MATHÉMATIQUES

SECONDE

A. YALLOUZ

Ce polycopié conforme au programme 2010, regroupe les documents distribués aux élèves en cours d'année.

CERTAINS CHAPITRES DU PROGRAMME NE SONT PAS TRAITÉS

Année 2013-2014

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

ENSEMBLES DE NOMBRES

I ENSEMBLES DE NOMBRES

1 NOMBRES ENTIERS NATURELS

DÉFINITION

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;\dots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.
On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

EXEMPLES

$$245 \in \mathbb{N}; \qquad -5 \notin \mathbb{N}; \qquad 2^5 \in \mathbb{N}; \qquad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \qquad 0 \in \mathbb{N}; \qquad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

La notation « $x \in E$ » signifie que l'élément x *appartient* à l'ensemble E.
La notation « $x \notin E$ » signifie que l'élément x *n'appartient pas* à l'ensemble E.

NOTIONS D'ARITHMÉTIQUE

Soient a et b deux nombres entiers naturels.
- on dit que b *divise* a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$. (on dit encore que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b)
- Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

2 NOMBRES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\dots;-2;-1;0;1;2;3;\dots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.
En particulier, l'ensemble $\mathbb{N}$ est *contenu* (ou inclus) dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

La proposition « Si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ » est vraie.
Par contre, la réciproque « Si $n \in \mathbb{Z}$ et $-n \in \mathbb{Z}$ alors $n \in \mathbb{N}$ » est fausse. (Il suffit de choisir $n = -1$)

3 NOMBRES DÉCIMAUX

L'ensemble des *nombres décimaux* est $\mathbb{D} = \left\{\dfrac{n}{10^k} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\right\}$. Ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{D}\,; \qquad 0{,}3333 \in \mathbb{D}\,; \qquad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}\,; \qquad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}\,; \qquad 3{,}1416 \in \mathbb{D}\,; \qquad \pi \notin \mathbb{D}.$$

4 NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

- La fraction $\dfrac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).
- La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.
- La division par 0 est **interdite** : l'écriture $\dfrac{a}{0}$ n'a aucun sens.

EXEMPLES

$$-13 \in \mathbb{Q}\,; \qquad 0{,}5 \in \mathbb{Q}\,; \qquad -\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}\,; \qquad \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}\,; \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\,; \qquad \pi \notin \mathbb{Q}.$$

5 NOMBRES RÉELS

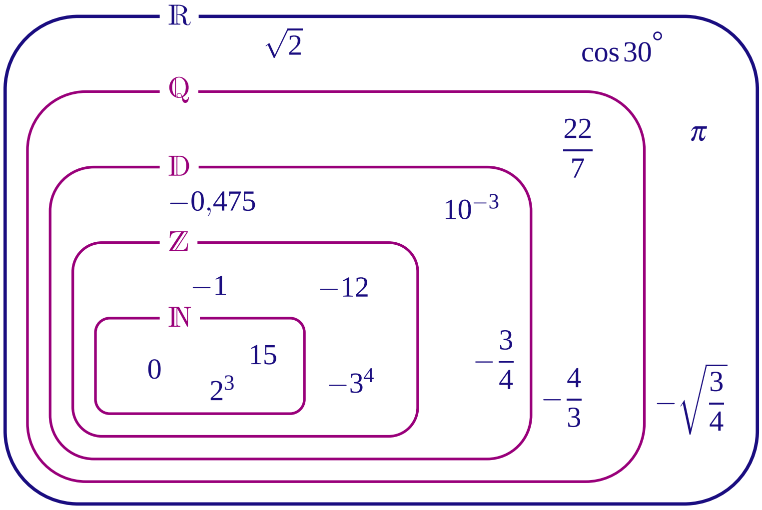
Dès l'antiquité, on avait découvert l'insuffisance des nombres rationnels.
Par exemple, il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$ on dit que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

L'ensemble de tous les nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$

Chaque nombre réel correspond à un unique point de la droite graduée. Réciproquement, à chaque point de la droite graduée correspond un unique réel, appelé *abscisse* de ce point.

INCLUSIONS

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II INTERVALLES ET INÉQUATIONS

1 INTERVALLES

Soient $a < b$ deux nombres réels :

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est l'intervalle $[a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est l'intervalle $]a;b[$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $[a;b[$

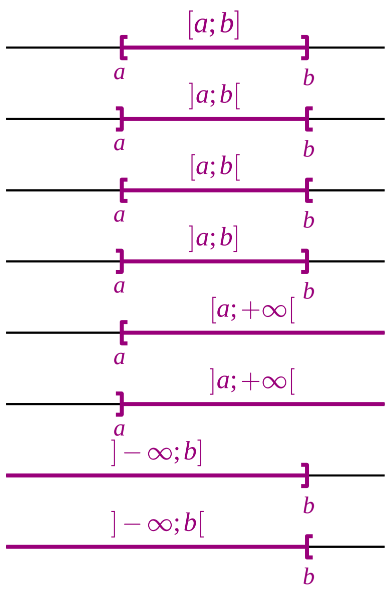
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est l'intervalle $]a;b]$

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est l'intervalle $[a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est l'intervalle $]a;+\infty[$

L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant b$ est l'intervalle $]-\infty;b]$

L'ensemble des réels x tels que $x < b$ est l'intervalle $]-\infty;b[$



2 INTERSECTION ET RÉUNION D'INTERVALLES

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

– Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I **et** dans l'intervalle J sont dans **l'intersection** des intervalles I et J :

$$\text{Si } x \in I \text{ et } x \in J, \text{ alors } x \in I \cap J \qquad (\cap \text{ se lit } \textit{inter})$$

– Les réels qui sont dans l'intervalle I **ou** dans l'intervalle J sont dans **la réunion** des intervalles I et J :

$$\text{Si } x \in I \text{ ou } x \in J, \text{ alors } x \in I \cup J \qquad (\cup \text{ se lit } \textit{union})$$

EXERCICE 1

1. La somme de deux entiers consécutifs est-elle divisible par 2 ?
2. On considère trois entiers consécutifs quelconques. On note n le premier.
   Exprimer la somme de ces trois entiers en fonction de n et expliquer pourquoi elle est divisible par 3.
3. Soit n un entier naturel impair. Expliquer pourquoi $(n-1)\times n\times(n+1)$ est divisible par 8.
4. a) Soit n un entier naturel, développer le produit $(n+1)(n+2)$.
   En déduire une factorisation de $E(n)=(n^2+3n+1)^2-1$
   b) Lorsque l'on augmente de 1 le produit de quatre nombres entiers consécutifs, obtient-on un carré parfait ?

EXERCICE 2

1. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{5}{4}$ pour obtenir le double de $\dfrac{5}{4}$?
2. Quel nombre faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{7}{3}$ pour obtenir l'inverse de $\dfrac{7}{3}$?

EXERCICE 3

Simplifier l'écriture des nombres suivants, puis indiquer lesquels sont des nombres décimaux :

$a=\dfrac{2^2\times3^2\times5^4}{2^3\times3\times5^3}$; $b=\dfrac{2^{-1}\times5}{5^2\times3^{-2}\times\times6^3}$; $c=\dfrac{2^6\times10^{-3}-3^2\times10^{-2}}{13\times10^{-2}}$

EXERCICE 4

Pour chacun des nombres suivants, simplifier l'écriture puis, en déduire le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) auquel il appartient :

$A=\left(1-\sqrt{16}\right)^2$; $B=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{20}-\sqrt{45}}{\sqrt{180}}$; $C=\left(\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{18}}{3}\right)^2$;

$D=\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; $E=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; $F=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$;

$G=\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}}$; $H=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}$; $I=\left(\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{4+\sqrt{12}}\right)^2$.

EXERCICE 5

1. Le réel $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est-il solution de l'équation $x^2-x-1=0$?
2. Soit le réel $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Vérifier que $1+\dfrac{1}{b}=b$.
3. L'opposé du réel b est-il égal à l'inverse du réel a ?

EXERCICE 6

1. Montrer que pour tout entier naturel n, le réel $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ est l'inverse du réel $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
2. En déduire la valeur de $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}$.

EXERCICE 7

Soit $E=2x^3-x^2-5x-1$.
Calculer E pour $x=-1$ ou $x=0{,}5$ ou $x=2$. Peut-on conclure que pour tout réel x, $E=1$?

EXERCICE 8

Les égalités suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. $(x-2)^2\left(x^2+2x+2\right)=x^4-2x^3-2x^2+6$
2. $(x+2)\left(x^2-2x-1\right)=x^3-4x-2$
3. $(x-3)\left(x^2+2x+1\right)=x^3-5x^2+7x-3$

EXERCICE 9

Développer et réduire les expressions suivantes :
$A=15x-(2x+3)^2$; $B=(x+2)(x-2)-(x+1)^2$; $C=(2-a)^2-(2+a)^2$

EXERCICE 10

Factoriser les expressions suivantes :
$A=49x^2-14x+1$; $B=(x+3)^2-16$; $C=x^2-25-(x+5)(1-2x)$

EXERCICE 11

Compléter par l'un des symboles : $\in$, $\notin$.

$\pi \ \ldots \ \left[\frac{333}{106};\frac{22}{7}\right]$; $-\frac{2}{3} \ \ldots \ \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$; $0{,}2 \ \ldots \ \left]\frac{1}{5};+\infty\right[$; $\sqrt{2} \ \ldots \ \left[\frac{7}{5};1{,}414\right[$

EXERCICE 12

1. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions de l'inéquation $2x-3>0$
2. Déterminer l'ensemble S_2 des solutions de l'inéquation $1-2x\geqslant 0$.

EXERCICE 13

Compléter le tableau suivant :

	Inégalité(s)	Intervalles(s)
a)		$x\in\left]-\frac{5}{6};2\right]$
b)	$x\leqslant\frac{3}{4}$	
c)	$x>-\sqrt{2}$	
d)	$x>5$ ou $x\leqslant-5$	
e)		$x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cap\left[-\frac{3}{4};+\infty\right[$

EXERCICE 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions à l'aide d'un intervalle.
a) $3x-1\geqslant 2-5x$; b) $3-2x\leqslant x-2$; c) $(2x-1)^2<4x^2$.

Chapitre 2

FONCTIONS

I NOTION DE FONCTION

1 FONCTION

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

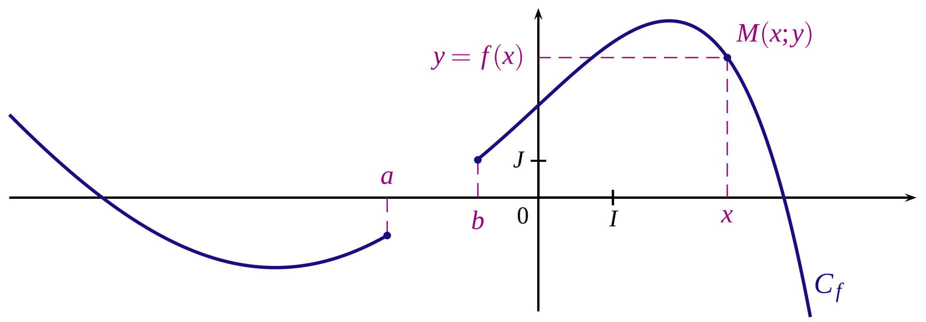
– $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.
– Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.
– Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
– L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[0;+\infty[$.
– L'image de 9 par la fonction f est $f(9) = \sqrt{9} = 3$.
– 9 est l'antécédent de 3 par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

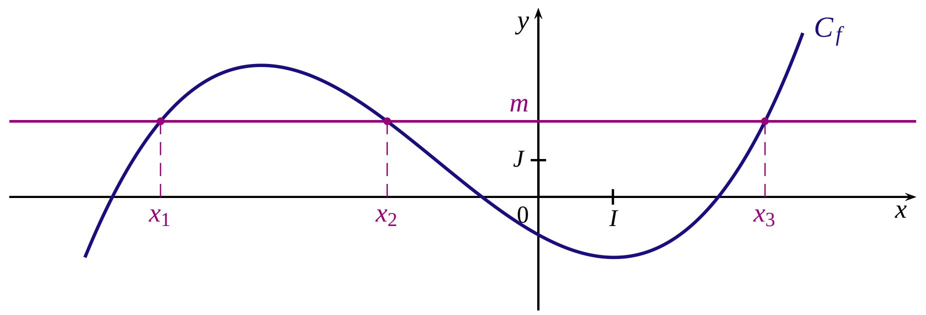
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.



C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;a] \cup [b;+\infty[$

RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATION ET D'INÉQUATION

Soient C_f la courbe représentative d'une fonction f et m un réel.
– Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'ordonnée m.
– Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est inférieure à m (respectivement supérieure à m)



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$ est $\mathscr{S} = \{x_1;x_2;x_3\}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ est $\mathscr{S} =]-\infty;x_1] \cup [x_2;x_3]$

II VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

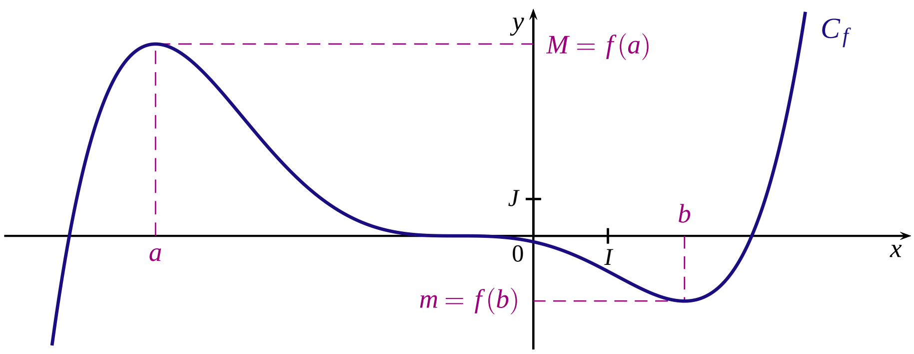
On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

FONCTION CONSTANTE

Dire que la fonction f est constante sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I.

$$f(x) = k \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

TABLEAU DE VARIATION



On résume les variations de la fonction f à l'aide du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f(x)$		↗	M	↘	m	↗	

EXTREMUM

- Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.
- Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Dans l'exemple précédent : M est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; b]$ atteint pour $x = a$;
m est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[a; +\infty[$ atteint pour $x = b$.

EXERCICE 1

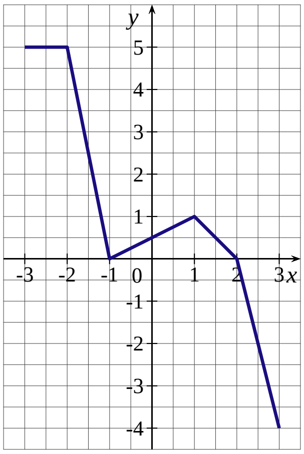
f et g sont deux fonctions

1. Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :
   a. L'image de -1 par la fonction f est 3.
   b. L'antécédent de $\sqrt{2}$ par la fonction f est 3.
   c. -3 a pour image 1 par la fonction g.
   d. 3 a pour antécédents -1 et 2 par la fonction g.
2. On sait que $f(-2) = 1$ et $g(1) = -2$
   a) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "image".
   b) Traduire chacune des deux égalités par une phrase contenant le mot "antécédent".

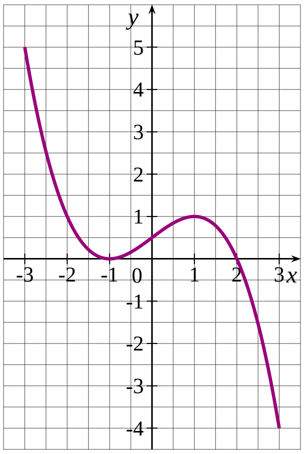
EXERCICE 2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$. On sait que :
– les images de -3 ; 0 et 3 par la fonction f sont respectivement 5 ; 0,5 et -4
– 0 a exactement deux antécédents -1 et 2.

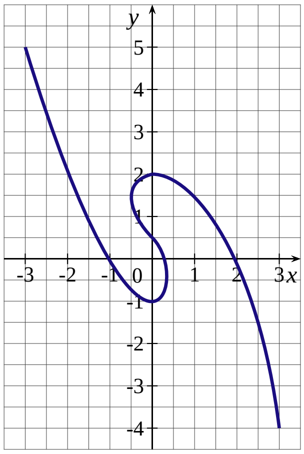
1. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
   a) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
   b) Le point $M(-1;0)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.
   c) La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des ordonnées en deux points.
2. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent représenter la fonction f ? (*Justifier*)



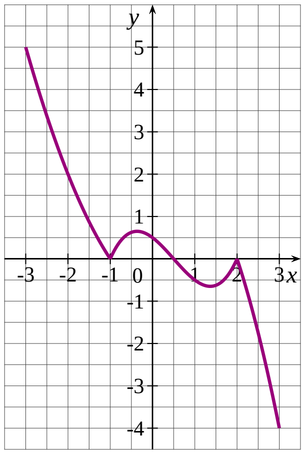
courbe $\mathscr{C}_1$



courbe $\mathscr{C}_2$



courbe $\mathscr{C}_3$



courbe $\mathscr{C}_4$

EXERCICE 3

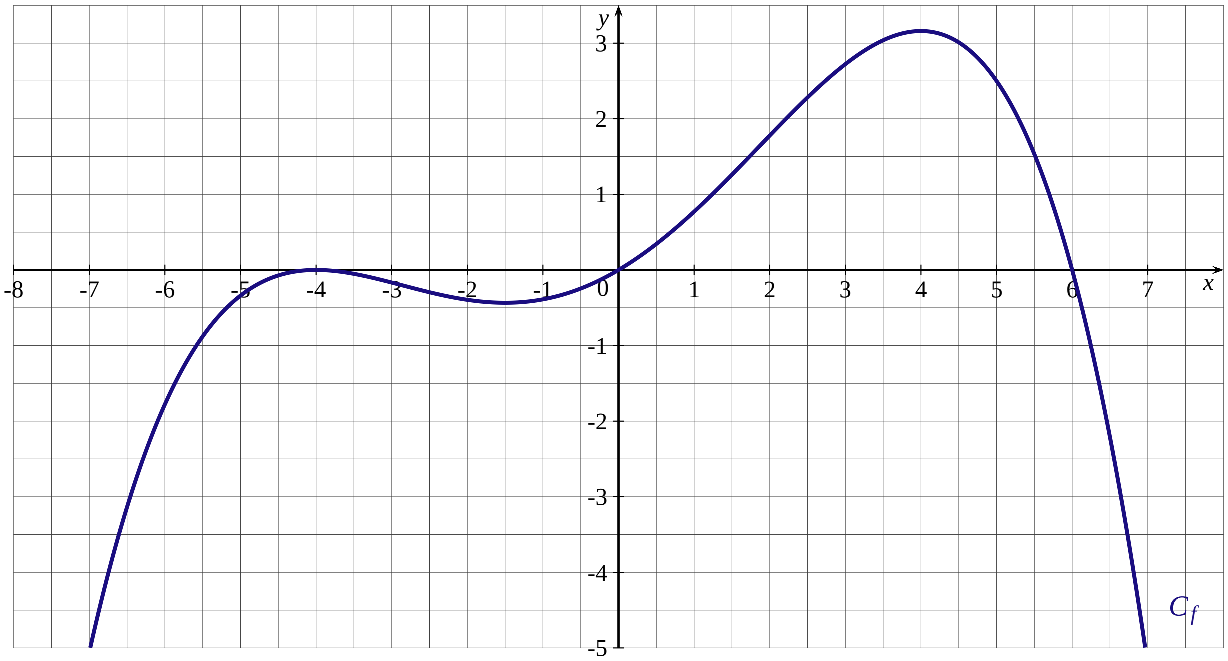
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-10;10]$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-10		-5		1		3		5		10
$f(x)$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

1. Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
2. Comparer $f(-1)$ et $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$
3. Le tableau permet-il de comparer les images de 2 et 4 ?

EXERCICE 4

La courbe C_f tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?
2. Pour chacune des solutions de l'équation $f(x) = -2$, déterminer un intervalle d'amplitude 0,5 auquel appartient cette solution.
3. Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f.

EXERCICE 5

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(-3;0)$ et $C(7,5;0)$.
$M(x;0)$ est un point du segment $[BC]$. Soit f la fonction qui à x associe la distance AM.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Établir le tableau des variations de la fonction f.
   b) En déduire le nombre de solutions de chacune des équations suivantes $f(x) = 3$; $f(x) = 4$; $f(x) = 5$ et $f(x) = 9$.
3. Résoudre les équations $f(x) = 4,1$ et $f(x) = 5,8$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 - 9x^2$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de $-\dfrac{1}{2}$?
4. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère ?
5. Quelles sont les abscisses des points de la courbe C_f qui ont pour ordonnée 4 ?

