I POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 – DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -0{,}5x^2 + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -0{,}5$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)

— La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 – FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{8}$

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Études le cas où $a < 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2. Études le cas où $a > 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

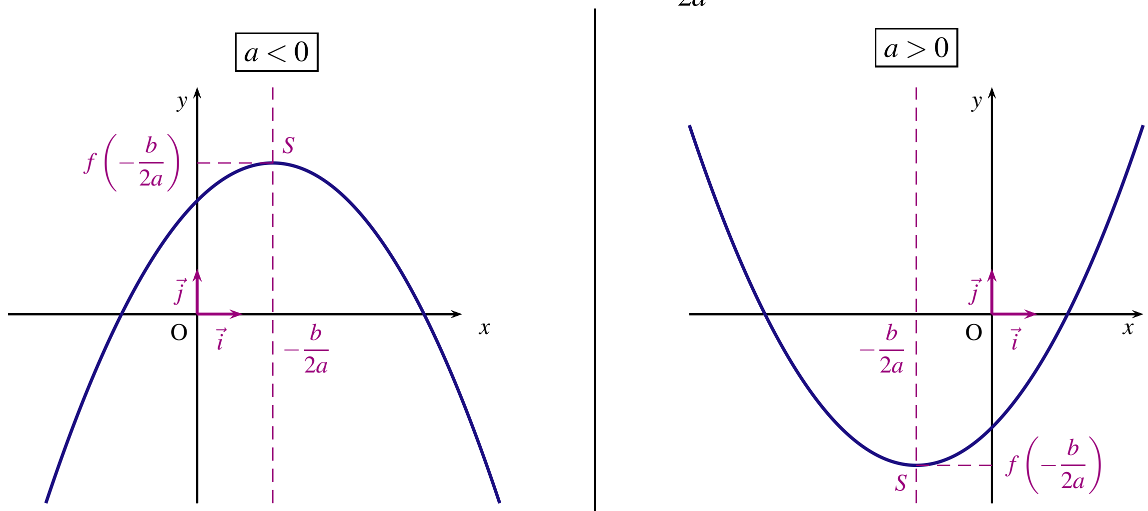
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$	$\searrow$	

III COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y=ax^2+bx+c$
Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$



La parabole est tournée vers le bas La parabole est tournée vers le haut

SYMÉTRIE DE LA PARABOLE

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=2x^2-6x-5$ où a, b et c sont trois réels.
Déterminons deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant la même ordonnée.
Cherchons les solutions de l'équation $f(x)=-5$

$$\begin{aligned} 2x^2-6x-5=-5 &\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\\ &\Leftrightarrow 2x(x-3)=0 \end{aligned}$$

Soit $x=0$ ou $x=3$. Par conséquent, le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha=\dfrac{0+3}{2}=1{,}5$

IV ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Une équation du second degré à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b, c sont des réels et $a\neq 0$.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$, soit encore $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

— Si $\Delta<0$ alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.

— Si $\Delta=0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x=-\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta>0$ alors :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\end{aligned}$$

Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

1 – PROPRIÉTÉ

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.

— Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

— Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2-3=7x$

Pour tout réel x, $6x^2-3=7x \Leftrightarrow 6x^2-7x-3=0$. Il s'agit de résoudre une équation du second degré avec $a=6$, $b=-7$ et $c=-3$

Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ soit $\Delta=(-7)^2-4\times 6\times(-3)=49+72=121$.

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad \text{Soit}\qquad x_1=\frac{7-11}{12}=-\frac{1}{3}$$

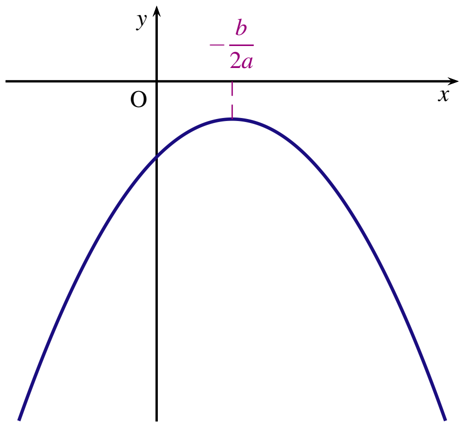
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad \text{Soit}\qquad x_2=\frac{7+11}{12}=\frac{3}{2}$$

