I RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 FONCTION

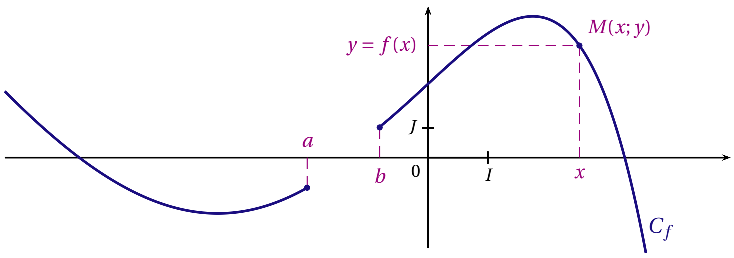
Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.
- Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.
- Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.



C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$

3 VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \leqslant f(b)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I.

$$\text{Si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \geqslant f(b)$$

On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

REMARQUE

On dit que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

EXTREMUM

— Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.

— Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts $x_1 \neq x_2$, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

VARIATION

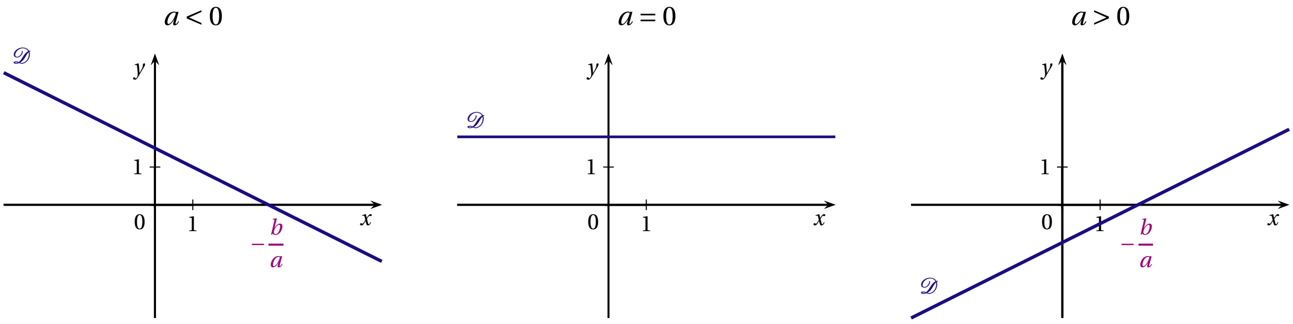
Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.



2 FONCTION CARRÉ

DÉFINITION

La fonction carré est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

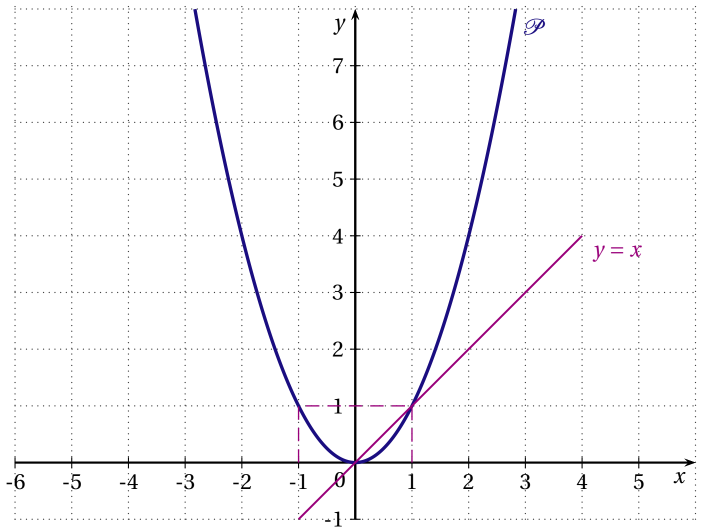
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

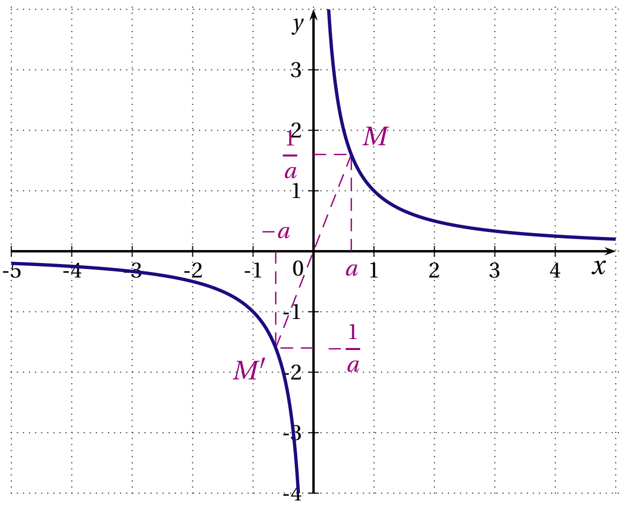
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\big(a;f(a)\big)$ et $M'\big(-a;f(-a)\big)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

— On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $\left(\sqrt{x}\right)^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ seulement pour $x\geqslant 0$.