Chapitre 3

FONCTIONS AFFINES

I FONCTION AFFINE

1 DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

EXEMPLES

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ est une fonction affine avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -3$.
- La fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ n'est pas une fonction affine.

CAS PARTICULIERS

- Dans le cas où $b = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire.
- Dans le cas où $a = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b$ est une fonction constante.

2 PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

✼ DÉMONSTRATION

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Alors pour tous réels $x_1 \neq x_2$ on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $x_1 \neq x_2$, on a $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.
Alors, en particulier pour tout réel $x \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = a$$

D'où $f(x) - f(0) = ax$. Soit en notant l'image de 0 $f(0) = b$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
Ainsi, f est une fonction affine.

EXEMPLE

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-6) = 5$ et $f(3) = -1$.
f est une fonction affine d'où pour tout réel x, $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{f(3) - f(-6)}{3 - (-6)} \qquad \text{Soit} \qquad a = \frac{-1 - 5}{3 + 6} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi, $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + b$. Or $f(3) = -1$ d'où

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times 3 + b = -1 &\Leftrightarrow -2 + b = -1 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

3 VARIATION

Soit a et b deux réels.
- Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante.
- Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

❊ DÉMONSTRATION

Si a est positif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \geqslant 0$, $ax_1 \leqslant ax_2$. D'où $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$
Soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
Donc f est croissante

Si a est négatif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \leqslant 0$, $ax_1 \geqslant ax_2$. D'où $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$
Soit $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
Donc f est décroissante

4 SIGNE DE $ax + b$ AVEC $a \neq 0$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{b}{a}$.

❊ DÉMONSTRATION

Si $a \neq 0$ alors l'équation $ax + b = 0$ admet pour solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$ alors f est strictement croissante :
donc pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < 0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante :
donc pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > 0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

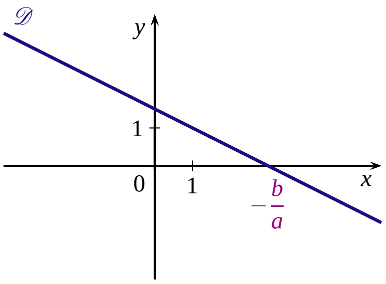
Par conséquent, si $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

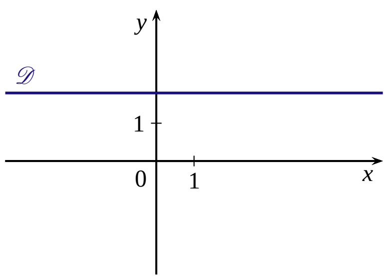
5 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.

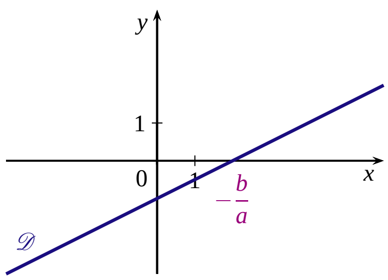
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



II INÉQUATIONS

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

$$\text{Résoudre } A(x) \leqslant B(x) \text{ équivaut à résoudre } A(x) - B(x) \leqslant 0.$$

1 ÉTUDE DU SIGNE D'UN PRODUIT

RÈGLE DES SIGNES D'UN PRODUIT

Le produit de deux nombres de même signe est positif. Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT

Pour étudier le signe d'un produit :
- On étudie le signe de chaque facteur.
- On regroupe dans un tableau le signe de chaque facteur. La première ligne du tableau contenant les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, qui annulent chacun des facteurs.
- On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow [(2x+3)+(3x-1)] \times [(2x+3)-(3x-1)] \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (2x+3+3x-1)(2x+3-3x+1) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (5x+2)(4-x) \leqslant 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $(5x+2)(4-x)$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des facteurs du produit :

$$5x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 4-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+2)(4-x) \leqslant 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[4; +\infty\right[$.

2 ÉTUDE DU SIGNE D'UN QUOTIENT

RÈGLE DES SIGNES D'UN QUOTIENT

Le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN QUOTIENT

Pour étudier le signe d'un quotient :
- On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).
- On regroupe dans un tableau le signe de chaque terme.
- On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x+7) - 2\times(3x+2)}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.

La double barre dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3-4x}{3x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}\right]$.

EXERCICE 1

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - 1$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous, donne le signe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\Gamma(x)$		$+$	0	$-$	

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui admettent le même tableau de signes ?

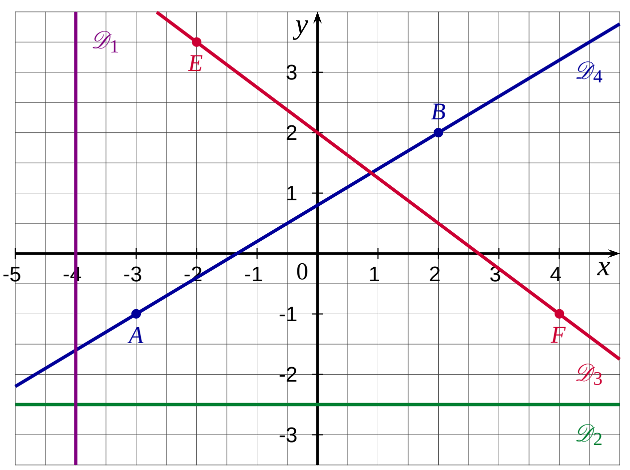
$f(x) = -x + 2$; $\quad g(x) = -1 - \dfrac{x}{2}$; $\quad h(x) = x^2 + 4$; $\quad k(x) = 2x + 4$; $\quad l(x) = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{4}{3}$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2; -1)$ et $(1; 3)$.

EXERCICE 4



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 5

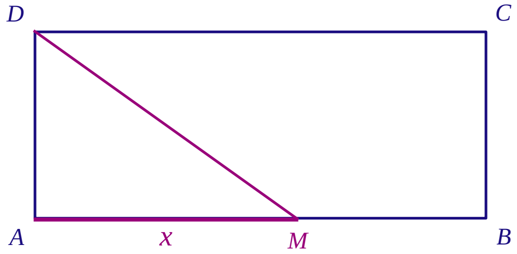
– Augmenter une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 + \dfrac{t}{100}$

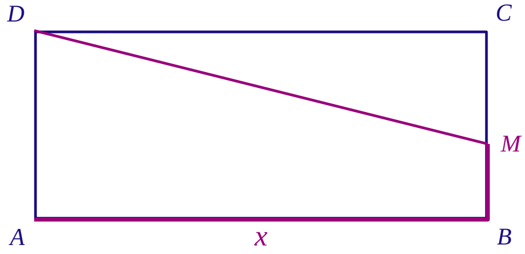
– Diminuer une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 - \dfrac{t}{100}$

1. Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 8% puis de 5% ?
2. Après une hausse de 6,25% le prix d'un article est de 272€. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
3. Après une baisse de 5,6% le prix d'un article est de 236€. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
4. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 6

ABCD est un rectangle de longueur $AB = 10$ et de largeur $AD = 4$.
M est un point mobile le long de la ligne brisée *ABC*.
Si $M \in [AB]$, on pose $x = AM$; si $M \in [BC]$, on pose $x = AB + BM$.



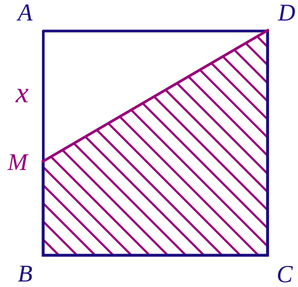


$\mathscr{A}(x)$ est selon la position du point *M* l'aire du triangle *ADM* ou du trapèze *ADMB*

1. Représenter la fonction $\mathscr{A}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
2. Déterminer la position du point *M* telle que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale au tiers de l'aire du rectangle.

EXERCICE 7

ABCD est un carré de côté 6.
À tout point *M* du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.



Le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze *BCDM*.

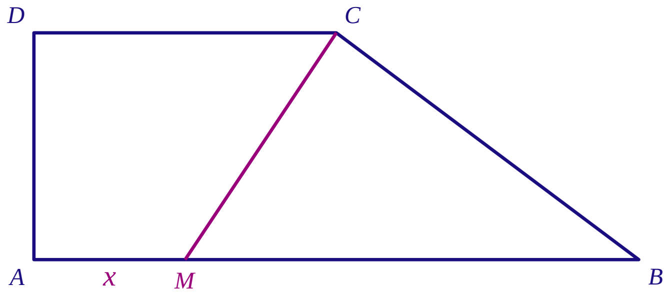
1. Montrer que sur l'intervalle $[0;6]$, f est affine.
2. Résoudre $f(x) \leqslant 24$.

EXERCICE 8

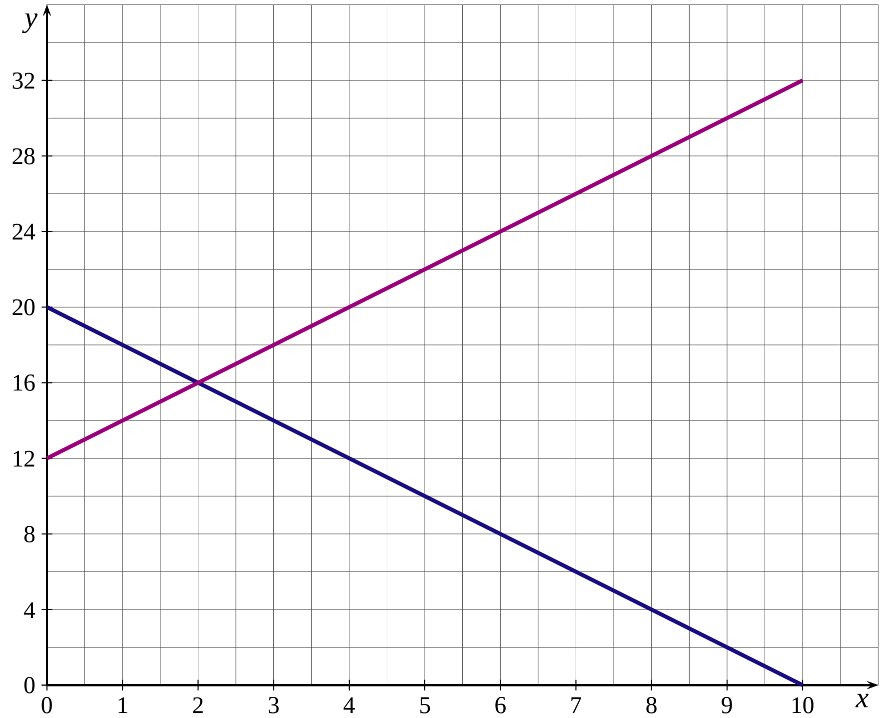
1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 9

ABCD est un trapèze rectangle. À tout point *M* du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.



Le réel $f(x)$ est égal à l'aire du triangle BMC. Le réel $g(x)$ est égal à l'aire du trapèze $AMCD$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous :



À l'aide du graphique, déterminer les distances AB, AD et CD.

EXERCICE 10

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$ et $g(x) = (5x+1)^2$.
On cherche à résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

1. Factoriser l'expression de $f(x) - g(x)$.
2. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

EXERCICE 11

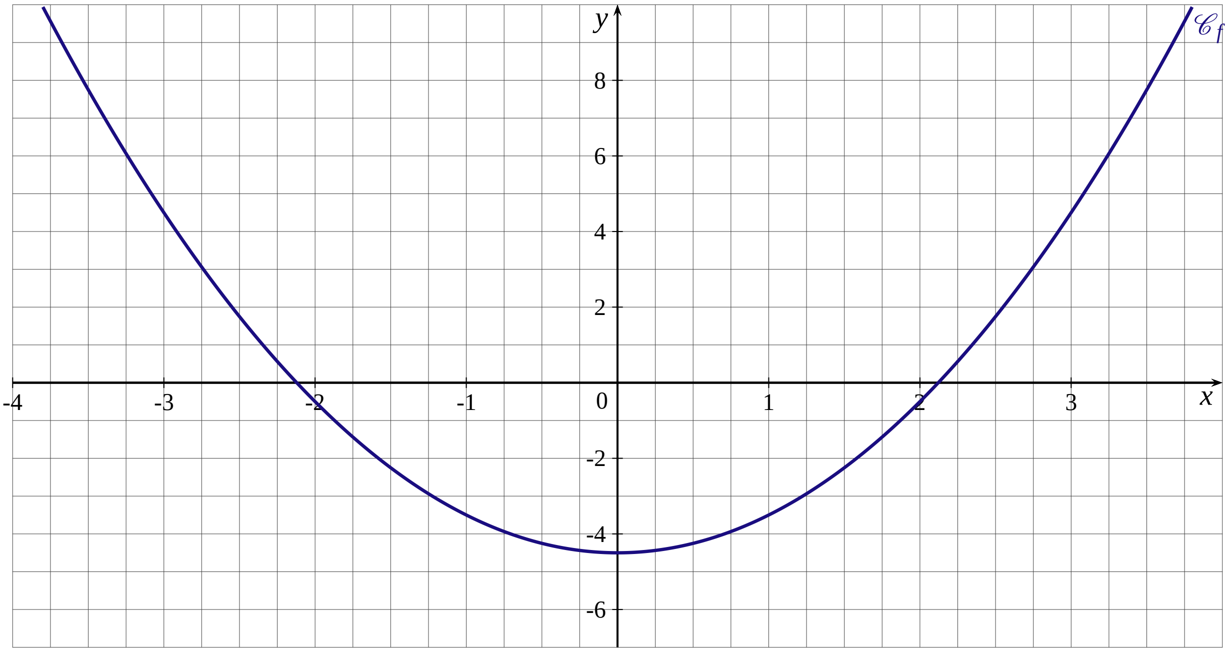
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x-2)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0$
2. $(2-3x)^2 \leqslant (2-3x)(3-5x)$
3. $\dfrac{3x+4}{1-2x} \geqslant 0$
4. $\dfrac{2x}{3x+2} < 1$

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{9}{2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe C_f est tracée ci dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

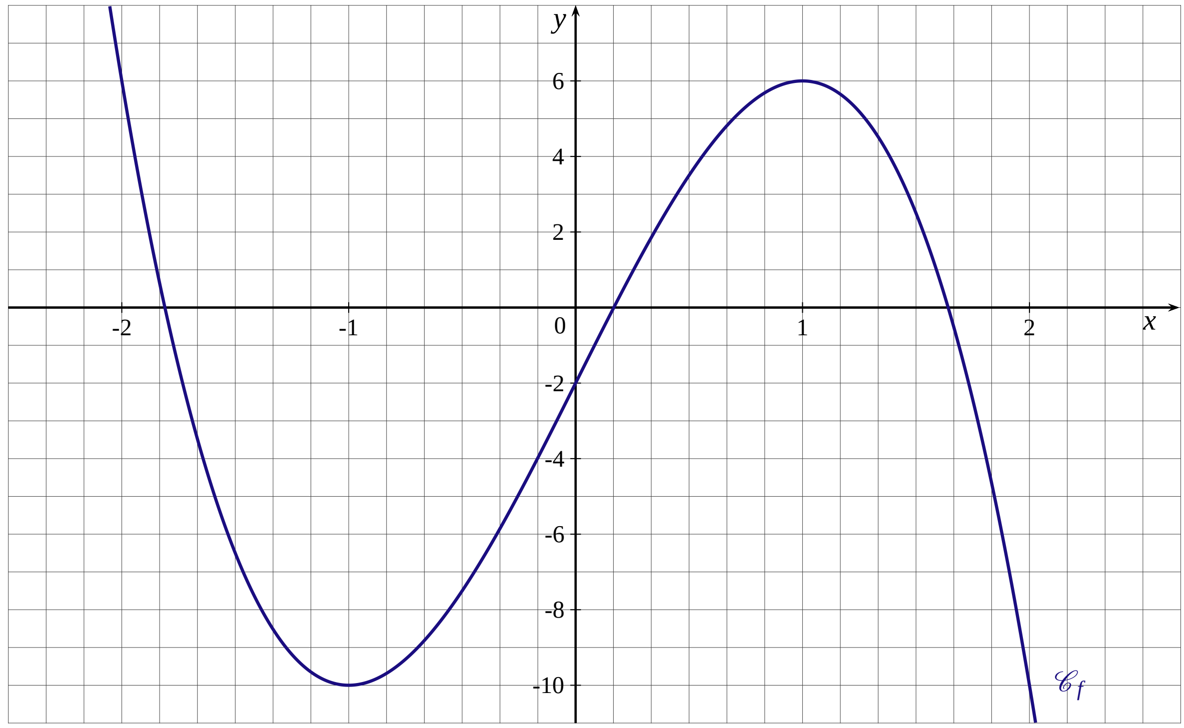
1. Soit g la fonction affine telle que $g\left(-\dfrac{9}{4}\right) = -6$ et $g\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci dessous.



2. a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x-3)(x+1)$.
   b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 12x - 2$.
Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le repère orthogonal ci-dessous.



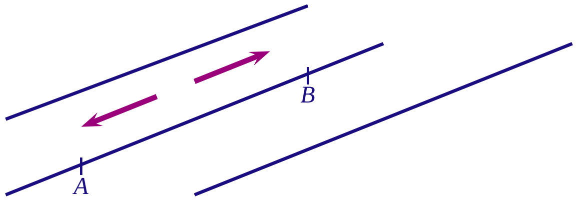
1. Soit g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(3) - g(-1) = 12$ et $g(2) = 4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2. a) Factoriser $f(x) - g(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.
   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite D avec la courbe C_f.

Chapitre 4

VECTEURS DU PLAN

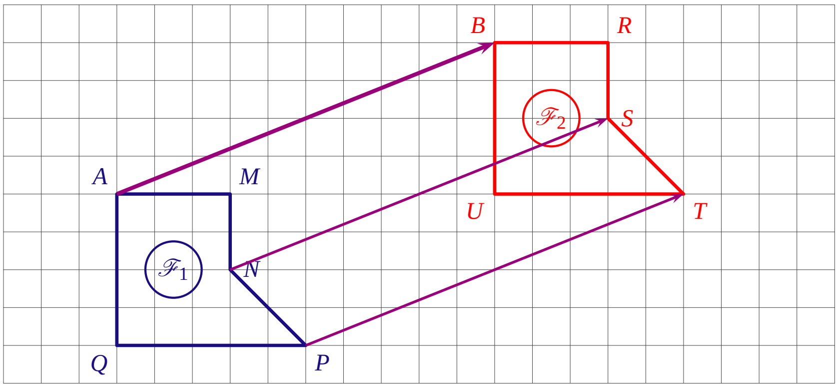
I TRANSLATION

1 SENS ET DIRECTION



– Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.
– Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB), il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B, soit de B vers A.