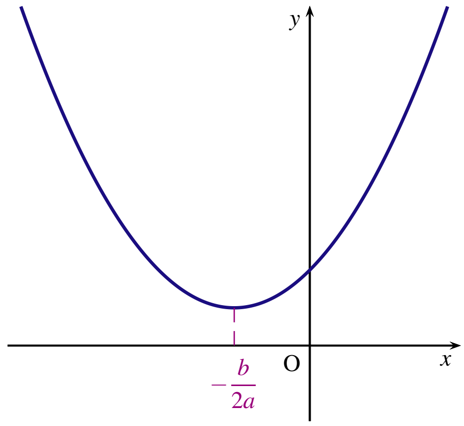
L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2-3=7x$ est $S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right\}$

2 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

cas $a < 0$ | cas $a > 0$

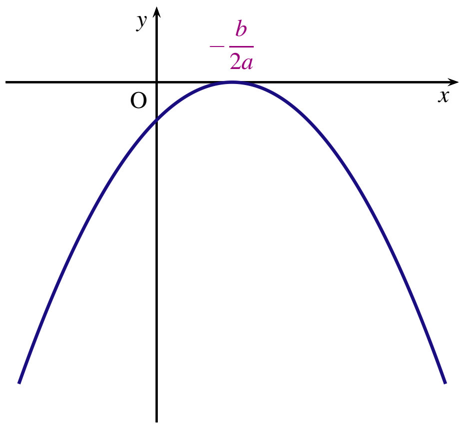
$\Delta < 0$

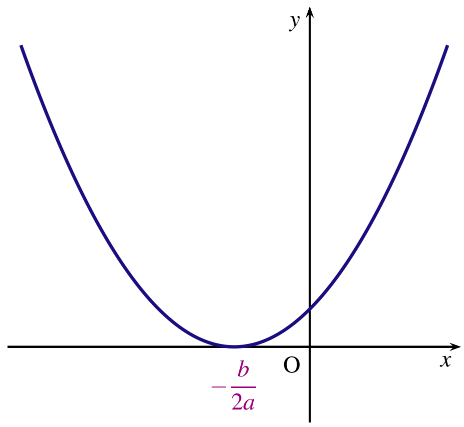




La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses

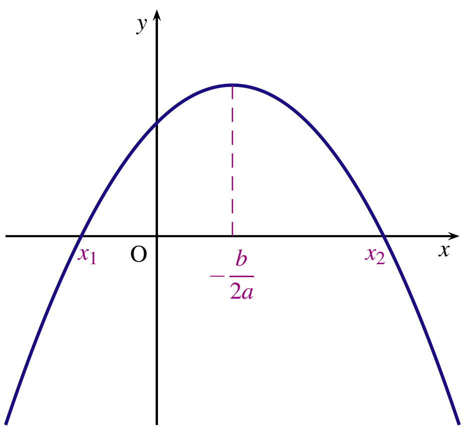
$\Delta = 0$

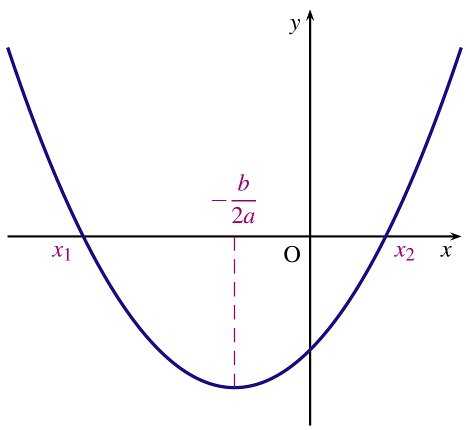




La parabole est tangente à l'axe des abscisses

$\Delta > 0$





La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

REMARQUE

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les racines du trinôme

$$ax^2 + bx + c$$

V Signe du trinôme

1 – Factorisation

Factorisation du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$:

— Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.

— Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

✼ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs; le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Soit en notant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine on a :

$$f(x) = a(x-x_0)^2$$

— Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Soit en notant $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines on a :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

PROPRIÉTÉ

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in \left]-\infty ; x_1\right[\cup \left]x_2 ; +\infty\right[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in \left]x_1 ; x_2\right[$.