— $\begin{cases}\text{Si } x\geqslant 0\text{, alors } \sqrt{x^2}=x.\\ \text{Si } x\leqslant 0\text{, alors } -x\geqslant 0\text{, d'où } \sqrt{x^2}=-x.\end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0{,}5)^2}=\sqrt{0{,}25}=0{,}5$$

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x)=\sqrt{x}$ est strictement croissante.

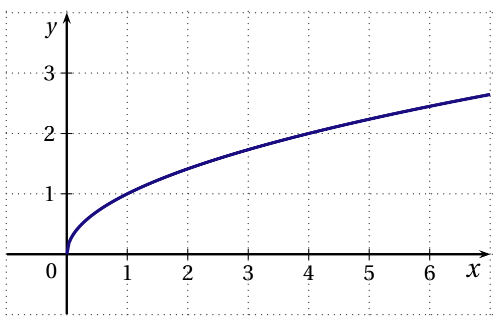
✳ DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels positifs tels que $0\leqslant a<b$:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

Comme $0\leqslant a<b$, alors $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)>0$. Par conséquent, $a-b$ et $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ sont de même signe.
Ainsi, si $a-b<0$ alors $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0$ soit $f(a)<f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



5 FONCTION CUBE

DÉFINITION

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^3$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

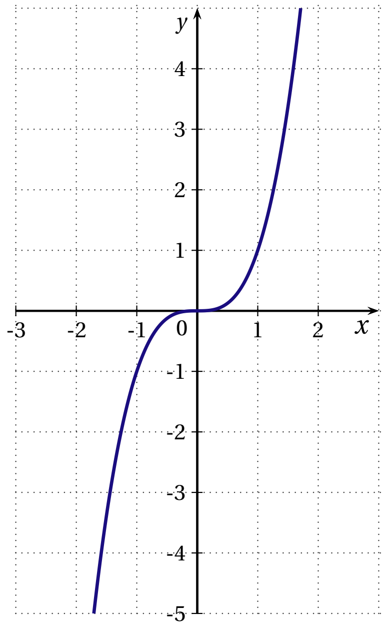
DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

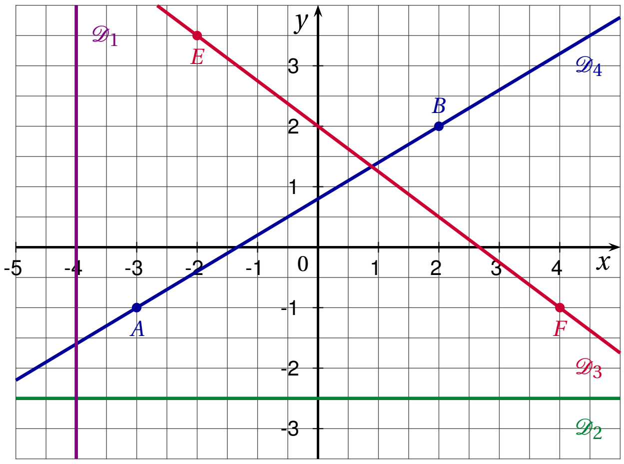
— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.

— Si a et b sont de même signe :
Pour tous réel a et b on a
$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$. Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a - b)$.
Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



EXERCICE 1



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2;-1)$ et $(1;3)$.

EXERCICE 3

1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 4

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b) $\dfrac{2}{3} < x < 1$; c) $x > \dfrac{1}{5}$; d) $x \leqslant -\sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$; b) $\dfrac{1}{x} > 2$; c) $-2 < \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$; d) $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 3$