2 VECTEUR D'UNE TRANSLATION



Le glissement qui permet d'obtenir la figure $\mathscr{F}_2$ à partir de la figure $\mathscr{F}_1$ peut être décrit de façon précise par trois caractères :
– la *direction* du glissement est donnée par la droite (AB) ;
– le *sens* du glissement est celui de A vers B ;
– la *distance* du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.
On dit que la figure $\mathscr{F}_2$ est l'image de la figure $\mathscr{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

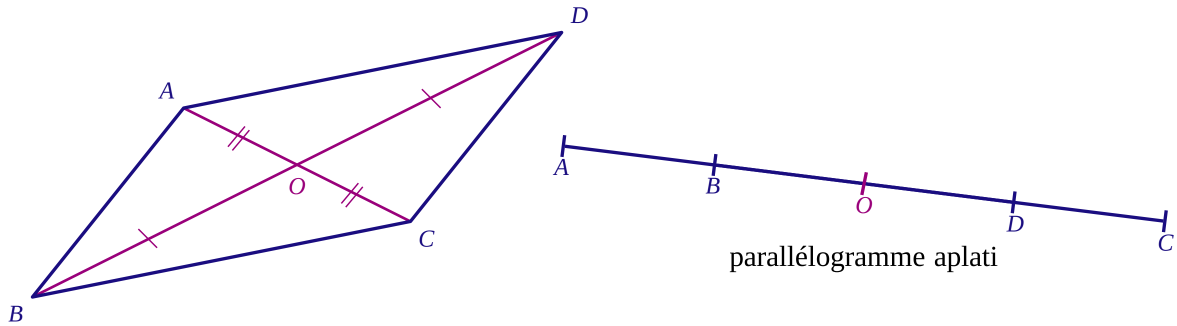
REMARQUE

Les vecteur $\overrightarrow{NS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{PT}$$

3 PARALLÉLOGRAMME

DÉFINITION



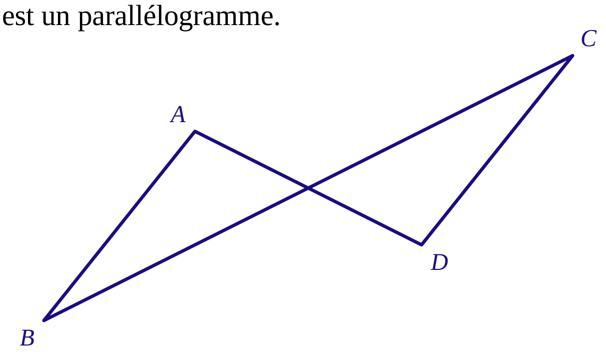
Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu

PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si $(AB)//(DC)$ et $(AD)//(BC)$.
- Dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

REMARQUE

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB)//(CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme

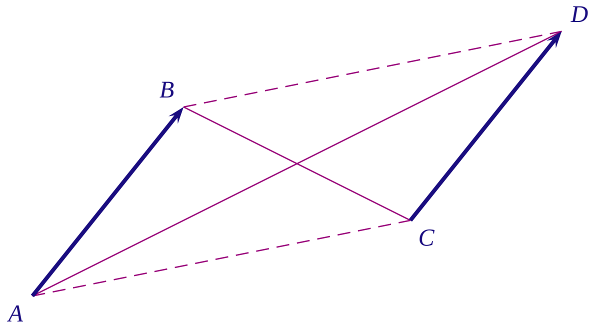
II VECTEURS

Un couple (A,B) du plan détermine un vecteur. A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note $\overrightarrow{AB}$

1 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation

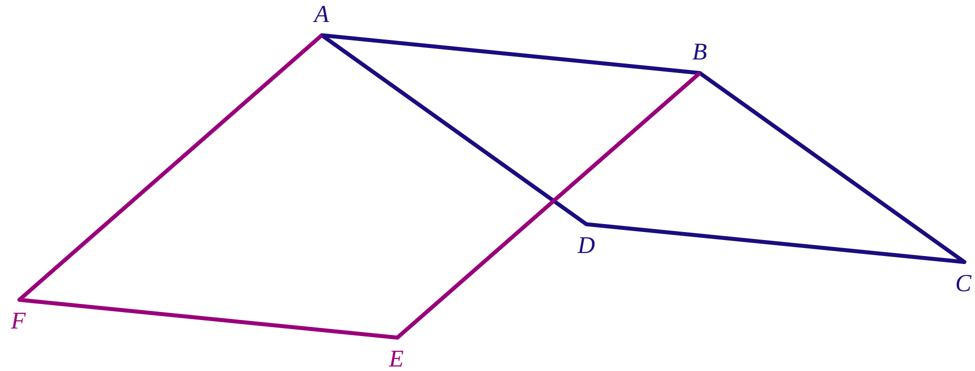
DÉFINITION



A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

EXEMPLE : LES TROIS PARALLÉLOGRAMMES

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrer que $DCEF$ est un parallélogramme.



- $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
- $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

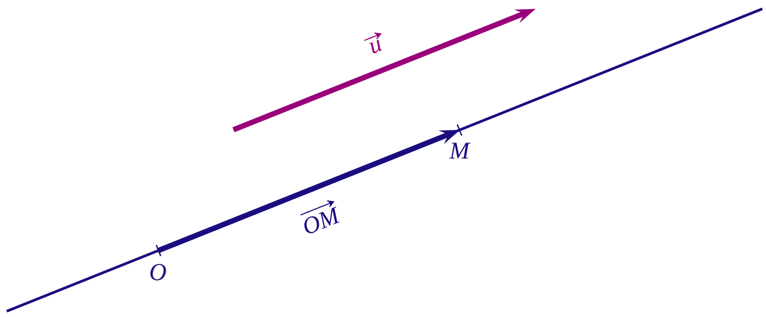
2 REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FE}$, ... sont des représentants du vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\cdots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un un point M unique tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

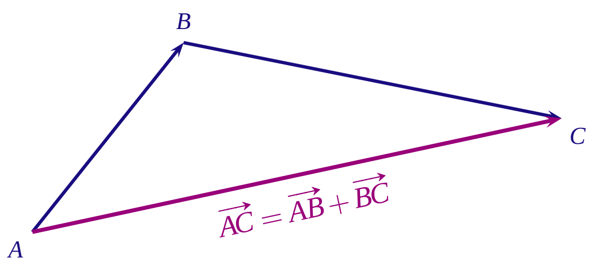


Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :
- Sa direction : c'est celle de la droite (OM).
- Son sens : c'est le sens de O vers M.
- Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM.

III ADDITION VECTORIELLE

1 SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C.
Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$



RELATION DE CHASLES

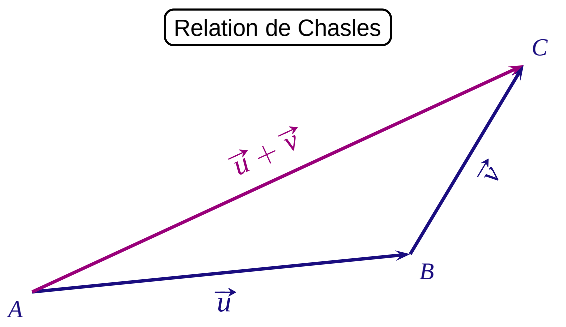
Quels que soient les points A, B et C on a :

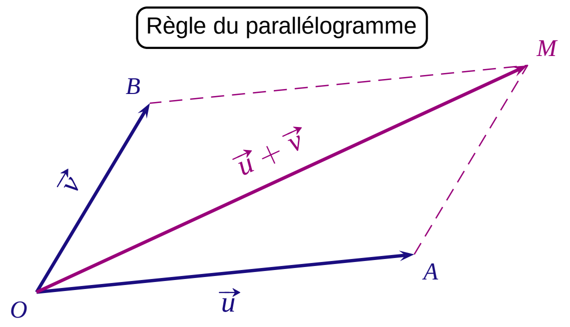
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

La somme $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS





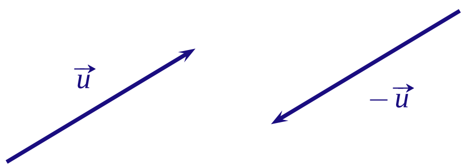
PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{u}+\vec{w})$

2 DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.



CONSÉQUENCE

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$:

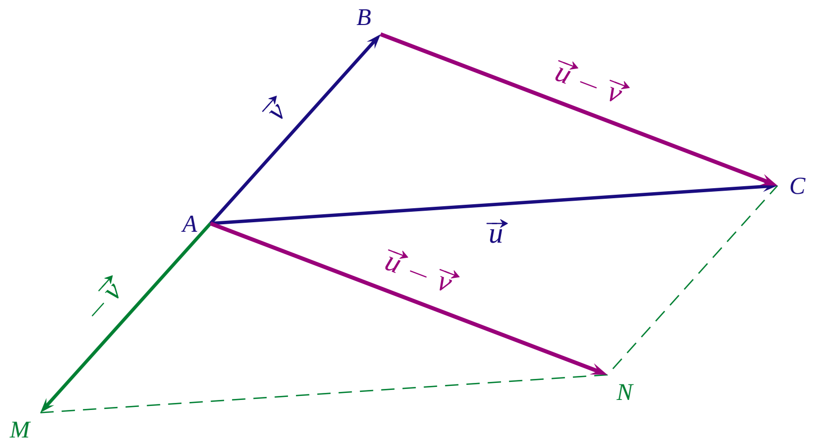
$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

❊ PREUVE

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

DÉFINITION

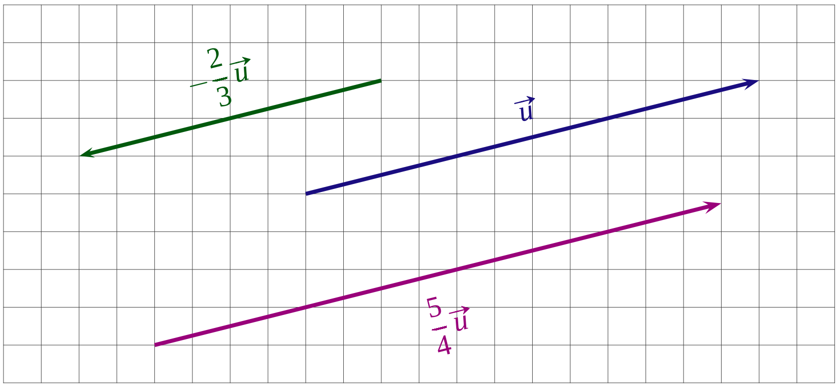
Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

IV MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

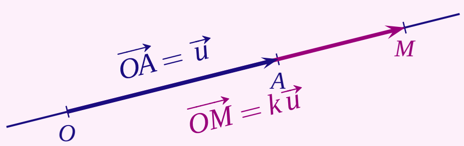
1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k



DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :
– sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

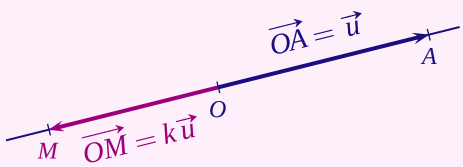
Cas où $k > 0$



– son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;
– sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



– son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;
– sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

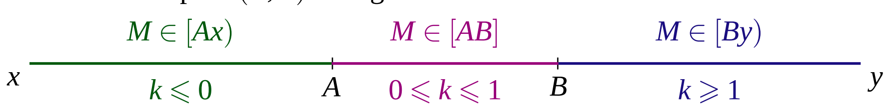
$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

REMARQUE

Soit A et B deux points distincts, et k un réel donné. Il existe un unique point M défini par la relation $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$:
– M est un point de la droite (AB)
– M a pour abscisse k dans le repère $(A;B)$ d'origine A



2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3 VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

- Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

MILIEU D'UN SEGMENT

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:
1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
4) Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

❊ DÉMONSTRATION

1. L'égalité $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).
2. I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
3. I milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$
4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} = 2\overrightarrow{MI}$$

   Réciproquement, la propriété $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I. Soit :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{II} = \vec{0}$$

   Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

❊ DÉMONSTRATION

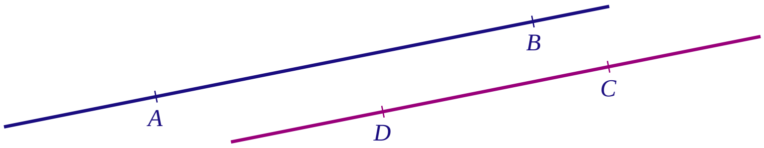
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$$

PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

❊ DÉMONSTRATION

- Si $(AB)//(CD)$ alors, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction donc ils sont colinéaires.



Réciproquement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB)//(CD)$

– $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie donc $(AB)//(AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

CONSTRUCTION DE POINTS

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

$$\underbrace{\overrightarrow{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

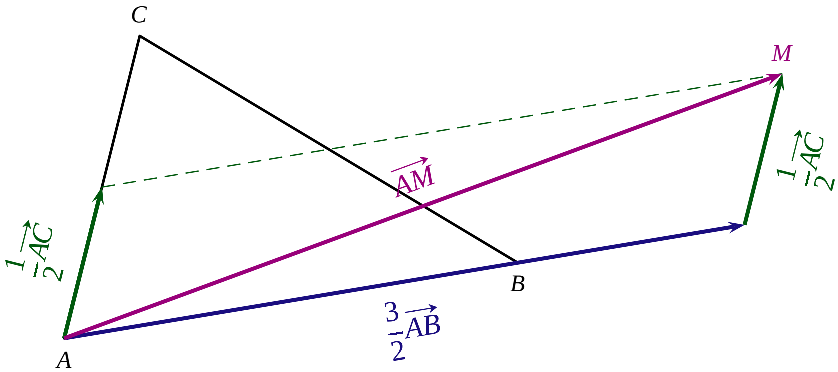
EXEMPLE

Soit trois points non alignés A, B et C. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

– Choisissons par exemple A comme « *origine connue* »

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

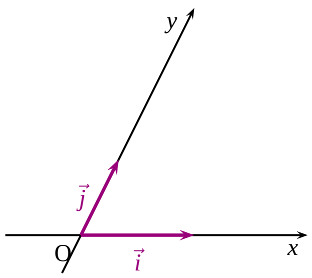
– Nous pouvons construire le point M :



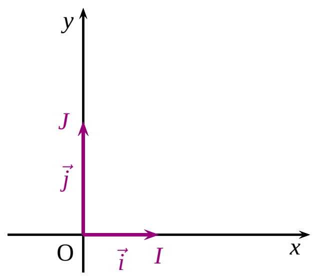
V REPÈRES ET COORDONNÉES

1 REPÈRE DU PLAN

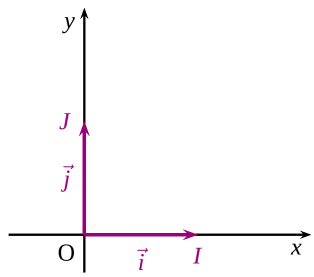
On appelle base tout couple $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal
$(OI)\perp(OJ)$



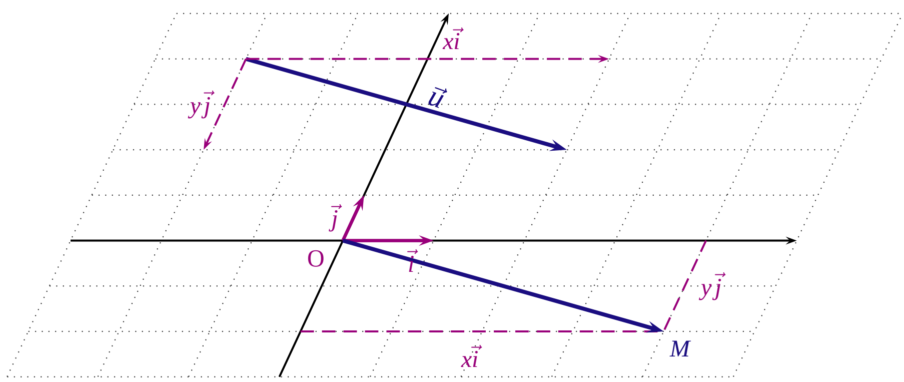
Repère orthonormé
$(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

REMARQUE

La définition d'un repère par un triplet $(\text{O};I,J)$ de points non alignés n'est pas remise en cause.
Si les points O , I et J ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{\text{O}I}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{\text{O}J}=\vec{j}$ ne sont pas colinéaires et forment une base.

2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

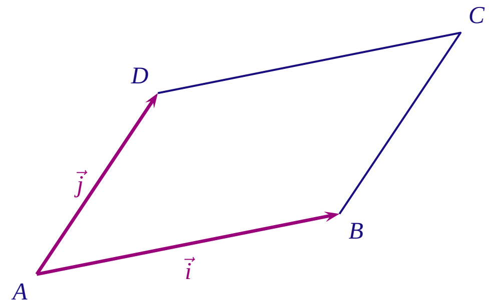
Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M\,(x;y)$ dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{\text{O}M}=\vec{u}$.
On note indifféremment $\vec{u}\,(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



- $(x;y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ signifie que $\overrightarrow{\text{O}M}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
- $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ signifie que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

EXEMPLE

$ABCD$ est un parallélogramme.



Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

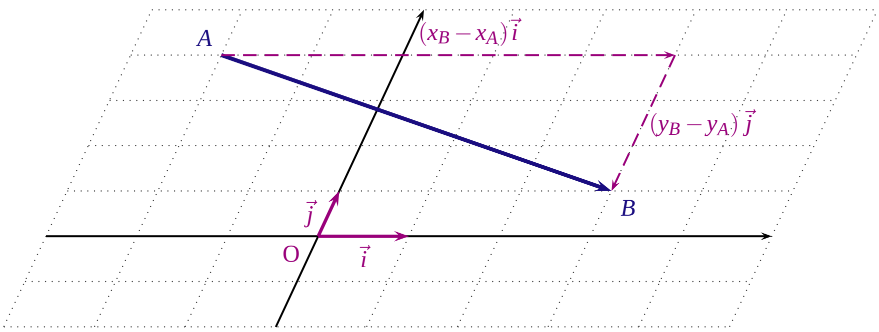
Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

- $\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $x=0$ et $y=0$.
- $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.
- pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

3 COORDONNÉES DU VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.



❊ DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

4 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.
Les coordonnées du milieu $I\left(x_I;y_I\right)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\quad\text{et}\quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

❊ DÉMONSTRATION

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\overrightarrow{\mathrm{O}I}=\overrightarrow{\mathrm{O}A}+\overrightarrow{\mathrm{O}B}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{O}I}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{O}A}+\overrightarrow{\mathrm{O}B}\right)$

5 CONDITION DE COLINÉARITÉ

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

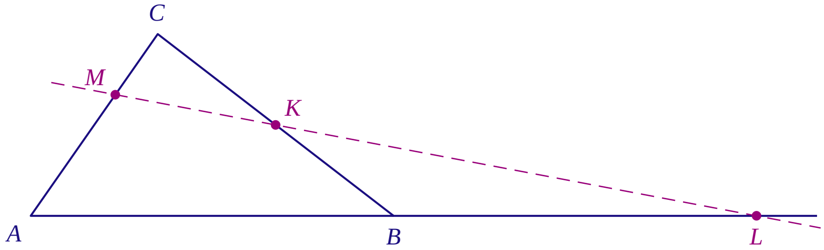
$$xy' - x'y = 0$$

❊ DÉMONSTRATION

– Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, les vecteurs sont colinéaires et la relation $xy' - x'y = 0$ est vérifiée car $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.
– Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{v}$. Soit $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$.

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B.
Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.



Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

– Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
– L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.
– M est un point de la droite (AC) donc $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0;y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}x_K - x_L\\ y_K - y_L\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} - 2\\ \frac{1}{2} - 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}x_M - x_L\\ y_M - y_L\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}0-2\\ y-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}-2\\ y\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2}\times y - (-2)\times\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\times y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$$

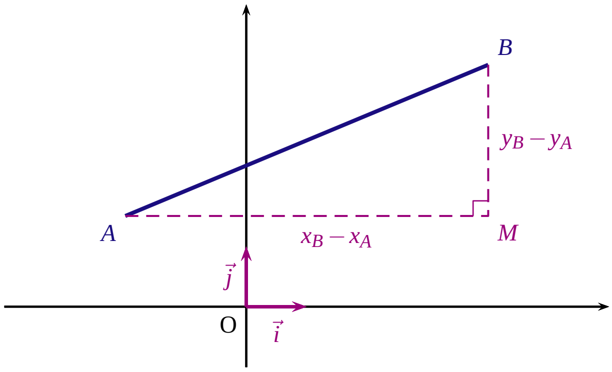
Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

6 DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la distance AB est donné par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

❊ DÉMONSTRATION



Comme $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormal, le triangle AMB est un triangle rectangle en M.