✼ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.

— Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Étudions le signe du produit $a(x-x_1)(x-x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

REMARQUE

On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines.

EXEMPLES

1. Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3 \leqslant 0$.

   Étudions le signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4}-x+3$ avec $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=-1$ et $c=3$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ soit $\Delta=(-1)^2-4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times 3=1+3=4$.

   Comme $\Delta>0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1=\frac{1-2}{-\dfrac{1}{2}}=2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2=\frac{1+2}{-\dfrac{1}{2}}=-6$$

   Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4}-x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3 \leqslant 0$ est $S=\left]-\infty;-6\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

2. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x-3$

   Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

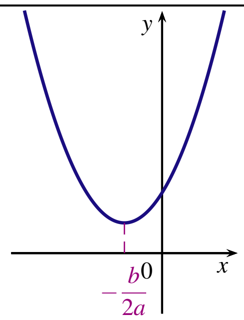
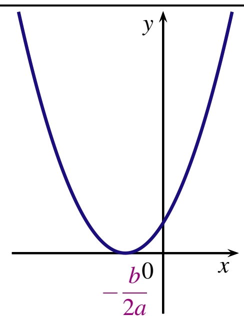
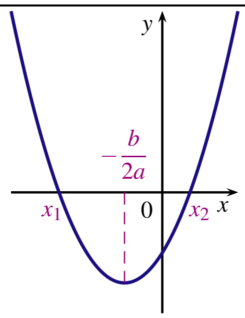
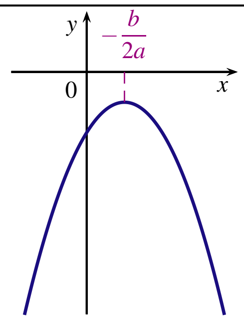
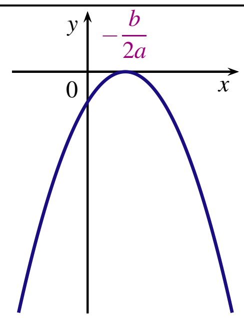
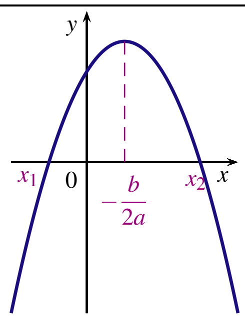
$$x^2-(2x-3)=x^2-2x+3$$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ soit $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=4-12=-8$.

   Comme $\Delta<0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x, $x^2-2x+3>0$.

   La parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$.

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ avec } a\neq 0$$

Discriminant $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$a>0$	Variations	x : $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ $f(x)$: ↘ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↗		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	Pas de solution	Une solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de ax^2+bx+c	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ Négatif sur $[x_1;x_2]$
$a<0$	Variations	x : $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ $f(x)$: ↗ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↘		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	Pas de solution	Une solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de ax^2+bx+c	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ Positif sur $[x_1;x_2]$

EXERCICE 1

Étudier dans chacun des cas, les variations de la fonction et donner les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction.

1. f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = -x^2 - 2x + 1$.
2. f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = 2x^2 - x - \dfrac{3}{8}$.
3. f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = -2x^2 + 8x - 7$
4. f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = x^2 - \dfrac{x}{2} - 3$

EXERCICE 2

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Dans chacun des cas suivants, répondre aux questions suivantes :

— Quel est le signe de a ?
— Quelle est la valeur de $-\dfrac{b}{2a}$?
— Quel est le signe du discriminant Δ ?
— Quel est le signe de c ?