EXERCICE 5

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

EXERCICE 6

1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

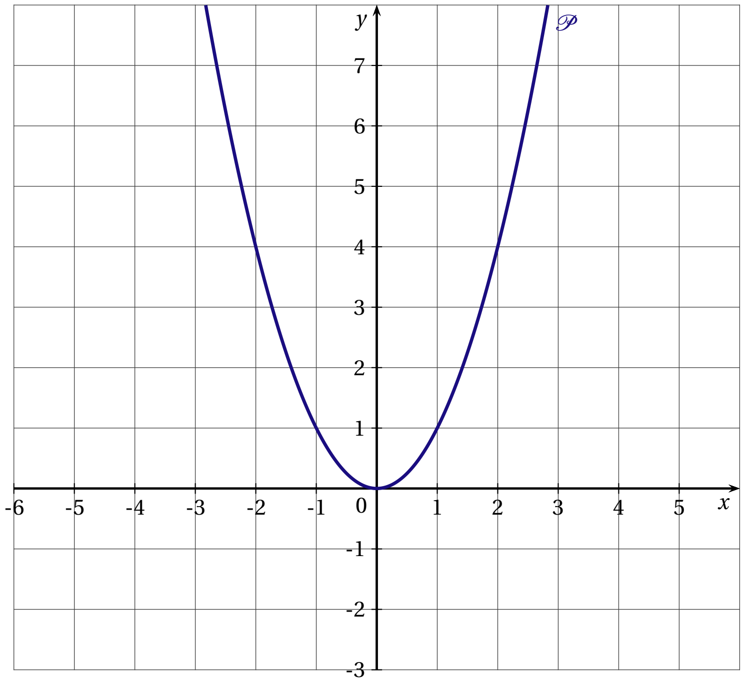
   a) $x > 4 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{4}$; b) $x \leqslant -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant -1{,}5$; c) $x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$; d) $x < 0{,}6 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{5}{3}$

2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

EXERCICE 7

La parabole $\mathscr{P}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

1. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = -3x - \frac{9}{4}$.
   a) Tracer la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g.
   b) Étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ n'ayant que le point A d'abscisse 2 en commun avec la parabole. (*On dit que la droite Δ est tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse 2.*)

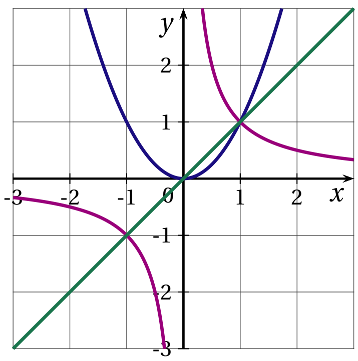


EXERCICE 8

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$
   a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$
   b) Que peut-on en déduire pour $\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{1}{(x-1)^3} \geqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 9

1. Les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\frac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{a}$

EXERCICE 10

Montrer que pour tous réels a et b positifs on a : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{8-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

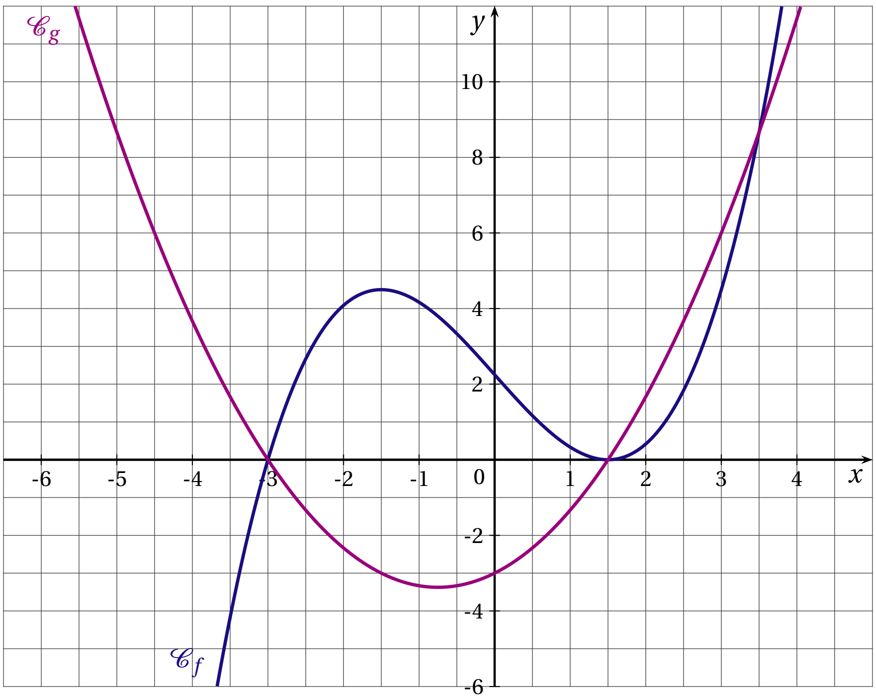
EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. f est définie par $f(x) = 100 - 0{,}1x^3$.
2. f est définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{8} - 1$.

EXERCICE 13

Soient f et g les fonctions définies pour tout réel$x$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{9}{4}x + \dfrac{9}{4}$ et $g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + x - 3$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.



1. a) Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

   b) Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f.

   c) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

   d) Établir le tableau de signes de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
3. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.