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2 + MB^2 \\ \text{Soit } AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ \text{d'où } AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $A(-1;-2)$, $B(2;2)$ et $C(-2;5)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

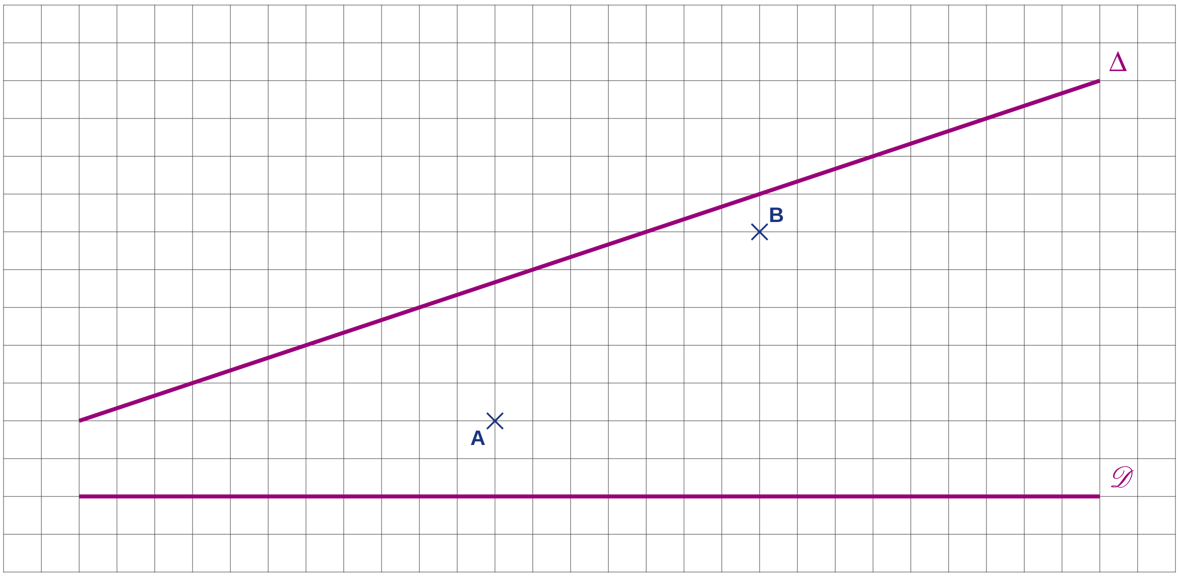
Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

- $AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Nous avons $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

En outre $AB = BC$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

EXERCICE 1

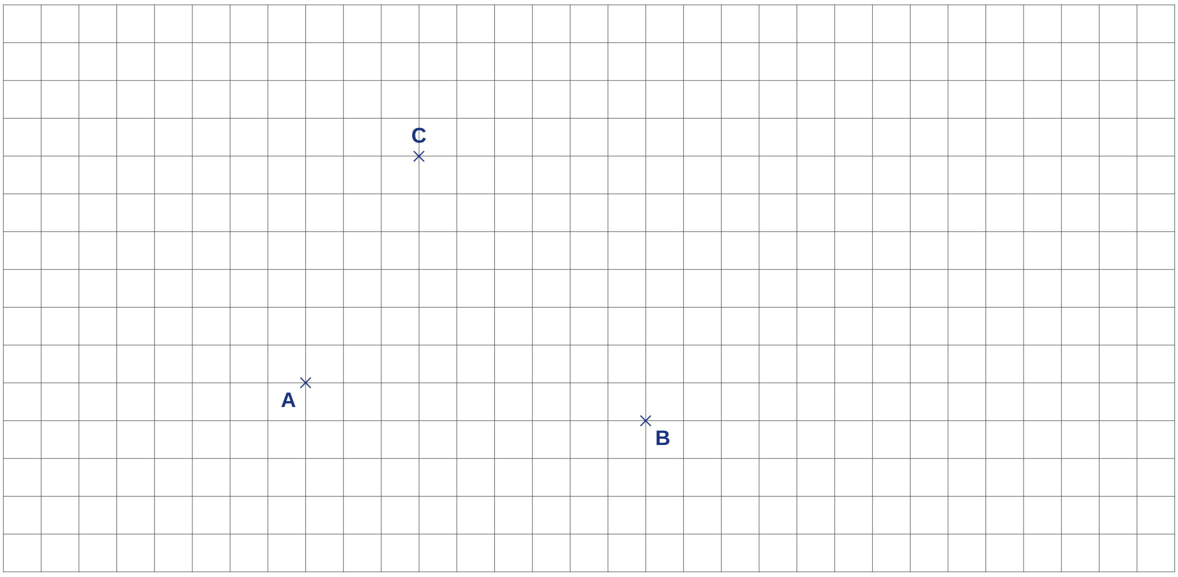


Construire un point E sur la droite Δ et un point F sur la droite $\mathscr{D}$ de façon que $ABEF$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Soit un triangle ABC et les milieux I, J, et K des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 3



1. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

EXERCICE 4

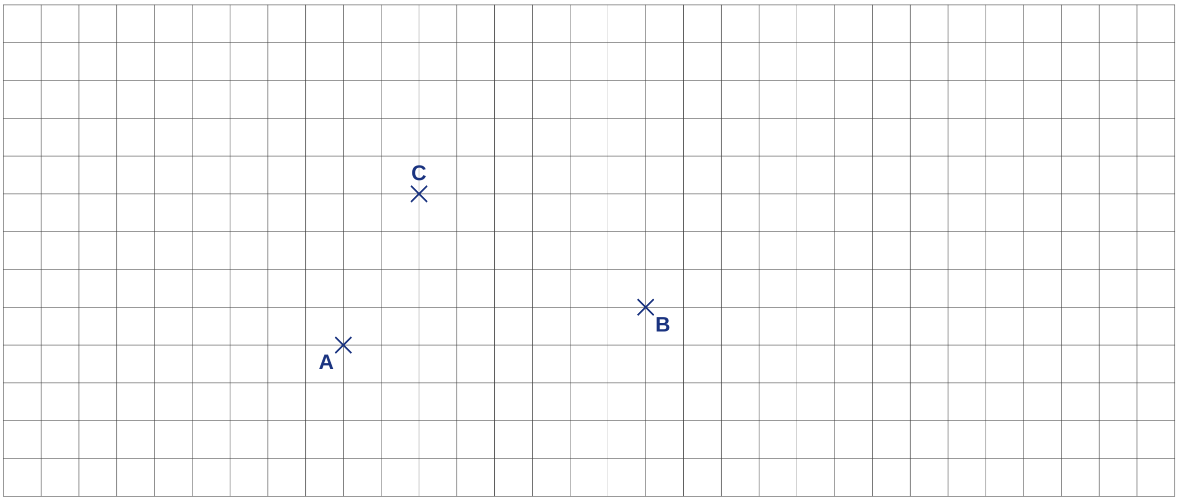
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$
2. En déduire que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

EXERCICE 5

Soit un triangle ABC. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{CB}$.

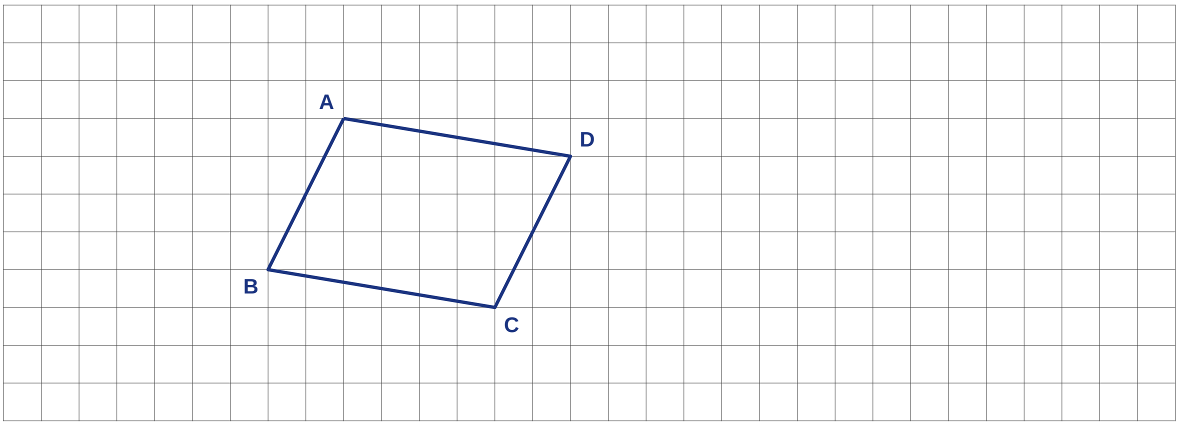
EXERCICE 6



1. Placer les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que les droites (MN) et (AP) sont parallèles.

EXERCICE 7

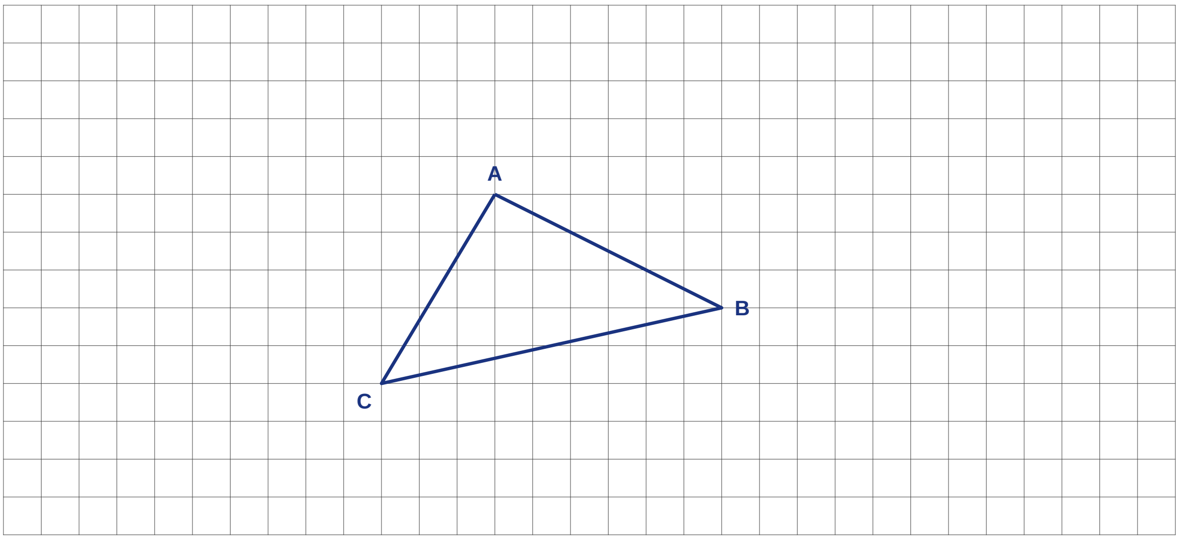
Sur le dessin ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

EXERCICE 8

1. Sur le dessin ci-dessous, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que les droites (AM) et (BN) sont parallèles.



EXERCICE 9

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

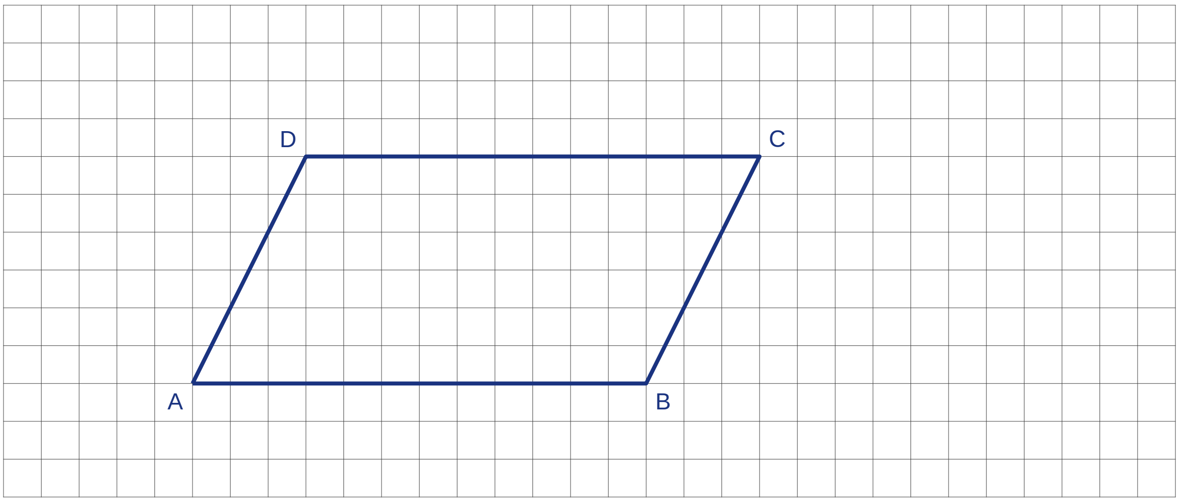
EXERCICE 10

Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que les points A, M et N sont alignés.

EXERCICE 11

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

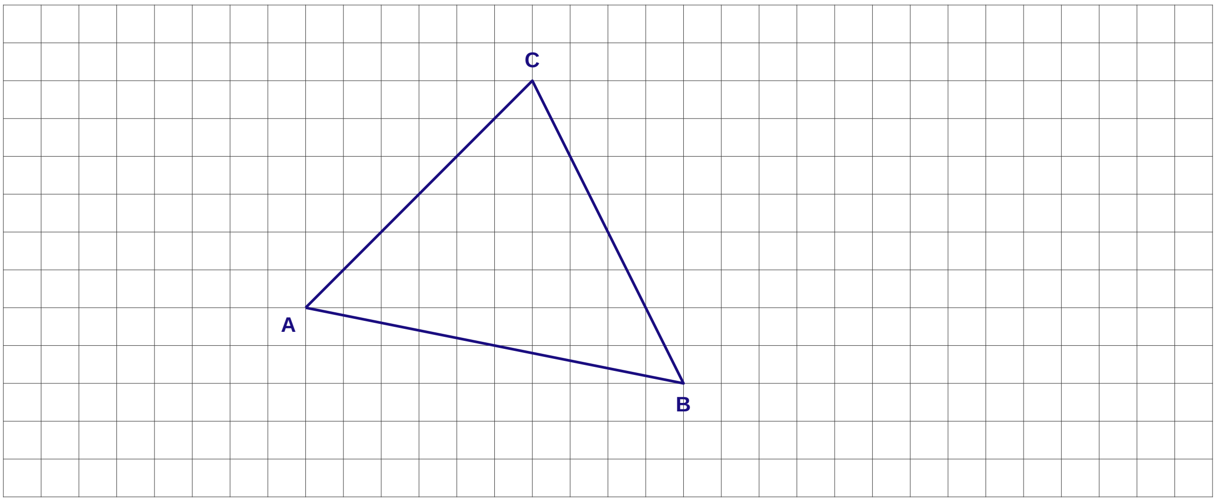


1. Placer les points E, F et G tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 12

1. Placer les points I, J et K tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et K milieu du segment $[BC]$.



2. Exprimer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
3. Les points I, J et K sont-ils alignés ?

EXERCICE 13

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Les points $A(-2;2)$, $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ et $C\left(0;\dfrac{10}{3}\right)$ sont-ils alignés ?

EXERCICE 14

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-4;-1)$, $B(3;2)$ et $C(4;-1)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 15

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ on donne les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP} = \vec{0}$.
3. Les points B, M et P sont-ils alignés ?

EXERCICE 16

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1;2)$, $B(-2;-3)$, $C(7;0)$ et $D(5;4)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 17

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(3;4)$, $B\,(-2;1)$ et $C\,(2;-2)$.

1. Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   a) Montrer que $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
   b) En déduire les coordonnées du point G.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
3. Soit J le milieu de $[AC]$. Les points B, G et J sont-ils alignés ?
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 18

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(4;-2)$, $B(2;2)$, $C(-4;-1)$ et $D(-2;-5)$.

1. a) Placer le point E tel que le quadrilatère $ABEC$ soit un parallélogramme.
   b) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.
   b) Les points A, O et M sont-ils alignés ?
3. a) Calculer les distances AC et BD.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A\left(-2;\frac{5}{2}\right)$, $B\left(4;-\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(3;-\frac{5}{2}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
3. Le vecteur $\vec{u}\,(2;4)$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$? au vecteur $\overrightarrow{BC}$?
4. Soit $D\,(-1;y)$ où y est un nombre réel.
   a) Déterminer y pour que le point D appartienne à la droite (CI).
   Placer le point D dans le repère.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?
5. Le point B appartient-il au cercle de diamètre $[AC]$?

Chapitre 5

SECOND DEGRÉ

I FONCTION CARRÉ

1 DÉFINITION

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

✻ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Si $a < b \leqslant 0$:
  $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow a + b < 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$
  Ainsi, sur l'intervalle $]-\infty;0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
- Si $0 \leqslant a < b$:
  $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leqslant a < b \Leftrightarrow a + b > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$
  Ainsi, sur l'intervalle $[0;+\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

CONSÉQUENCES

- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3;2]$.
f est décroissante sur $[-3;0]$ et croissante sur $[0;2]$.

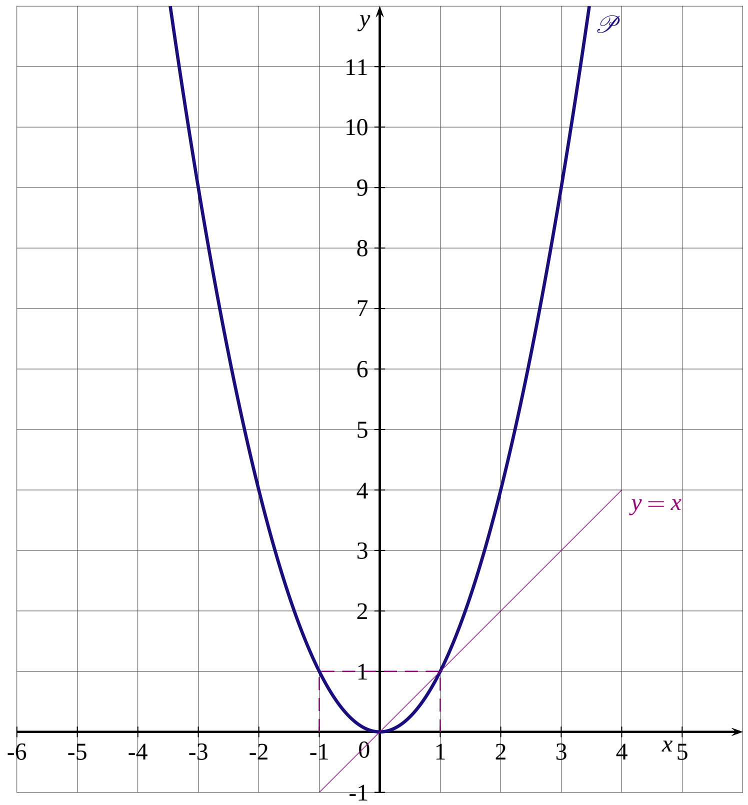
- Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

x	-3		0		2
$f(x)$	9	↘	0	↗	4

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

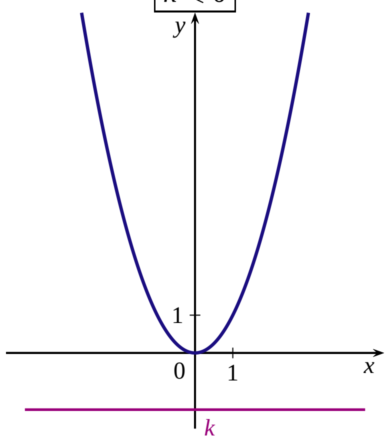
Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

4 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

ÉQUATIONS $x^2 = k$ AVEC k RÉEL

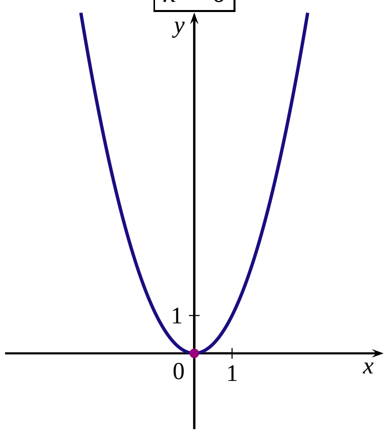
- Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
- Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$
- Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.
  On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

$\boxed{k < 0}$



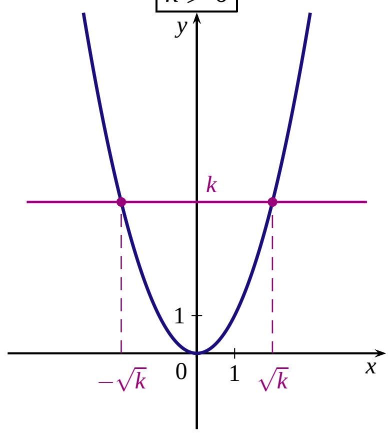
$x^2 = k$ n'a pas de solution

$\boxed{k = 0}$



$x^2 = 0$ a pour unique solution 0

$\boxed{k > 0}$

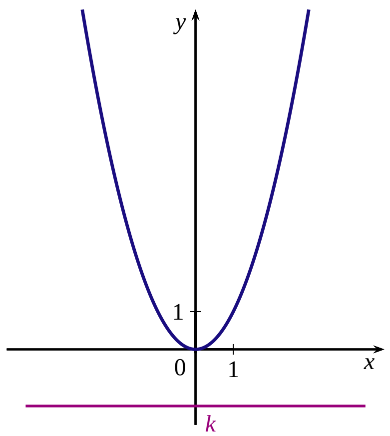


$x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

INÉQUATIONS $x^2 \leqslant k$ OU $x^2 \geqslant k$ AVEC k RÉEL

Résoudre une inéquation $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.