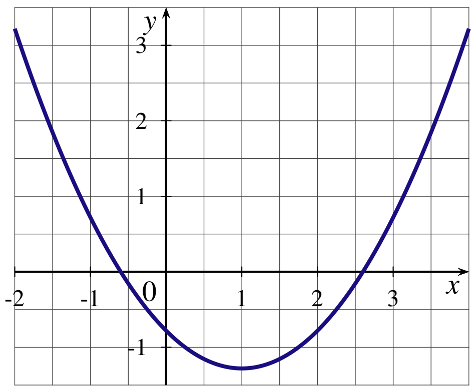
1. Le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

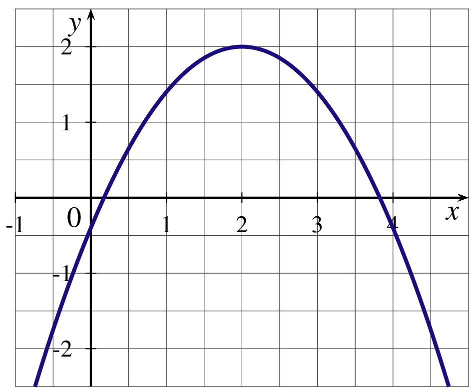
2. Le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

3. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.

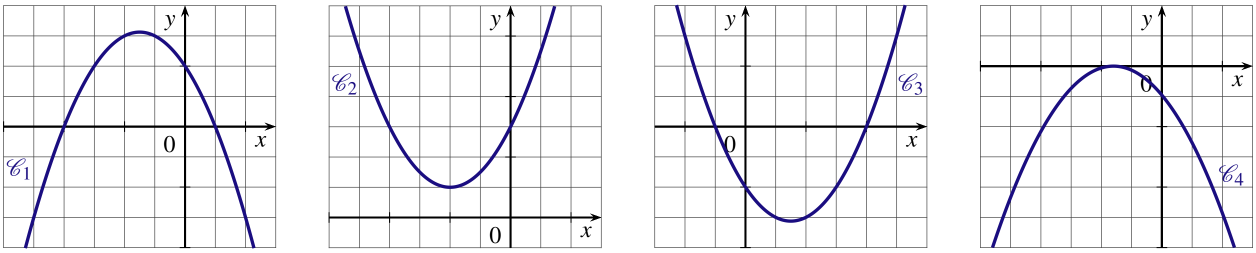


4. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



EXERCICE 3

1. Soit f une fonction polynôme du second degré telle que le maximum de la fonction f soit égal à 0.
   Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont exactes ?
   a) $a > 0$ et $\Delta < 0$.
   b) $a < 0$ et $\Delta = 0$.
   c) $a < 0$ et $\Delta < 0$.
   d) La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.
   e) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.
2. Les 4 paraboles ci-dessous, sont les courbes représentatives de quatre fonctions polynôme du second degré f_1, f_2, f_3 et f_4 .

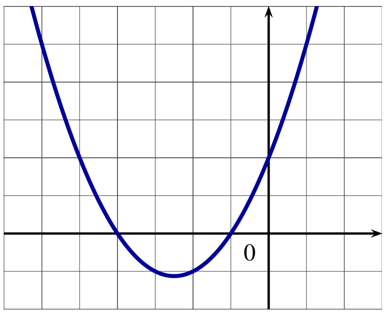


   À partir des informations données sur le signe de a et sur le discriminant, associer à chaque fonction sa courbe représentative :
   $f_1 : a > 0$ et $\Delta < 0$; $f_2 : a > 0$ et $\Delta > 0$; $f_3 : a < 0$ et $\Delta = 0$; $f_4 : a < 0$ et $\Delta > 0$.

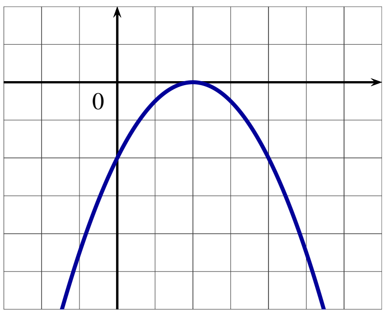
EXERCICE 4

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Dans chacun des cas suivants, préciser le signe de a et indiquer si le discriminant Δ est négatif, positif ou nul.

1. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



2. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



3. Le tableau des variations de f est

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

4. Le tableau des variations de f est

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2x^2 = x + 3$
- $8x^2 + 10x - 3 = 0$
- $2x^2 - 2x - 1 = 0$
- $1 - 3x + 2x^2 = 0$
- $x^2 - 3x + 9$
- $3x^2 + x = 2x^2 - x + 2$

EXERCICE 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormal est une parabole passant les points : $A(-2;7)$, $B(0;1)$ et $C(2;-1)$.

