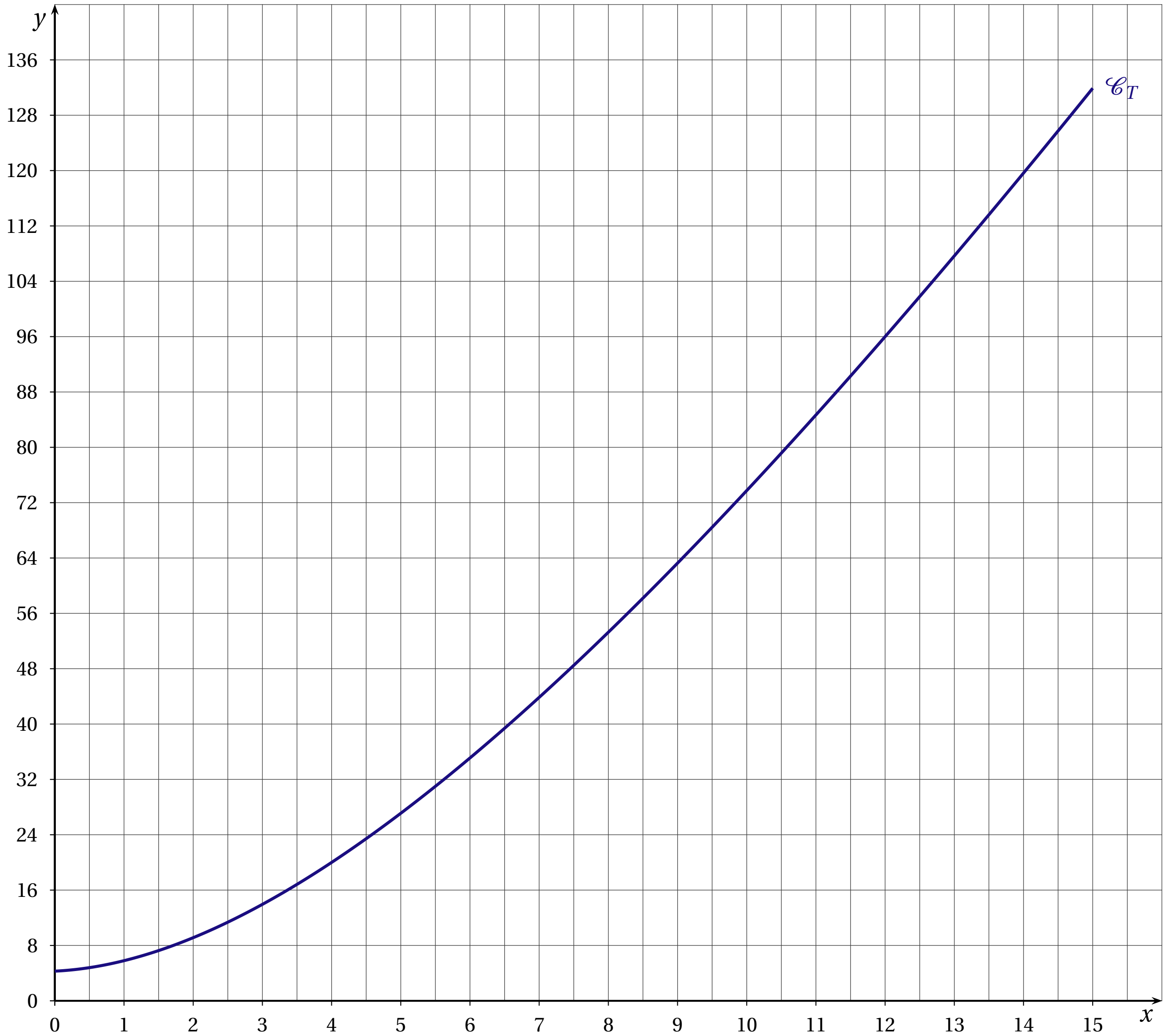
La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

1. Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$
   a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique :
      — les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
   b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;15]$ on a $B'(x) = \dfrac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x+14)^2}$.
   c) Étudier les variations de la fonction B.

d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE



EXERCICE 17

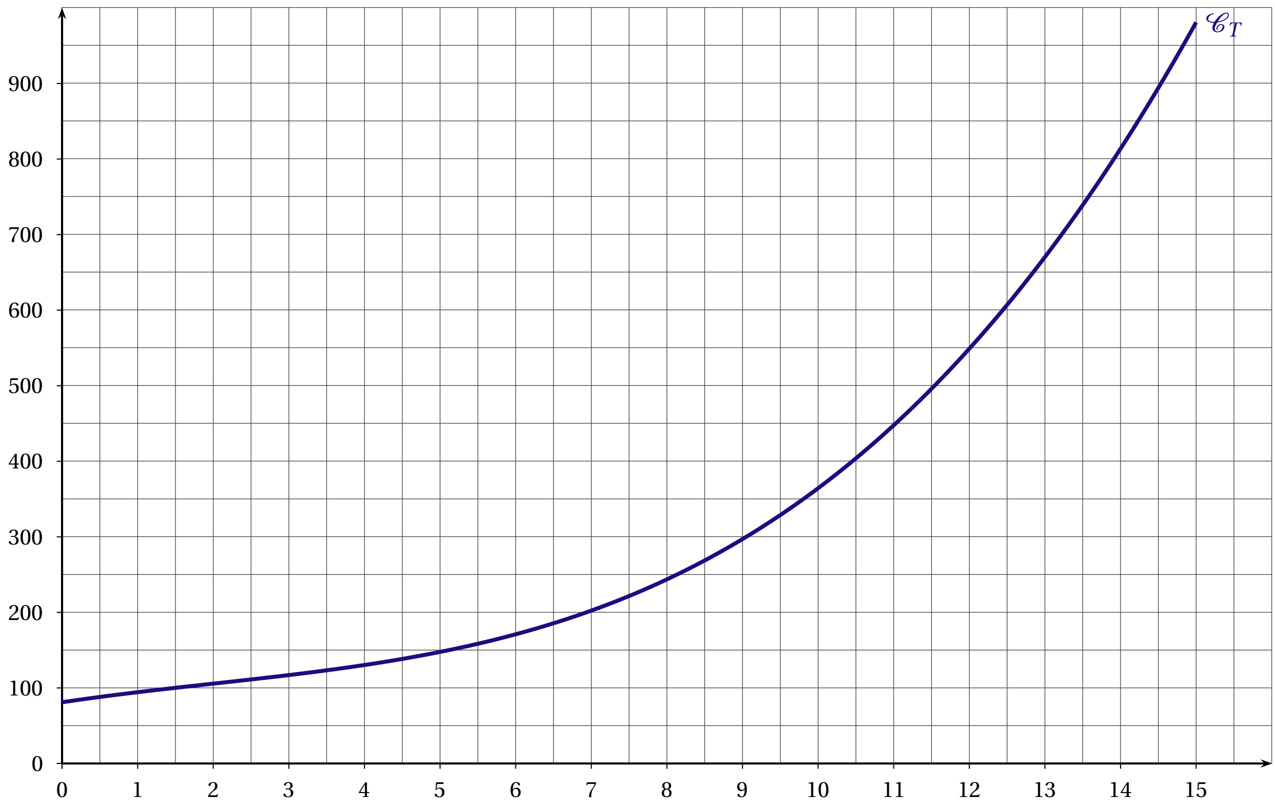
Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 15x + 81$.
La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe $\mathscr{C}_T$ représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.
On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.

   a) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction recette.

   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?
3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Sur le graphique ci-dessous, placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$.



EXERCICE 18

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0;10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.
   b) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

PARTIE C

On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

f est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x^2 + 21x + 320}{x}$.

1. Conjecturer graphiquement les variations du coût moyen de production sur l'intervalle $]0;10]$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+20x+80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;10]$.
4. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice ?

ANNEXE