$\boxed{k < 0}$



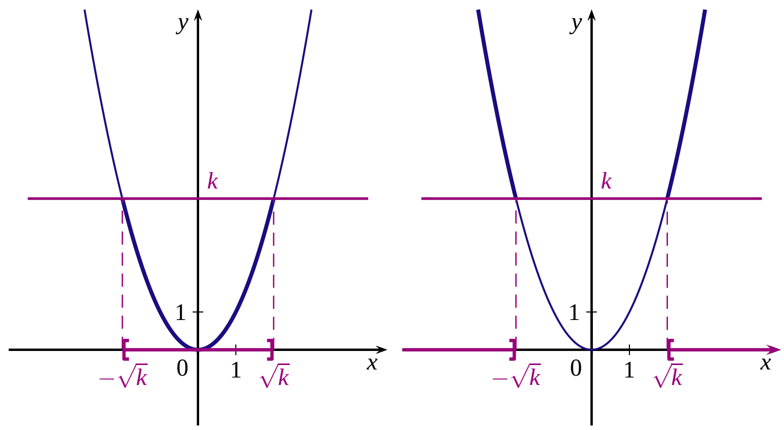
L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution :

$$S = \varnothing$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$

$\boxed{k > 0}$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[-\sqrt{k};\sqrt{k}\right]$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left]-\infty;-\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k};+\infty\right[$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$.

II POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)
- La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \frac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

❊ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. En effet, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.
On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\
&= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\
&= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]
\end{aligned}$$

Soit pour tout réel x, $f(x)=-2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

3 VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

❊ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$.
Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$, étudions le signe de $f(x_1)-f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= a(x_1-\alpha)^2-a(x_2-\alpha)^2\\ &= a\left[(x_1-\alpha)^2-(x_2-\alpha)^2\right]\\ &= a(x_1-x_2)(x_1+x_2-2\alpha)\end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f(x_1)-f(x_2)$ dépend également du signe de a et du signe de $(x_1+x_2-2\alpha)$
Considérons les deux intervalles $]-\infty;\alpha]$ et $[\alpha;+\infty[$ c'est à dire les intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$:

Si $x_1<x_2\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ alors $x_1+x_2<-2\times\dfrac{b}{2a}$ soit $x_1+x_2-2\alpha<0$.

Si $-\dfrac{b}{2a}\leqslant x_1<x_2$ alors $x_1+x_2>-2\times\dfrac{b}{2a}$ soit $x_1+x_2-2\alpha>0$.

Étudions le signe $f(x_1)-f(x_2)$ selon le signe de a :

- Cas où $a<0$

  Si $x_1<x_2\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ alors $a(x_1-x_2)>0$ et $x_1+x_2-2\alpha<0$ d'où $f(x_1)-f(x_2)<0$.

  f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$

  Si $-\dfrac{b}{2a}\leqslant x_1<x_2$ alors $a(x_1-x_2)>0$ et $x_1+x_2-2\alpha>0$ d'où $f(x_1)-f(x_2)>0$.

  f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$.

- Cas où $a>0$

  Si $x_1<x_2\leqslant -\dfrac{b}{2a}$ alors $a(x_1-x_2)<0$ et $x_1+x_2-2\alpha<0$ d'où $f(x_1)-f(x_2)>0$.

  f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$

  Si $-\dfrac{b}{2a}\leqslant x_1<x_2$ alors $a(x_1-x_2)<0$ et $x_1+x_2-2\alpha>0$ d'où $f(x_1)-f(x_2)<0$.

  f est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$.

Conclusion :

– Si $a<0$ alors la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{2a};+\infty;\right[$.

– Si $a>0$ alors la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{b}{2a};+\infty;\right[$.

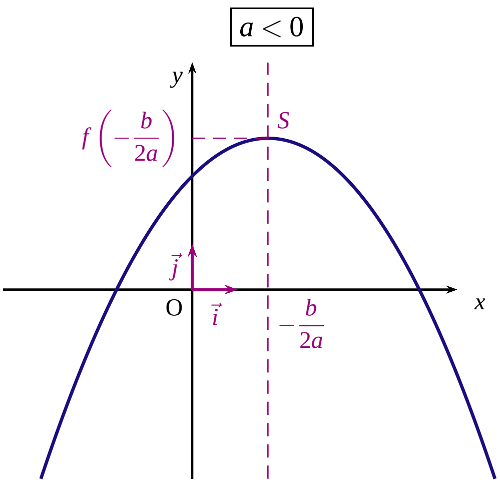
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x)=-3x^2-2x+1$. Ici $a=-3$, $b=-2$ et $c=1$. Ainsi, $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3}$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Comme $a<0$, on en déduit le tableau des variations de f :

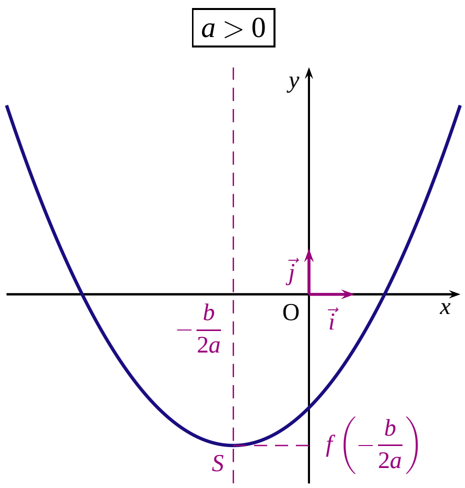
x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$\frac{4}{3}$	↘	

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans un repère orthogonal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y=ax^2+bx+c$
Le sommet S de la parabole a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$



La parabole est tournée vers le bas



La parabole est tournée vers le haut

5 ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2-x-2=0$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}3x^2-x-2=0 &\Leftrightarrow 3\times\left[x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right]=0\\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}-\frac{2}{3}\right]=0\\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=0\\ &\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right]=0\\ &\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=0\end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions $x_1=-\dfrac{2}{3}$ ou $x_2=1$

2. $-2x^2+3x-2=0$.

   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}-2x^2+3x-4=0 &\Leftrightarrow -2\times\left[x^2-\frac{3}{2}x+1\right]=0\\ &\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+1\right]=0\\ &\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{36}\right]=0\end{aligned}$$

Or pour tout réel x, $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{36}\geqslant\dfrac{7}{36}$ donc l'équation n'a pas de solutions. $S=\varnothing$

RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$.

   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}-\frac{x^2}{4}-x+3 &= -\frac{1}{4}\times\left[x^2+4x-12\right]\\ &= -\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-4-12\right]\\ &= -\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-16\right]\\ &= -\frac{1}{4}\left[(x+2+4)(x+2-4)\right]\\ &= -\frac{1}{4}(x+6)(x-2)\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-\frac{1}{4}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3 \leqslant 0$ est $S =]-\infty;-6] \cup [2;+\infty[$.

2. $\dfrac{x^2}{2}-x+1 \geqslant 0$

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}-x+1 &= \frac{1}{2}\times\left[x^2-2x+2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2-1+2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]\end{aligned}$$

Or pour tout réel x, $(x-1)^2+1 \geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right] \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{x^2}{2}-x+1 \geqslant 0$ est $S=\mathbb{R}$

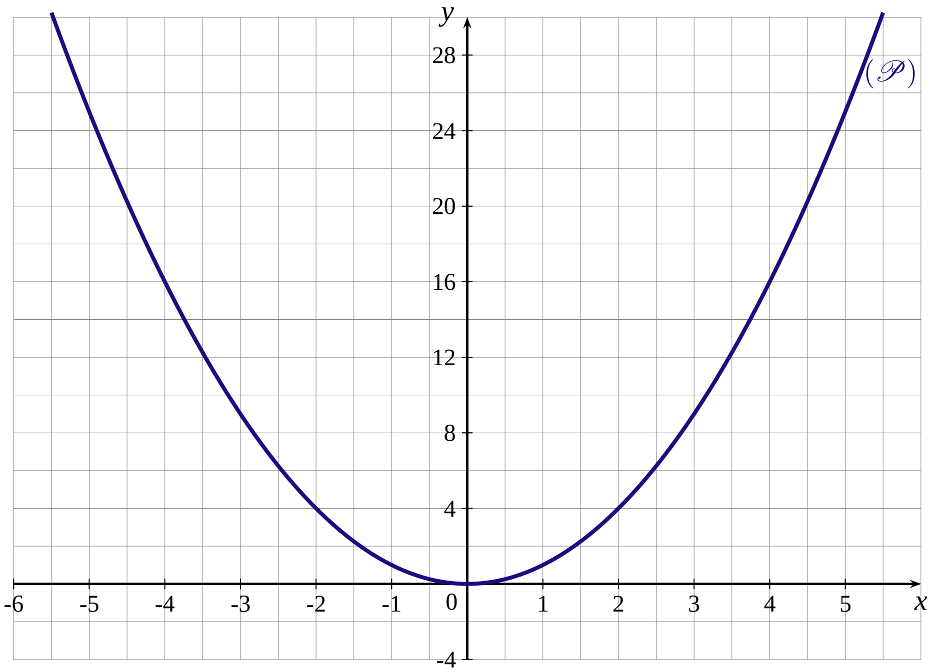
EXERCICE 1

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Pour tout nombre réel x, $x+1 \geqslant x$. D'où $(x+1)^2 \geqslant x^2$
Soit en développant $x^2+2x+1 \geqslant x^2$
On en déduit que $2x+1 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc finalement que tout nombre réel est plus grand que $-\dfrac{1}{2}$. »

EXERCICE 2

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$. Sa courbe représentative est la parabole $(\mathscr{P})$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $-\sqrt{6}$, $1-\sqrt{2}$, 10^{-2} et $\dfrac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x)=\dfrac{3}{2}x+10$.
   a) Tracer dans le repère précédent, la courbe D représentative de la fonction g.
   b) Lire graphiquement, les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.
4. Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation $f(x)=g(x)$.

EXERCICE 3

Recopier et compléter les égalités suivantes où b et c sont deux réels :

A. $x^2+2x=(x+1)^2+c$

B. $x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+c$

C. $x^2+3x-1=(x+b)^2+c$

D. $x^2-5x+7=(x-b)^2+c$

E. $2x^2+3x=2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+c\right]$

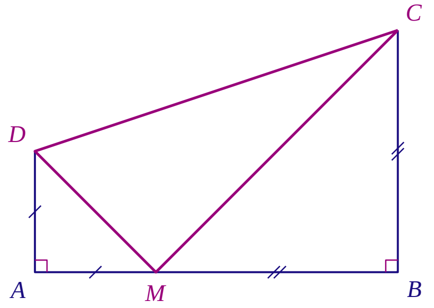
F. $-3x^2-x+1=3\left[(x+b)^2+c\right]$

G. $\dfrac{x^2}{2}+3x-1=\dfrac{1}{6}\left[(x+b)^2+c\right]$

H. $-\dfrac{x^2}{4}+3x+2=-\dfrac{1}{4}\left[(x+b)^2+c\right]$

EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, $AB = 6$, M est un point du segment $[AB]$ différent de A et B et les triangles AMD et MBC sont rectangles isocèles.
On cherche à déterminer la distance AM telle que l'aire du triangle MCD soit maximale.
On pose $AM = x$ et on note $g(x)$ l'aire du trapèze $ABCD$ et $f(x)$ l'aire du triangle MCD



1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;6[$, $g(x) = 18$.
2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMD et MBC. En déduire que $f(x) = -x^2 + 6x$
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. En déduire la valeur de x telle que l'aire du triangle MCD soit maximale. Quel est alors l'aire maximale du du triangle MCD ?

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $x^2 = x + 1$.
   b) $x^2 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$
   c) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$
   d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6} = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.
   b) $-2x^2 + 3x \leqslant 5$
   c) $3x^2 + 3x \geqslant \dfrac{9}{4}$
   d) $x - 1 \geqslant \dfrac{x^2}{3}$

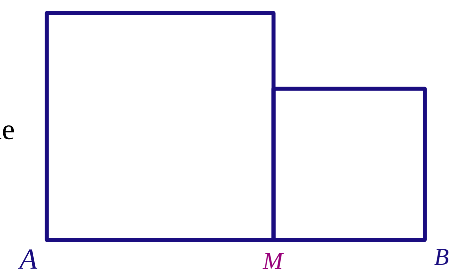
EXERCICE 6

f est une fonction polynôme du second degré telle que sa courbe représentative est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{25}{4}\right)$ passant par le point $A(1;-6)$.

1. Donner le tableau des variations de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

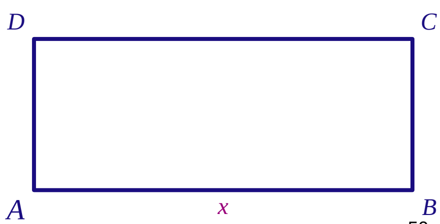
EXERCICE 7

M est un point du segment $[AB]$ de longueur 12.
À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que la somme des aires des carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$ soit minimale ?



EXERCICE 8

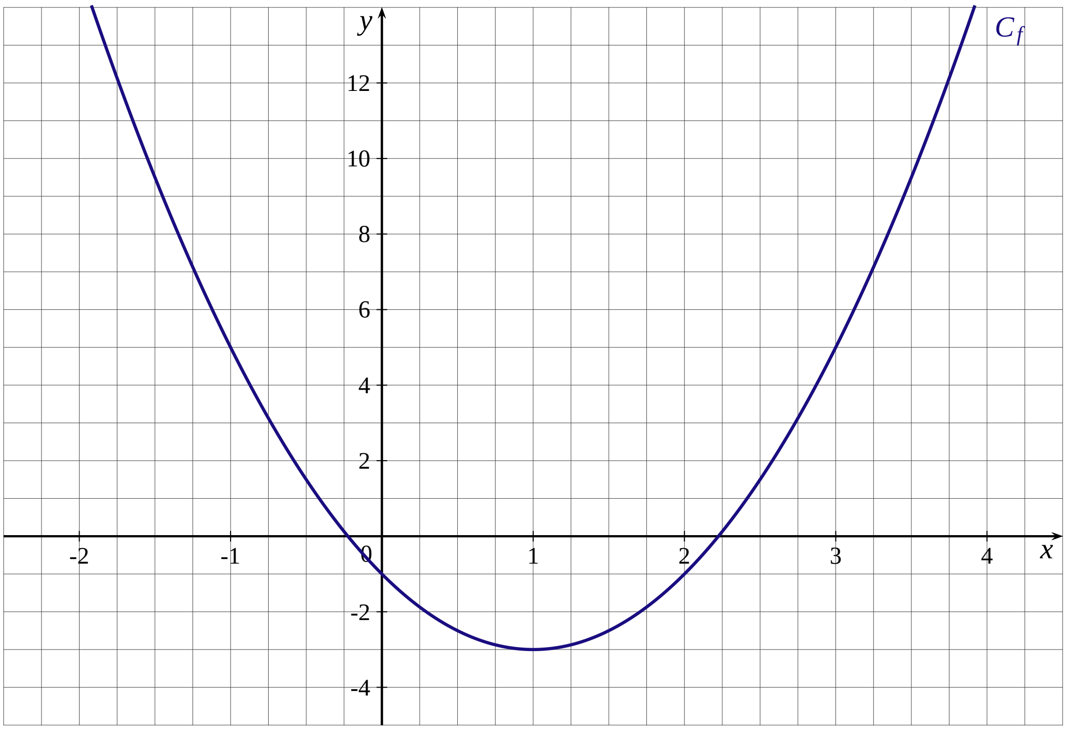
$ABCD$ est un rectangle de périmètre 32.
Quelle est l'aire maximale du rectangle $ABCD$?



EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a) Le point $A(-1;5)$ appartient-il à la courbe C_f ?
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   c) La proposition « Si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ » est-elle vraie ou fausse ?
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 8$ et $g(3) = -4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci-dessous.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2 \times \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   c) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.



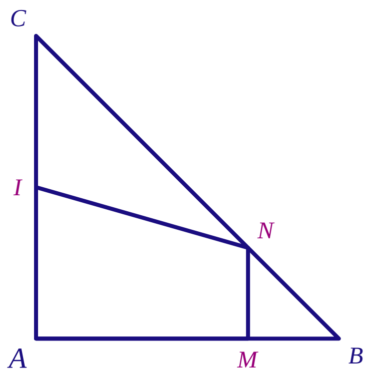
EXERCICE 10

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

1. Parmi les fonctions polynômes du second degré ci-dessous, quelles sont celles qui ont le même tableau de variation que la fonction f ? le même tableau de variation que la fonction g ?
   $A(x) = x^2 + 3x - 2$; $B(x) = -x^2 + 6x - 11$; $C(x) = x^2 - 6x + 7$; $D(x) = -x^2 - 4x + 13$;
   $E(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$; $G(x) = x^2 - 4x + 2$; $H(x) = -3x^2 + 12x - 11$.
2. Déterminer deux fonctions polynômes du second degré ayant respectivement le même tableau de variation que les fonctions f et g.

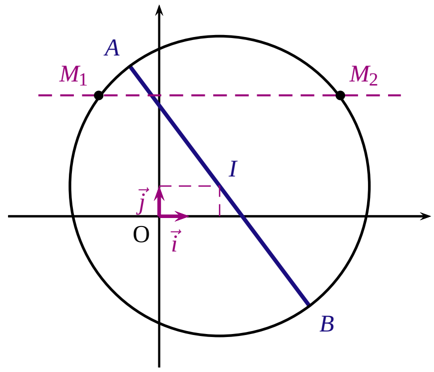
EXERCICE 11



ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $AB = 10$. I est le milieu du segment $[AC]$.

Où faut-il placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du trapèze $AMNI$ soit maximale ?

EXERCICE 12



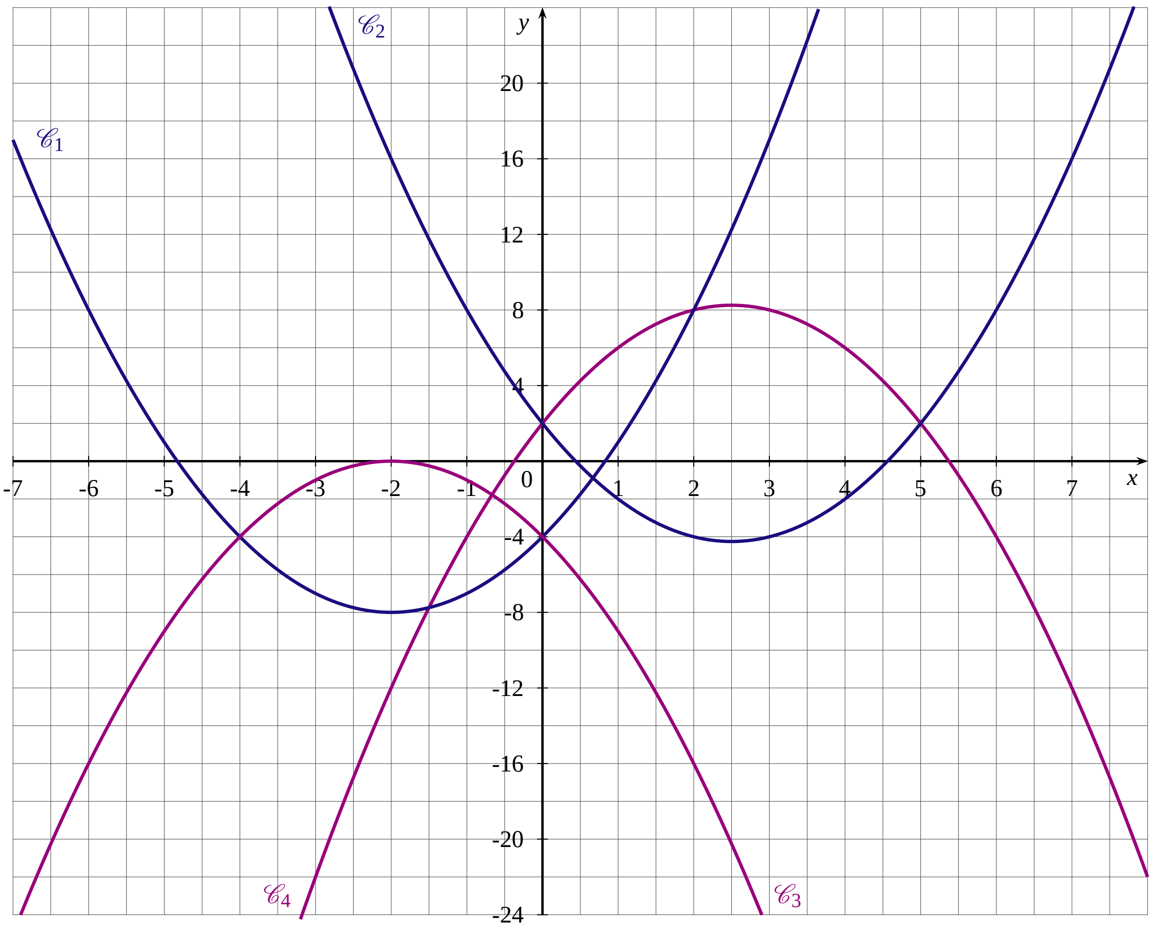
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère les points $A(-1;5)$, $B(5;-3)$ et $M(x;4)$ un point du cercle de diamètre AB.