1. À l'aide d'un système d'équations, déterminer les réels a, b, et c, et en déduire l'équation de la parabole.
2. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation : $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.
   Calculer les coordonnées de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

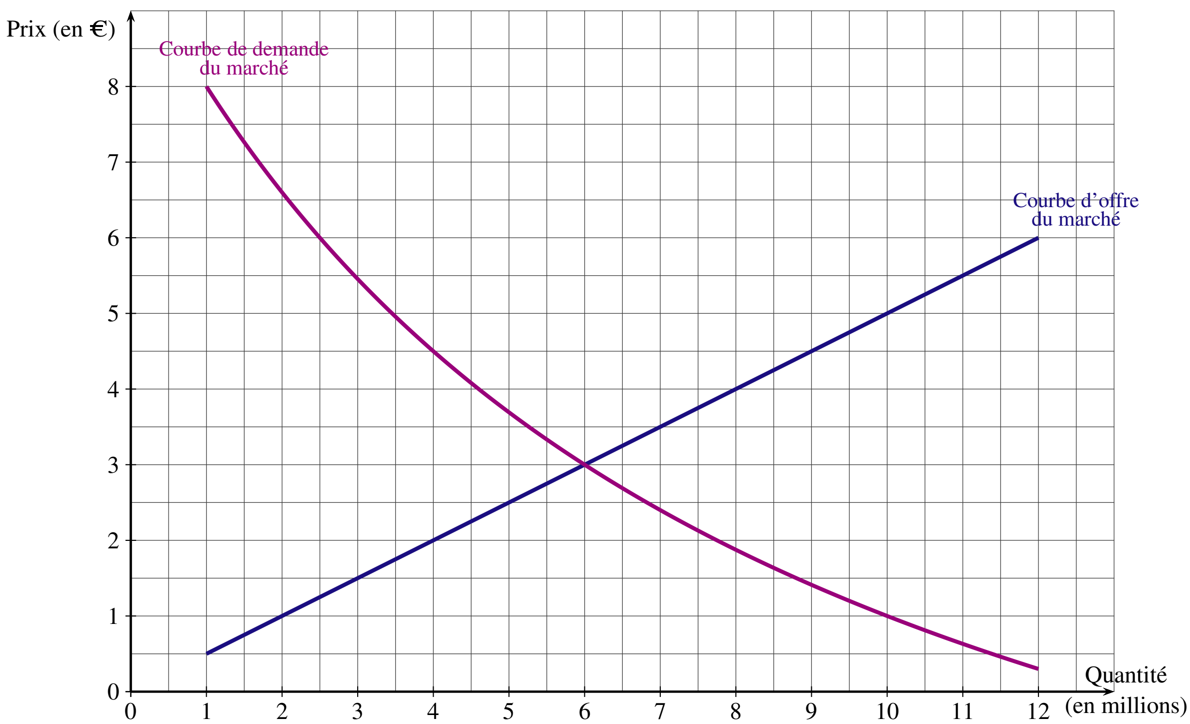
EXERCICE 7

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$

— la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78 - 6q}{q + 8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



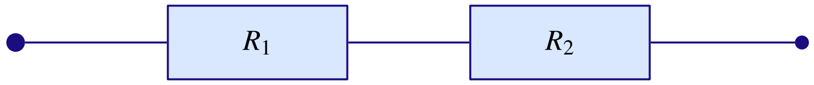
1. À l'aide du graphique précédent et en argumentant la réponse, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;

c) Quel problème cela pose-t-il ?

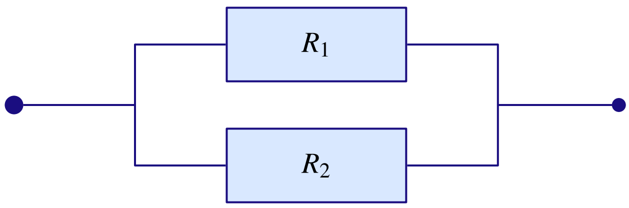
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 8

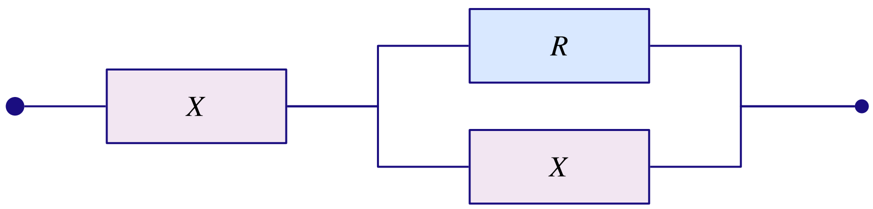
Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en série, la résistance du dipôle est $R = R_1 + R_2$



Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance du dipôle est $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$



On donne $R = 6\,\Omega$, déterminer la résistance X pour que la résistance du montage ci-dessous soit $16\,\Omega$.



EXERCICE 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $-4x^2 + 4x + 15 \geqslant 0$
- $-2x^2 + 5x + 12 \geqslant 0$
- $x^2 + 2x \leqslant 1$
- $4x^2 \leqslant 4x + 1$
- $3x - x^2 \leqslant x^2 + 4$
- $(2x + 1)(1 - 3x) \geqslant 1$

EXERCICE 10

1. Soit P la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant les points $A(-2;4)$, $B(2;-1)$ et $C(6;2)$.
À l'aide d'un système d'équations, déterminer les réels a, b, et c, et en déduire l'équation de la parabole.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2 - 5x + 2}{4} \leqslant -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$.
3. Soit D la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$.
Étudier les positions relatives de la droite D et de la parabole P.

EXERCICE 11

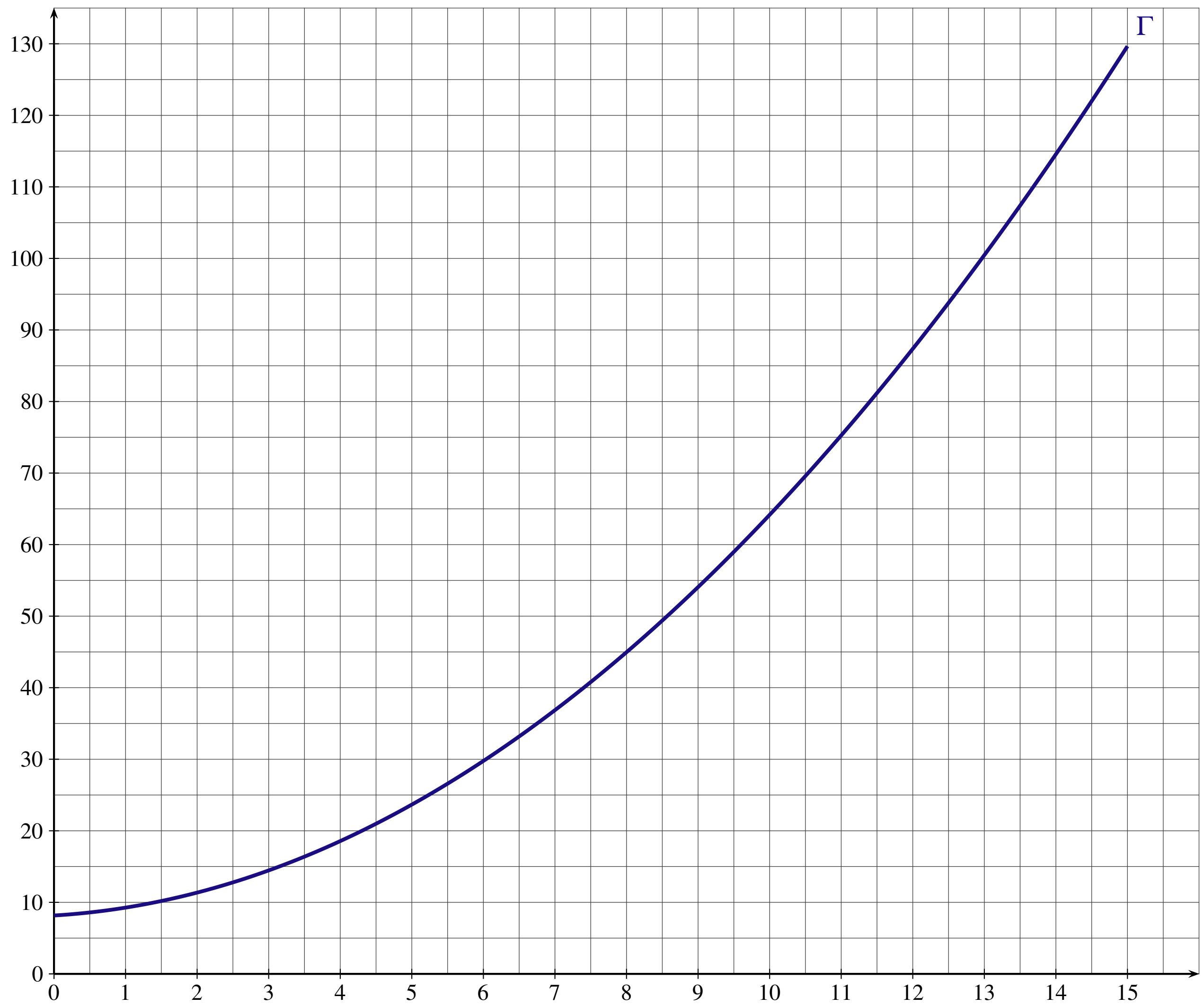
Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous à rendre avec la copie.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc $R(x) = 8x$.
   a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
   b) Par lecture graphique déterminer :
      — l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.
   a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16$ avec $x \in]0;15]$.
   b) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   c) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.
   En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