Calculer l'abscisse du point M.

EXERCICE 13

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 4$ et $g(x) = -x^2 + 5x + 2$.

1. Parmi les courbes tracées ci-dessous, déterminer celle qui représente la fonction f et celle qui représente la fonction g. (*Justifier*)



2. Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.

Chapitre 6

FONCTION INVERSE, FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

I FONCTION INVERSE

1 DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2 VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

✼ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels non nuls tels que $a<b$.
Étudions le signe de $f(a)-f(b)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

$\boxed{a<b<0}$

Si $a<b<0$ alors $b-a>0$ et $ab>0$ donc $\dfrac{b-a}{ab}>0$ soit $f(a)-f(b)>0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement négatifs, si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\boxed{0<a<b}$

Si $0<a<b$ alors $b-a>0$ et $ab>0$ donc $\dfrac{b-a}{ab}>0$ soit $f(a)-f(b)>0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$.

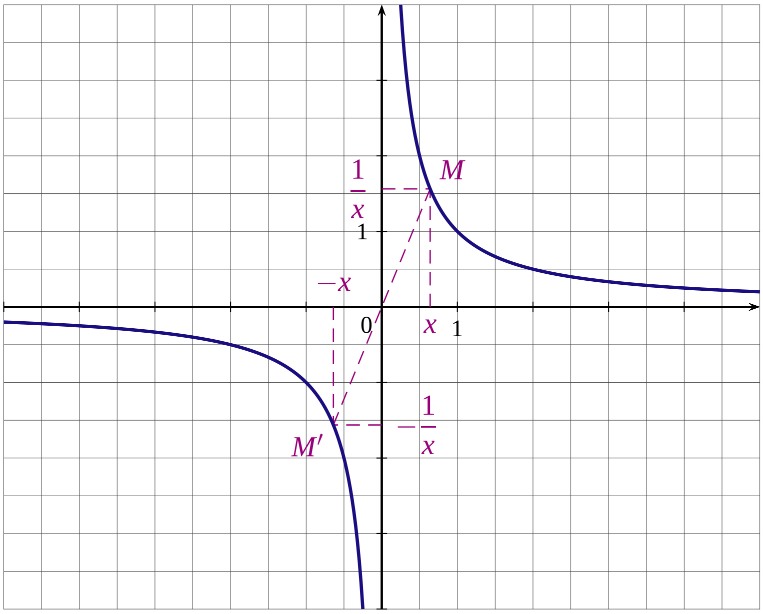
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

REMARQUE :

Pour tout réel $x \neq 0$, $f(-x)=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$.
Les points $M(x;f(x))$ et $M'(-x;f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



REMARQUE :

– On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.

– On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$, et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

II FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

1 DÉFINITION

On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, $c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$

REMARQUE

La condition $ad - bc \neq 0$ traduit le fait que $ax+b$ et $cx+d$ ne sont pas pas proportionnels.
Si $c \neq 0$ et $ad - bc = 0$ alors le quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est constant. En effet

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{cax+bc}{c(cx+d)} = \frac{cax+ad}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

2 ENSEMBLE DE DÉFINITION

Une fonction homographique est définie pour tout réel x tel que le dénominateur $cx+d$ ne s'annule pas.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\left]-\infty; -\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c}; +\infty\right[$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3-2x}$

$3 - 2x \neq 0$ lorsque $x \neq \dfrac{3}{2}$, donc l'ensemble de définition de f est $D = \left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$ que l'on note aussi $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

3 PROPRIÉTÉ

Toute fonction homographique peut se mettre sous la forme réduite $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$.

❊ PREUVE

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$)

– Si $a = 0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$,

$$\frac{b}{cx+d} = \frac{b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{\dfrac{b}{c}}{x+\dfrac{d}{c}}$$

– Si $a \neq 0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \times \frac{x+\dfrac{b}{a}}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}$$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2x-11}{3x+6}$
Pour tout réel $x \neq -2$,

$$\frac{2x-11}{3x+6} = \frac{2}{3} \times \frac{x-\dfrac{11}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} \times \frac{(x+2)-\dfrac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{\dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{5}{x+2}$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$

4 VARIATIONS

La forme réduite $f : x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$ d'une fonction homographique permet de déduire les variations de la fonction f à partir des variations de la fonction inverse.

$B < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

$B > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$.
Étudions les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ ou $]-2;+\infty[$

a) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;-2[$ tels que $a < b$:
$a < b < -2 \Leftrightarrow a+2 < b+2 < 0$.
Sur l'intervalle $]-\infty;0[$ la fonction inverse est strictement décroissante, donc $\dfrac{1}{a+2} > \dfrac{1}{b+2}$
D'où $\dfrac{-5}{a+2} < \dfrac{-5}{b+2}$ (on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par -5)

Par conséquent, $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{a+2}<\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{b+2}$.
Ainsi, si $a<b<-2$ alors $f(a)<f(b)$ donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$

b) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-2;+\infty[$ tels que $a<b$:
$-2<a<b \Leftrightarrow 0<a+2<b+2$.
Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction inverse est strictement décroissante, donc $\dfrac{1}{a+2}>\dfrac{1}{b+2}$
D'où $\dfrac{-5}{a+2}<\dfrac{-5}{b+2}$ (on change le sens de l'inégalité en multipliant les deux membres par -5)
Par conséquent, $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{a+2}<\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{b+2}$.
Ainsi, si $a<b<-2$ alors $f(a)<f(b)$ donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$

D'où le tableau des variations de la fonction f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

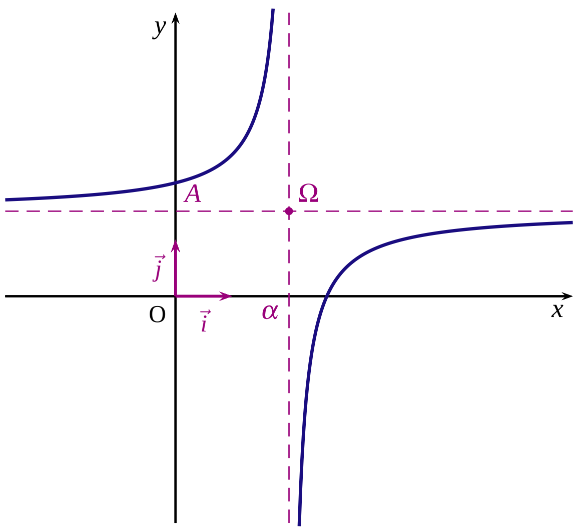
5 COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

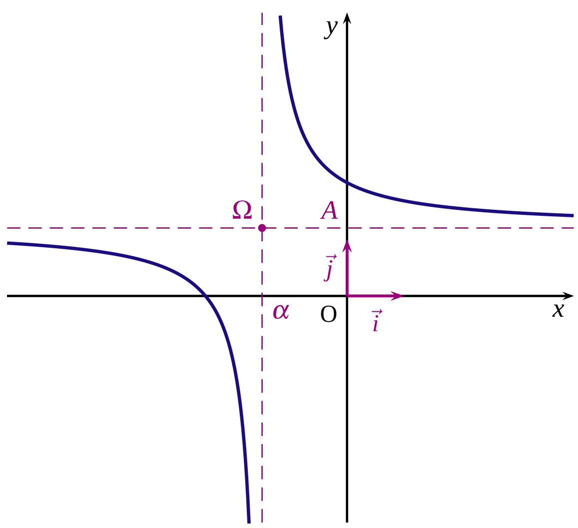
REMARQUE

La forme réduite $f: x \mapsto A+\dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B\neq 0$ d'une fonction homographique fait apparaître le centre de symétrie $\Omega(\alpha;A)$ ainsi que les deux asymptotes d'équation $x=\alpha$ et $y=A$ de l'hyperbole.

$B<0$



$B>0$



EXERCICE 1

Soient f la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - x$.

1. Tracer les courbes représentatives des deux fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
2. Étudier les positions relatives des deux courbes.

EXERCICE 2

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des deux cas suivants :

   a) $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b) $\dfrac{2}{3} < x < 1$; c) $x > \dfrac{1}{5}$; d) $x \leqslant -\sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$; b) $\dfrac{1}{x} > 2$; c) $-2 < \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$; d) $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 3$

EXERCICE 3

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

EXERCICE 4

1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $x > 4 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{4}$; b) $x \leqslant -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant -1{,}5$; c) $x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$; d) $x < 0{,}6 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{5}{3}$

2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

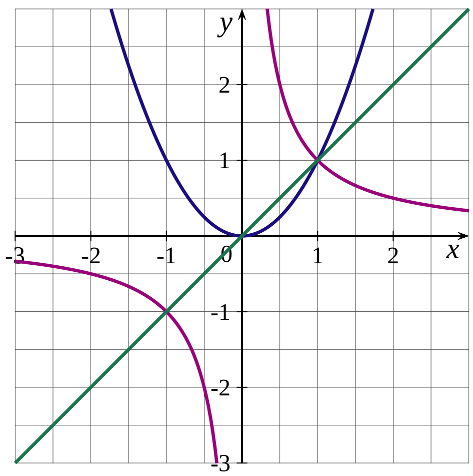
EXERCICE 5

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$
   a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$
   b) Que peut-on en déduire pour $\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{1}{(x-1)^3} \geqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 6

Soit $a \neq 0$ un réel. On souhaite ranger dans l'ordre croissant les trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$

1. Les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\frac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{a}$

EXERCICE 7

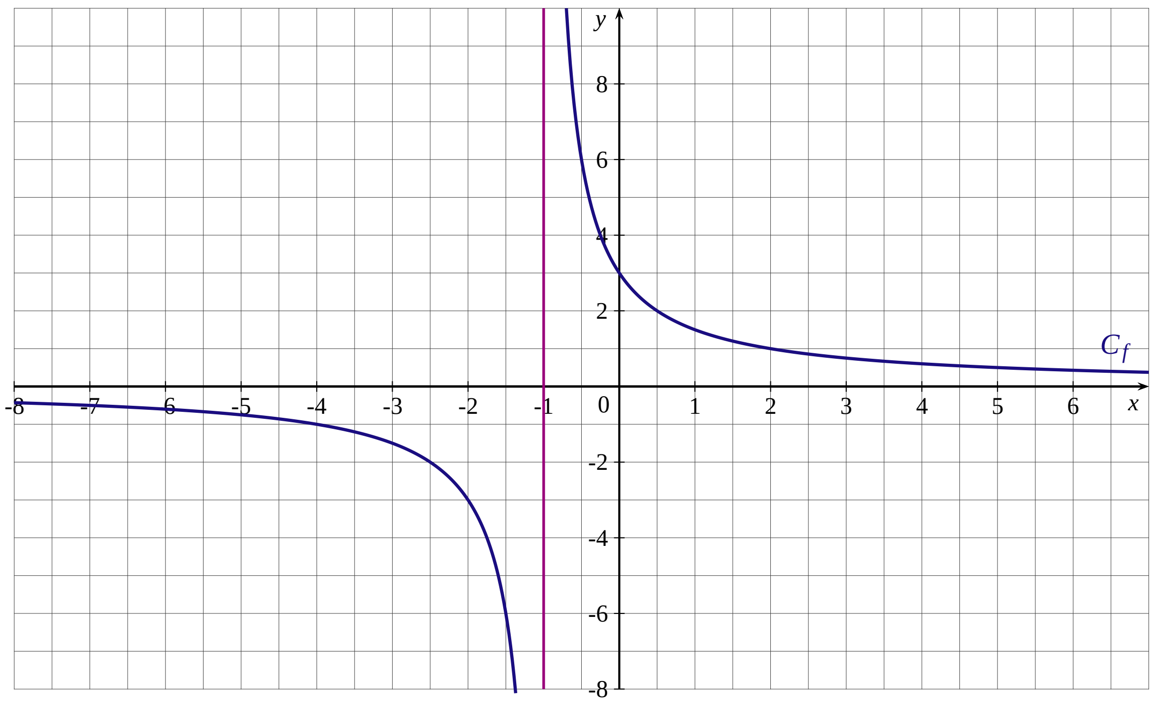
On suppose dans cet exercice, que le prix de la location d'une voiture pour le week-end est de 90€, que la consommation moyenne d'un véhicule est de 8 litres de carburant pour 100 km parcourus et que le prix d'un litre de carburant est de 1,50€.

1. Pierre loue un véhicule pendant le week-end et parcourt 120 km pendant le week-end.
   Quel est le prix de revient moyen par kilomètre parcouru ?
2. Soit $x > 0$ le nombre de kilomètres parcourus par un client qui loue une voiture pendant le week-end.
   a) Exprimer en fonction de x, le montant $f(x)$ du prix de revient moyen par kilomètre parcouru.
   b) Préciser les variations de la fonction f.
3. Un client ayant loué une voiture pendant le week-end a calculé que le prix de revient moyen par kilomètre parcouru a été de 0,52€.
   a) Quelle distance ce client a-t-il parcouru pendant le week-end ?
   b) Quel est le montant du coût total de la location pendant le week-end ?

EXERCICE 8

La courbe C_f représentative d'une fonction f a pour équation $y = \frac{3}{x+1}$. La courbe C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal en annexe ci-dessous.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-5) = -7$ et $g(3) = 9$.
   Déterminer l'expression de g en fonction de x. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{3}{x+1} \leqslant 2x+3$. Interpréter graphiquement le résultat.

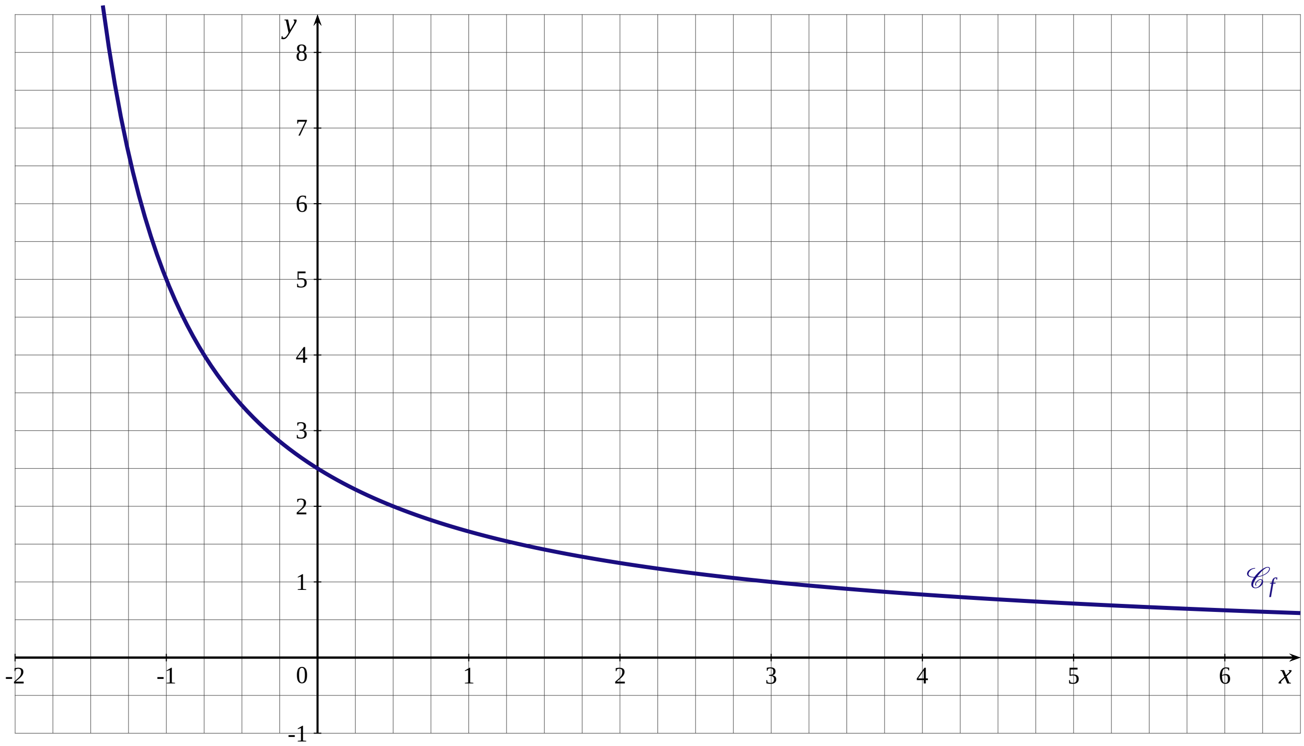


EXERCICE 9

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+3}$?
2. Étudier les variations de la fonction f et donner son tableau de variation.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x+2}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.



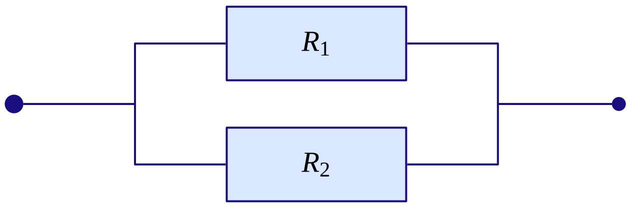
1. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.
2. Soit a et b deux réels tels que $-2 < a < b$
   a) Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1{,}5) = 4$ et $g(2{,}5) = 0$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal précédent.
4. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}5x}{x+2}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 11

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{2x+3} \leqslant 1$
2. Chercher l'erreur dans le raisonnement suivant :
   « Comme la fonction inverse est décroissante, $\dfrac{1}{2x+3} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x+3 \geqslant 1$ d'où $x \geqslant -1$ ».

EXERCICE 12

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance R du dipôle vérifie la relation $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



Les résistances sont exprimées en ohms (Ω). On donne $R_1 = 4$ et $R_2 = x$.

1. Montrer que $R = \frac{4x}{x+4}$
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{x+4}$
   a) Déterminer les réels A et B tels que $f(x) = A + \frac{B}{x+4}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Est-il possible que la résistance R du dipôle soit supérieur à $4\,\Omega$?
   b) Déterminer la résistance R_2 pour que la résistance R du dipôle soit égale à $3\,\Omega$.

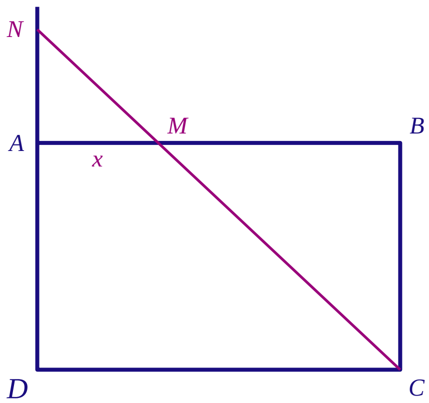
EXERCICE 13

À l'occasion d'une randonnée, la vitesse moyenne d'un cycliste à l'aller est de 15 km/h.

1. Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour lorsque la vitesse moyenne au retour est de 21 km/h ?
2. On note x la vitesse moyenne exprimée en km/h du cycliste au retour et $V(x)$ la vitesse moyenne du cycliste sur le trajet aller-retour.
   a) Montrer que $V(x) = \frac{30x}{x+15}$.
   b) Pour quelles valeurs de x la vitesse moyenne sur le trajet total sera supérieure à 20 km/h ?
   c) La vitesse moyenne sur le trajet total peut-elle dépasser les 30 km/h ?

EXERCICE 14

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 5$.
M est un point du segment $[AB]$ distinct de B. La droite (CM) coupe la droite (AD) en N



1. On pose $AM = x$
   a) Quelles sont les valeurs possibles du réel x ?
   b) Exprimer la distance AN en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;8[$ par $f(x)=\dfrac{40}{8-x}-5$.