ANNEXE



EXERCICE 12

Une entreprise fabrique un produit dont le coût de production mensuel en euros est modélisé par :

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 37{,}5x + 3000$$

où x est le nombre d'unités produites mensuellement et x dans l'intervalle $]0;1300]$.
Pour éviter de se retrouver avec un stock important, l'entreprise ajuste son prix de vente en fonction de la quantité produite. Le prix de vente unitaire en euros en fonction de x, est $P(x) = 100 - 0{,}03x$.
On suppose que l'ajustement du prix de vente unitaire permet d'écouler toute la production et on note $R(x)$ la recette mensuelle générée par la production et la vente de x produits.
Les fonctions coût et recette sont représentées ci-dessous dans un repère orthogonal.

On cherche à déterminer la quantité que l'entreprise devrait produire mensuellement pour maximiser son profit.

1. Montrer que le bénéfice B est donné par $B(x) = -0{,}05x^2 + 62{,}5x - 3000$.
2. Déterminer graphiquement puis par le calcul, les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un profit.
3. Étudier les variations de la fonction B. En déduire la quantité x que l'entreprise doit produire mensuellement pour maximiser son profit. Quel est le montant du profit maximum ?

EXERCICE 13

La fonction f définie sur $]0;20]$ par $f(x) = 500 - 20x + \dfrac{100}{x}$, modélise le nombre d'articles vendus en fonction du prix unitaire x exprimé en euros.

1. Calculer le montant en euros de la recette si le prix de vente d'un article est : de 5 euros ; de 10 euros.
2. Montrer que la recette en fonction du prix x s'exprime par $R(x) = -20x^2 + 500x + 100$
3. Étudier les variations de la fonction recette sur l'intervalle $]0;20]$.
4. Déterminer le prix de vente permettant d'obtenir une recette maximale.
   En déduire le nombre d'articles vendus à ce prix.
5. Dans quel intervalle de prix, doit se situer le prix de vente pour obtenir une recette supérieure à 2 980 € ?