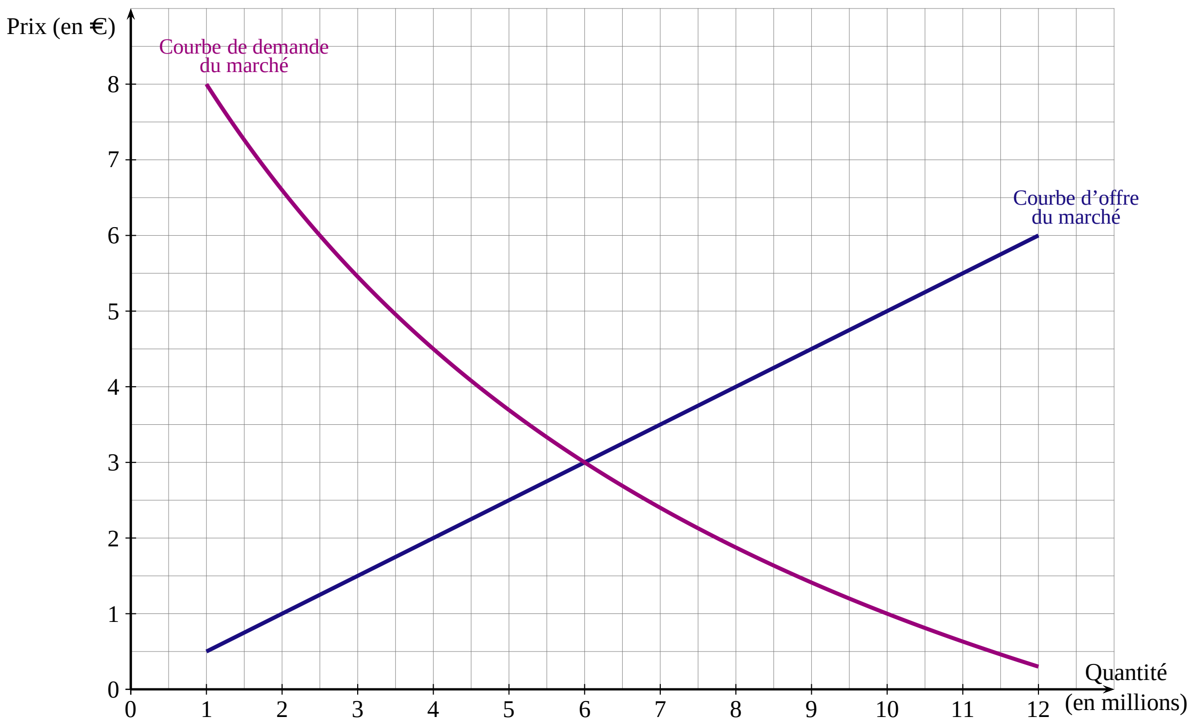
   Étudier les variations de la fonction f.

3. Pour quelles valeurs de x la distance AN est-elle comprise entre 3 et 20 ?

4. Est-il possible que $AN \geqslant 1995$?

EXERCICE 15

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :
– la fonction d'offre f est donnée par $f(q)=0{,}5q$
– la fonction demande g est donnée par $g(q)=\dfrac{78-6q}{q+8}$
où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. On suppose que le prix de vente d'un article est de 1 €. À l'aide du graphique, déterminer si la demande est excédentaire.

2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.

   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;

   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;

   c) Quel problème cela pose-t-il ?

3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.

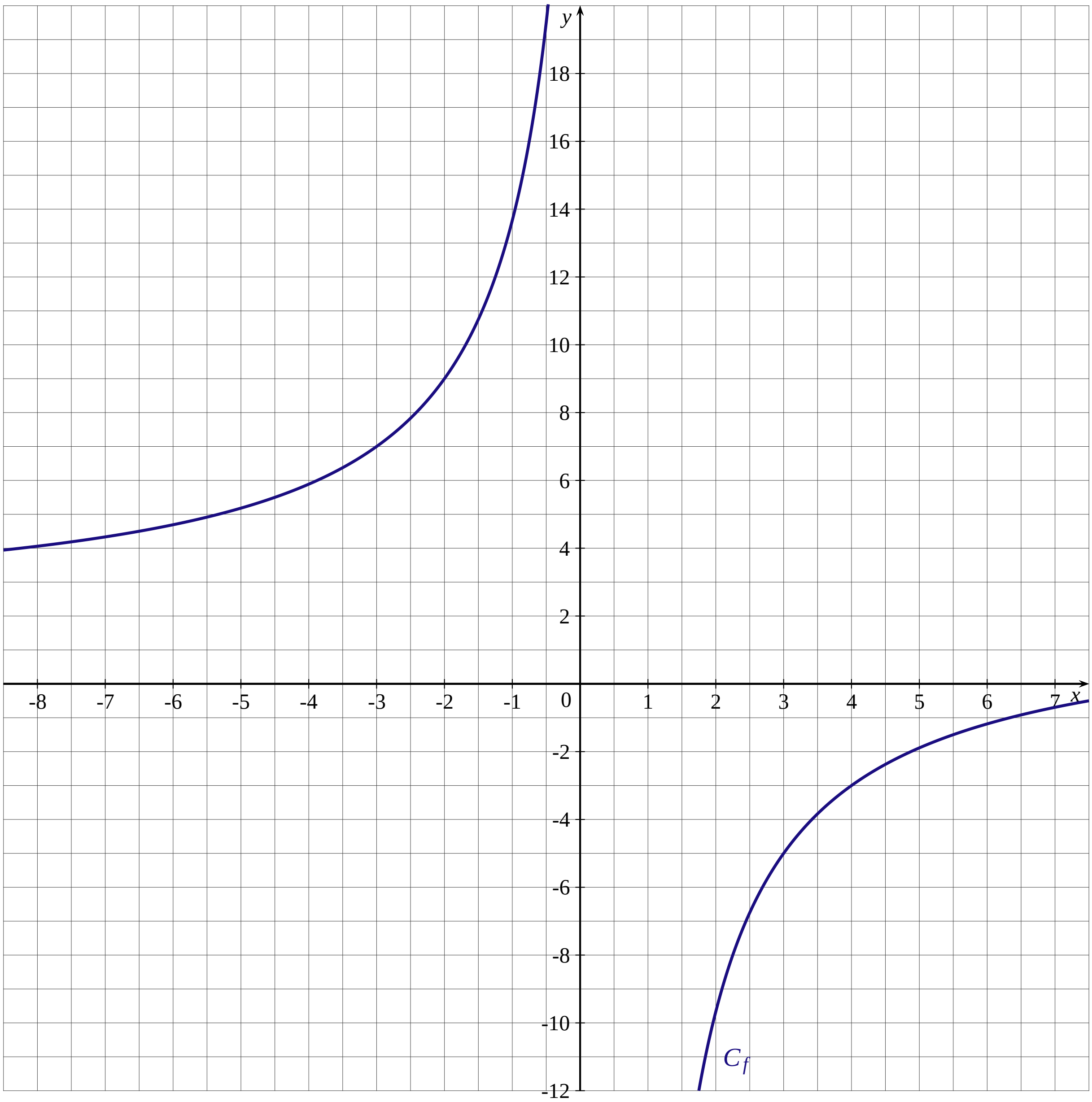
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 16

L'hyperbole C_f tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal en annexe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f. L'hyperbole C_f a pour équation $y = \dfrac{4x-37}{2x-1}$.

1. a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
   c) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
2. a) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-0{,}5}$.
   b) 2 a-t-il un antécédent par f ?
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-7) = 8$ et $g(6) = -5$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. a) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et D.

ANNEXE



EXERCICE 17

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-12x-2}{3x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Déterminer les réels A et B tels que $f(x)=A+\dfrac{B}{x+\dfrac{2}{3}}$.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

   c) En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x\in[65;66]$

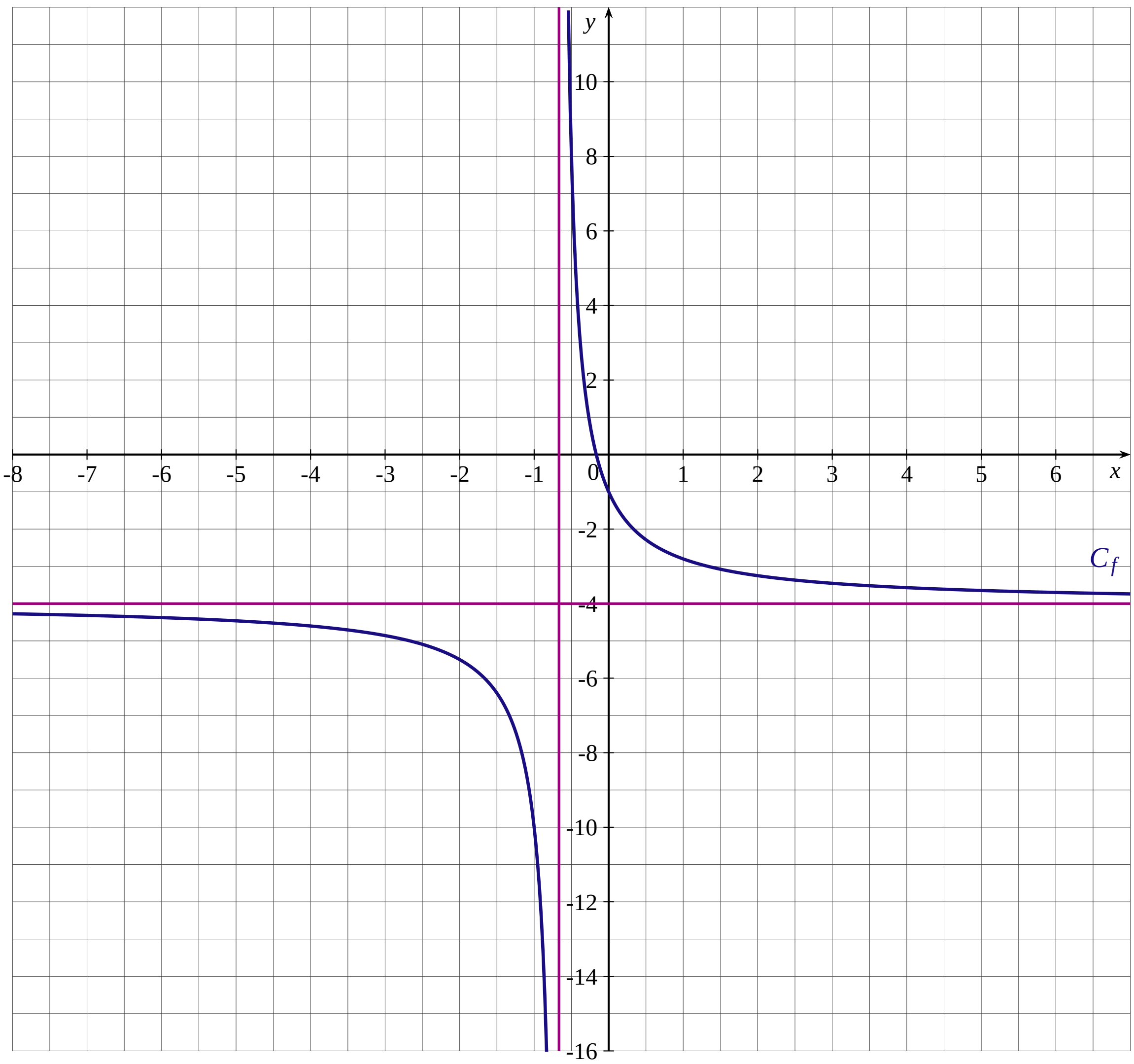
   d) Pour quelles valeurs du réel x, $-4\leqslant f(x)\leqslant -3{,}997$?
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-7)=-10$ et $g(3)-g(-7)=9$.

   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

   b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

ANNEXE



CONTRÔLES

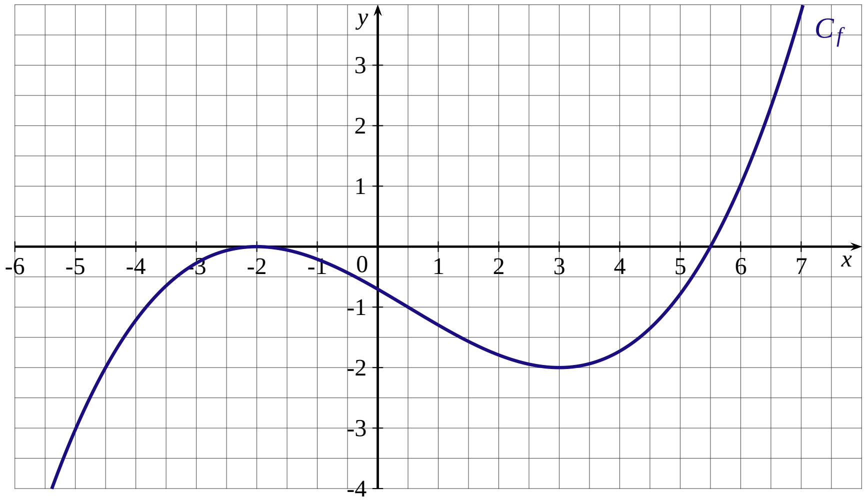
EXERCICE 1 (4,5 *points*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions à l'aide d'un intervalle.

a) $2x-3 \leqslant 2+4x$; b) $3-5x \geqslant 1+x$; c) $(1-2x)^2 > 4x^2$.

EXERCICE 2 (4,5 *points*)

La courbe C_f tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est l'image de de 3 par la fonction f ? Quels sont les antécédents de (-2) par la fonction f ?
2. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x)=0$?
3. Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
4. Établir le tableau des variations de la fonction f.

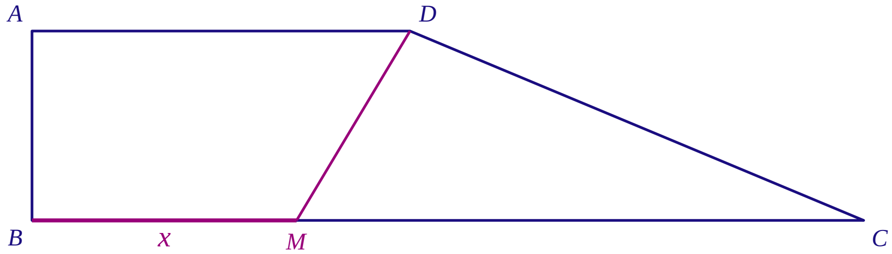
EXERCICE 3 (7 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)^2-(3x+2)^2$. On note C_f sa courbe représentative.

1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. Développer l'expression de $f(x)$.
3. Calculer l'image par la fonction f de 0.
4. Quelles sont les antécédents par la fonction f de (-3) ?

EXERCICE 4 (4 *points*)

$ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $AB=5$, $AD=10$ et $BC=22$. M est un point du segment $[BC]$.

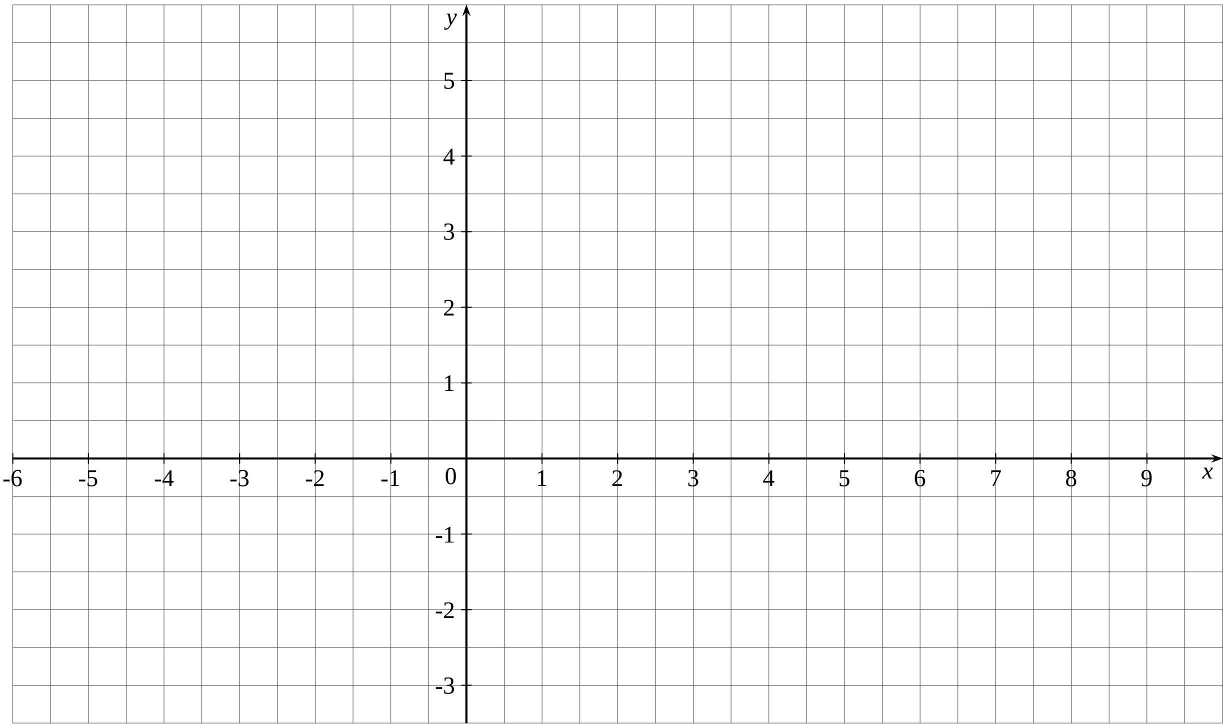


On pose $x=BM$. Soit f la fonction telle que $f(x)=DM$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer $f(10)$.
3. Établir le tableau complet des variations de la fonction f.

EXERCICE 1

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 3$
   a) Quel est l'antécédent de (-2) par la fonction f ?
   b) Donner le tableau du signe de $f(x)$.
   c) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   d) Dans le plan muni d'un repère orthonormé tracer la courbe D_1 représentative de la fonction f.



2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -2$ et $g(7) = 4$.
   a) Tracer la courbe D_2 représentative de la fonction g dans le repère précédent.
   b) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
   c) Étudier les positions relatives des deux droites D_1 et D_2.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - (2x-3)^2$.

1. a) Développer l'expression de $f(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 16x - 11$.
2. a) Factoriser l'expression de $f(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{7x-2}{3x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a) Étudier le signe de $\dfrac{7x-2}{3x+1} - 2$ à l'aide d'un tableau.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.

EXERCICE 4

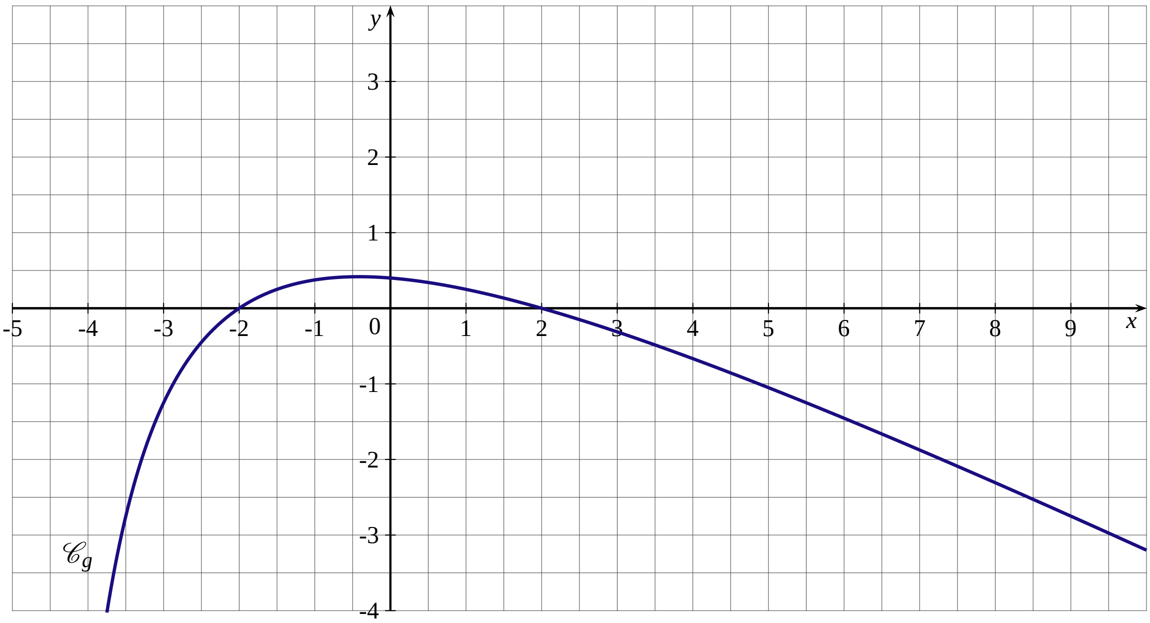
1. Calculer le pourcentage d'augmentation du cours d'une action qui a subi trois hausses successives de 6%.
2. Le cours d'une action a baissé de 16%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 1

(8 *points*)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-5;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4-x^2}{2x+10}$. Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_g$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

PARTIE B

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(-2) - f(4) = 3$ et $f(-1) = 2$

1. Donner une expression de $f(x)$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. Tracer la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction f dans le repère de la partie A.