EXERCICE 14

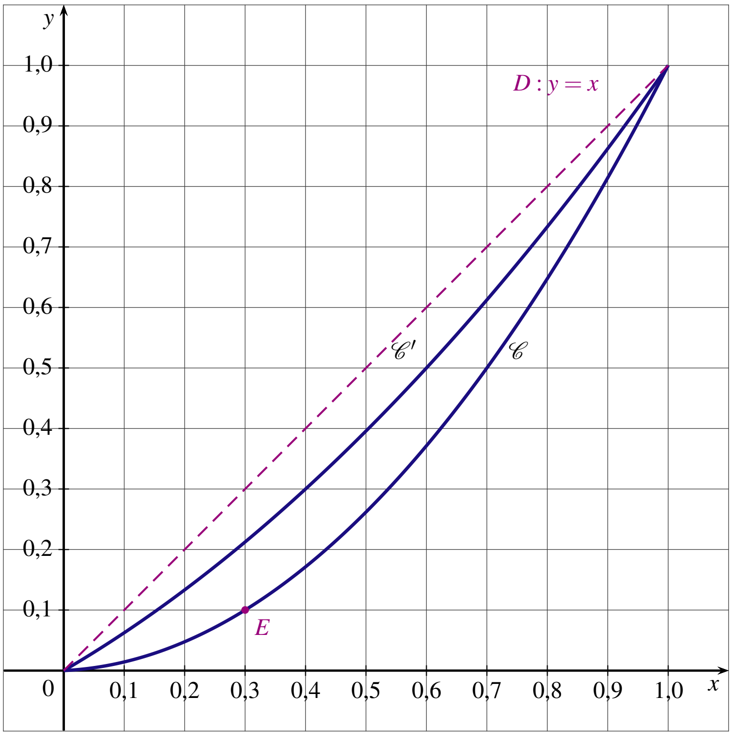
1. Résoudre l'équation $X^2 - 7X - 18 = 0$
2. En déduire une expression factorisée de $f(x)$ où f est la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^4 - 7x^2 - 18$$

3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15

On considère les fonctions f et définies sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{5x^2+7x}{12}$ et $g(x) = \dfrac{20x^2+x}{21}$, représentées ci-dessous par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$



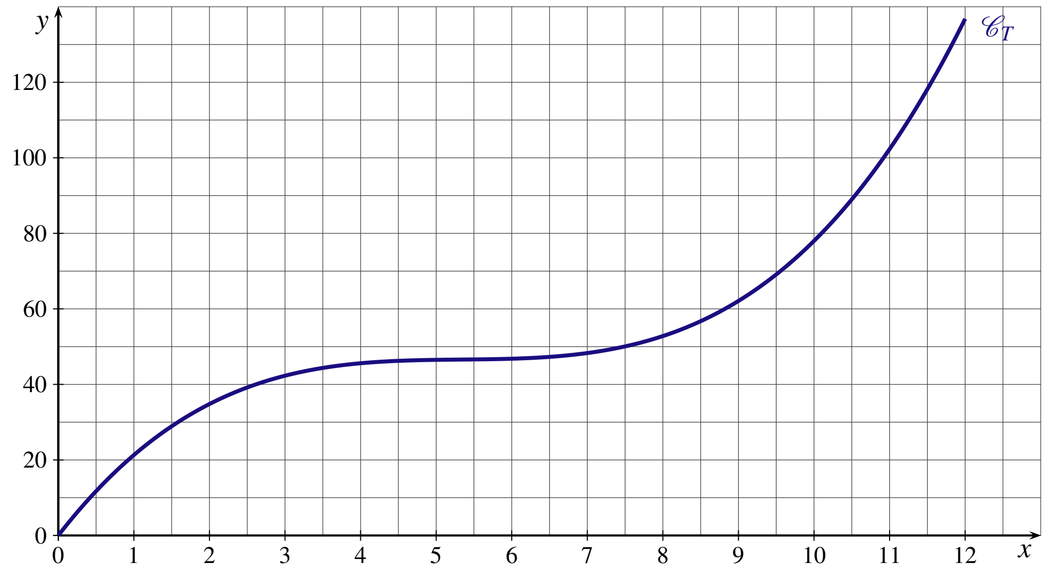
1. Déterminer la courbe représentative de la fonction f en justifiant la réponse.
2. Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, on a : $f(x) \leqslant x$ et $g(x) \leqslant x$.
3. Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.
   Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction f pour la filiale A et par la fonction g pour la filiale B.
   Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $f(x)$ et $g(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.
   Exemple : pour la courbe $\mathscr{C}$, le point $E(0{,}3;0{,}1)$ signifie que 30 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 10 % de la masse salariale.
   a) Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
   b) Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?
   c) Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

EXERCICE 16

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 12 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction f définie sur $]0;12]$ par :

$$f(x) = 0{,}3x^3 - 4{,}8x^2 + 25{,}8x$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_T$ de la fonction coût total est donnée ci-dessous :



Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.
On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;12]$ par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_T$.
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. a) Étudier les variations de la fonction C.
   b) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?