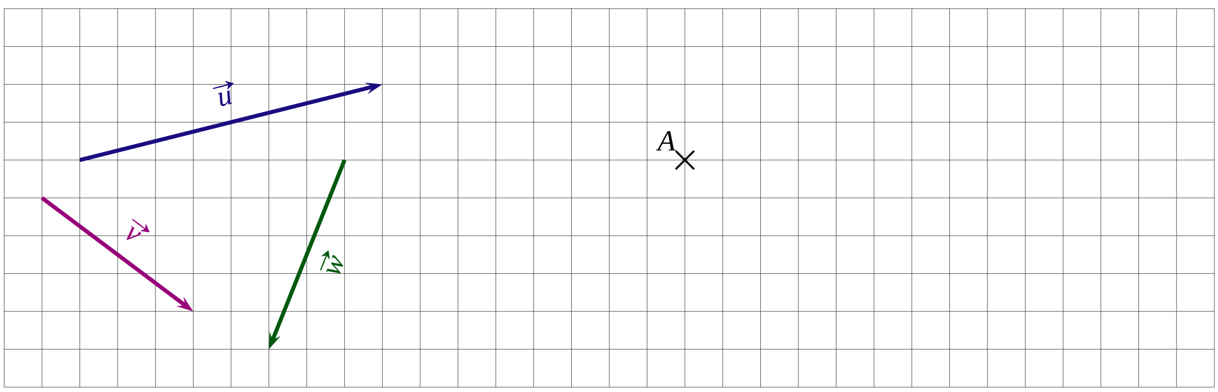
PARTIE C

1. Vérifier que sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{11-2x}{2x+10}$.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la droite $\mathscr{D}$ avec la courbe $\mathscr{C}_g$
3. a) Étudier le signe de $\dfrac{11-2x}{2x+10}$ sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, à l'aide d'un tableau.
   b) En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

EXERCICE 2

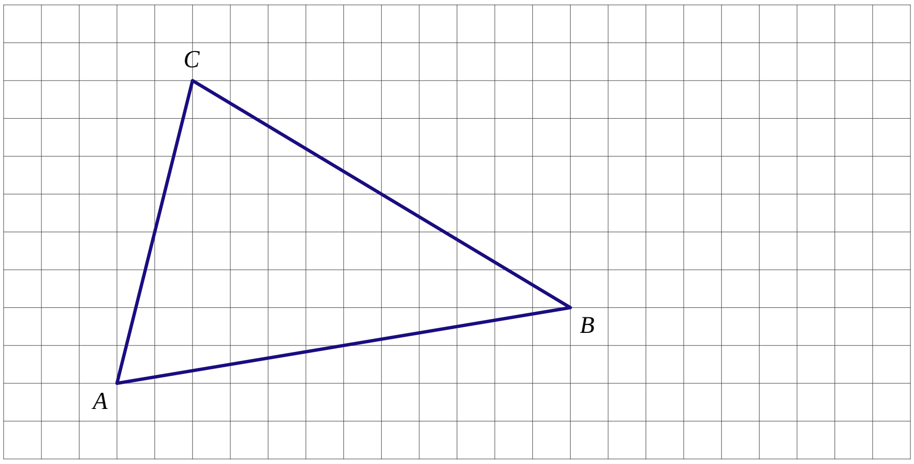
(2 *points*)

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$



EXERCICE 3

(3 *points*)

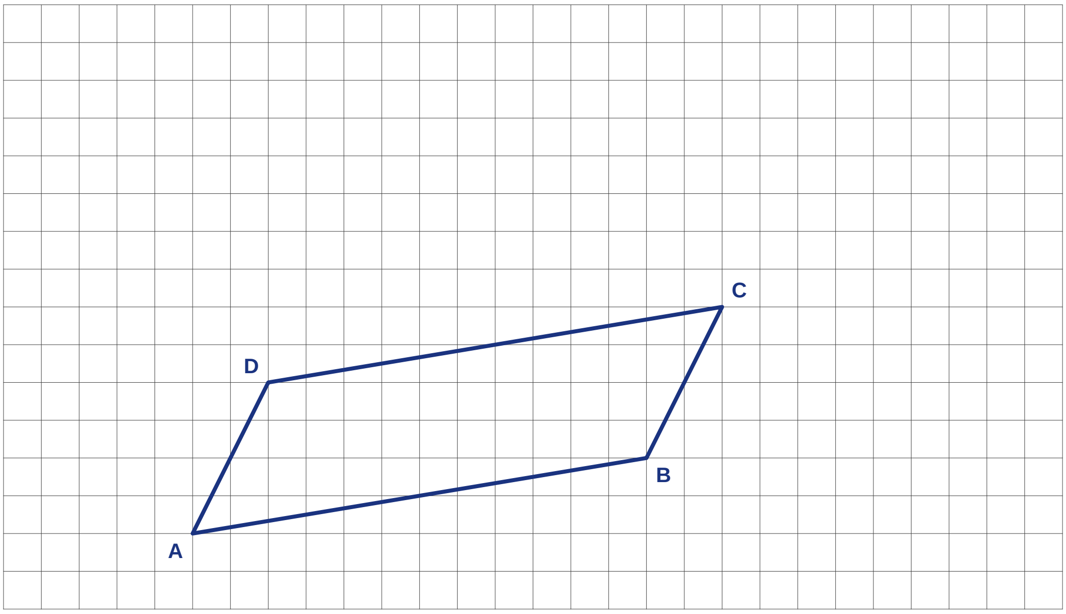


1. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$
2. Les droites (BM) et (AC) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 4

(3 *points*)

Sur le dessin ci-dessous, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



1. Placer les points E et F tels que $\overrightarrow{EA} = -3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Les points E, C et F sont-ils alignés ?

EXERCICE 5

(4 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. a) Placer les points $A(-2;2)$, $B(3;1)$, $C(1;-2)$ et $D(-4;-1)$.
   b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$
2. Calculer les coordonnées du point E tel que $OAEB$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 1 (11 *points*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La parabole C_f est tracée en annexe ci-dessous.

1. a) Le point $A\left(-\dfrac{3}{2};12\right)$ appartient-il à la courbe C_f ?

   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.

2. Soit g la fonction affine telle que $g(-2) = 10$ et $g(6) = -6$.

   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.

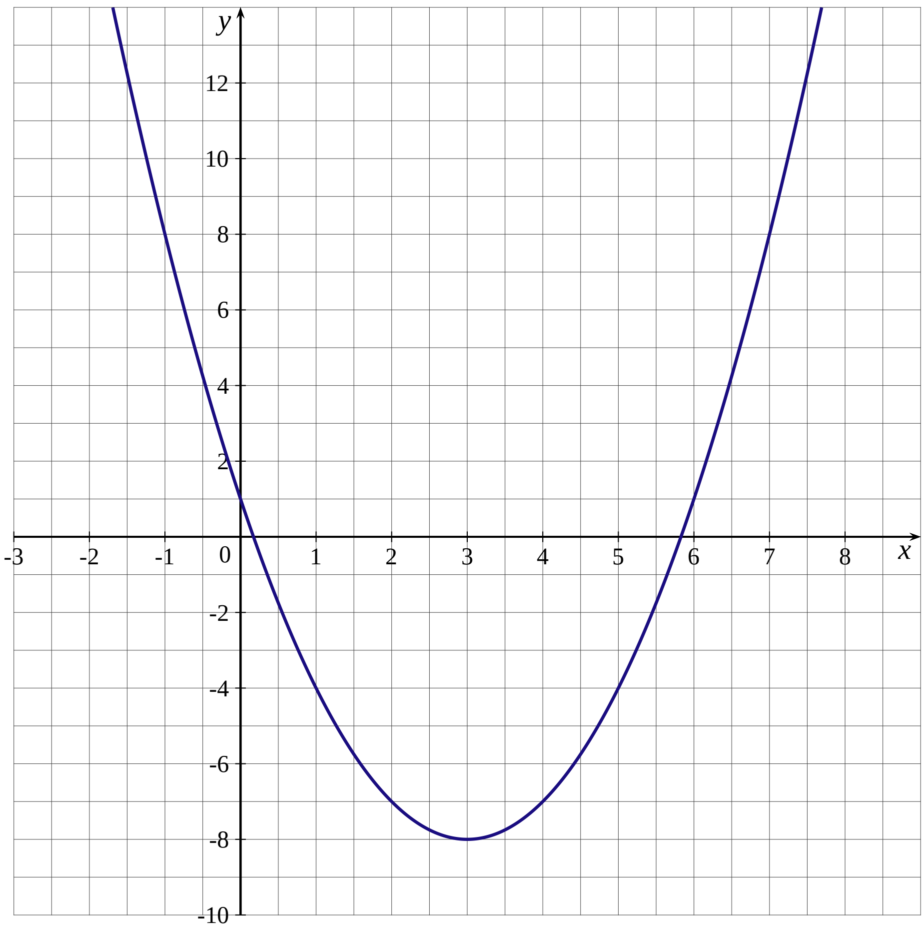
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (x-2)^2 - 9$

   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_f et de la droite D.

   c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

   d) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.

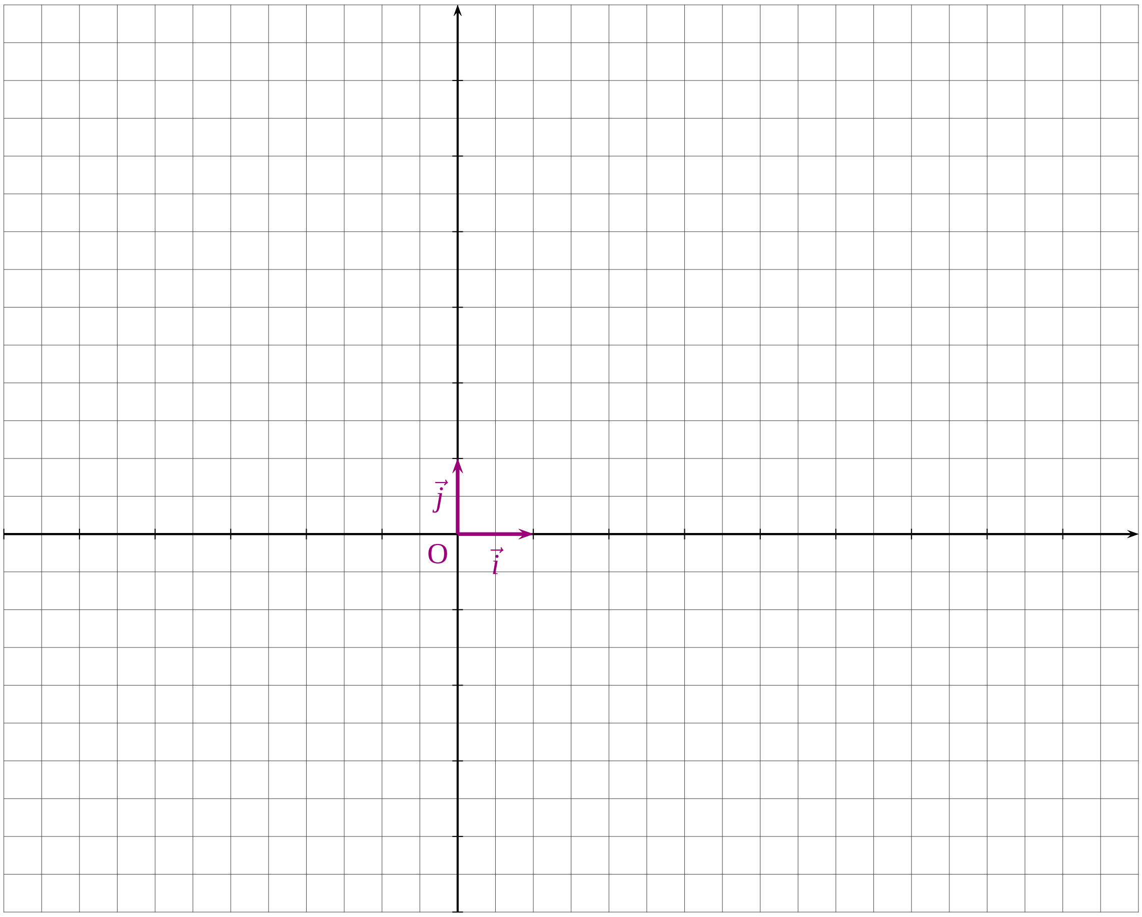
ANNEXE



EXERCICE 2

(9 *points*)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.



1. Placer les points $A(-1;3)$, $B(6;2)$ et $C(4;-2)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Quelle est la nature du triangle AOB ?
4. a) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$.

   b) Calculer l'abscisse x du point $E(x;1)$ de la droite (AM).
5. Les points D, E et B sont-ils alignés ?

CONTRÔLE N° 5

EXERCICE 1

(3 *points*)

Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $-0{,}25 \leqslant x < -0{,}2$; b) $\dfrac{3}{4} < x < 1$; c) $x \geqslant \dfrac{2}{3}$; d) $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$

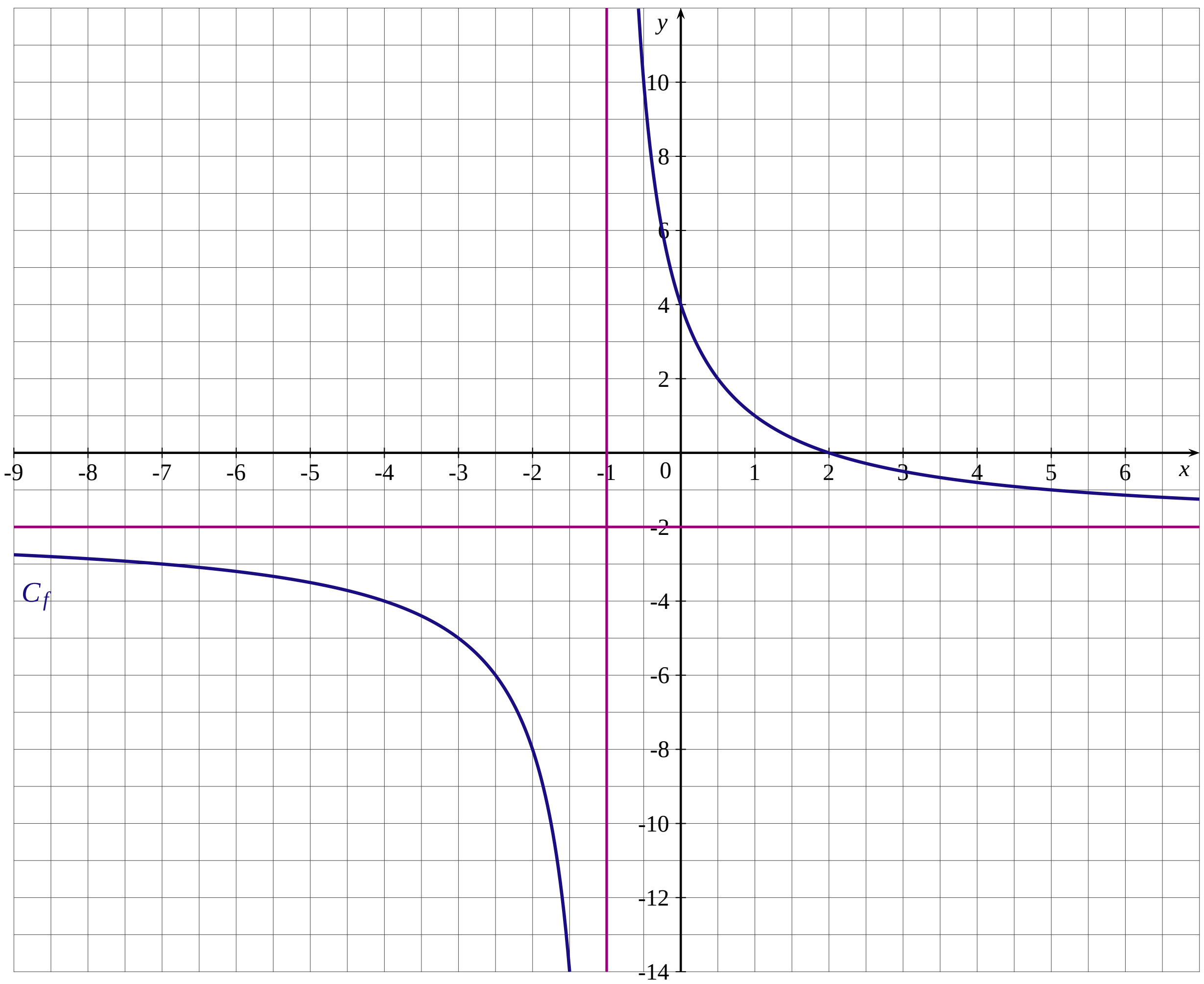
EXERCICE 2

(9 *points*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+1}$. La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est l'hyperbole C_f.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
3. a) Déterminer le réel B tel que $f(x) = -2 + \dfrac{B}{x+1}$.
   b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.
   c) En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x \in [-1201; -1001]$.
4. Soit g la fonction affine telle que $g(-8) = -6$ et $g(6) = 1$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
5. a) Montrer que pour tout réel $x \neq -1$ $f(x) - g(x) = \dfrac{(3-x)(x+4)}{2x+2}$.
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes C_f et D.
   c) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

ANNEXE

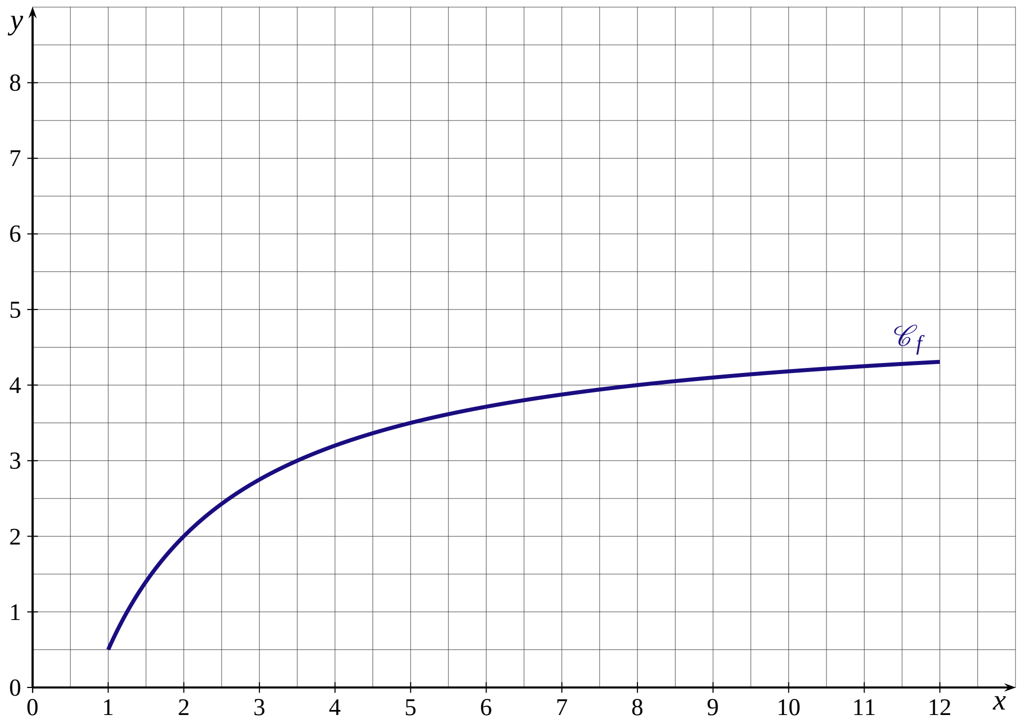


EXERCICE 3 (8 *points*)

PARTIE A

On considère les fonctions f et g définies pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;12]$ par $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+1}$ et $g(x)=8-\dfrac{x}{2}$.

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère.



Tracer dans le même repère, la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

2. Par lecture graphique, donner les coordonnées de leur point d'intersection E.

PARTIE B

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude de marché a permis d'établir que les fonctions f et g définies dans la partie A modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :
– $f(x)$ est la quantité, exprimée en millions d'articles, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros ;
– $g(x)$ est la quantité, exprimée en millions d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 9 €.
   Comparer l'offre et la demande pour ce prix de vente.
   Quel problème cela pose-t-il ?
2. Calculer le prix de vente à partir duquel le nombre d'articles offerts sur le marché par les producteurs sera supérieur à 3,5 millions d'articles.
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 1

(7 *points*)

Soit $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A\,(4;1)$ et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
   a) Le point $B\,(2;-1)$ est-il un point de la droite $\mathscr{D}$?
   b) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.
2. Soit Δ la droite passant par les points $E\left(\dfrac{3}{4};0\right)$ et $F\left(6;\dfrac{7}{2}\right)$
   a) Déterminer une équation de la droite Δ.
   b) Les droites Δ et $\mathscr{D}$ sont elles parallèles ?
3. Résoudre le système S : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 6 \\ 4x-6y & = & 3 \end{array}\right.$. Interpréter graphiquement le résultat.

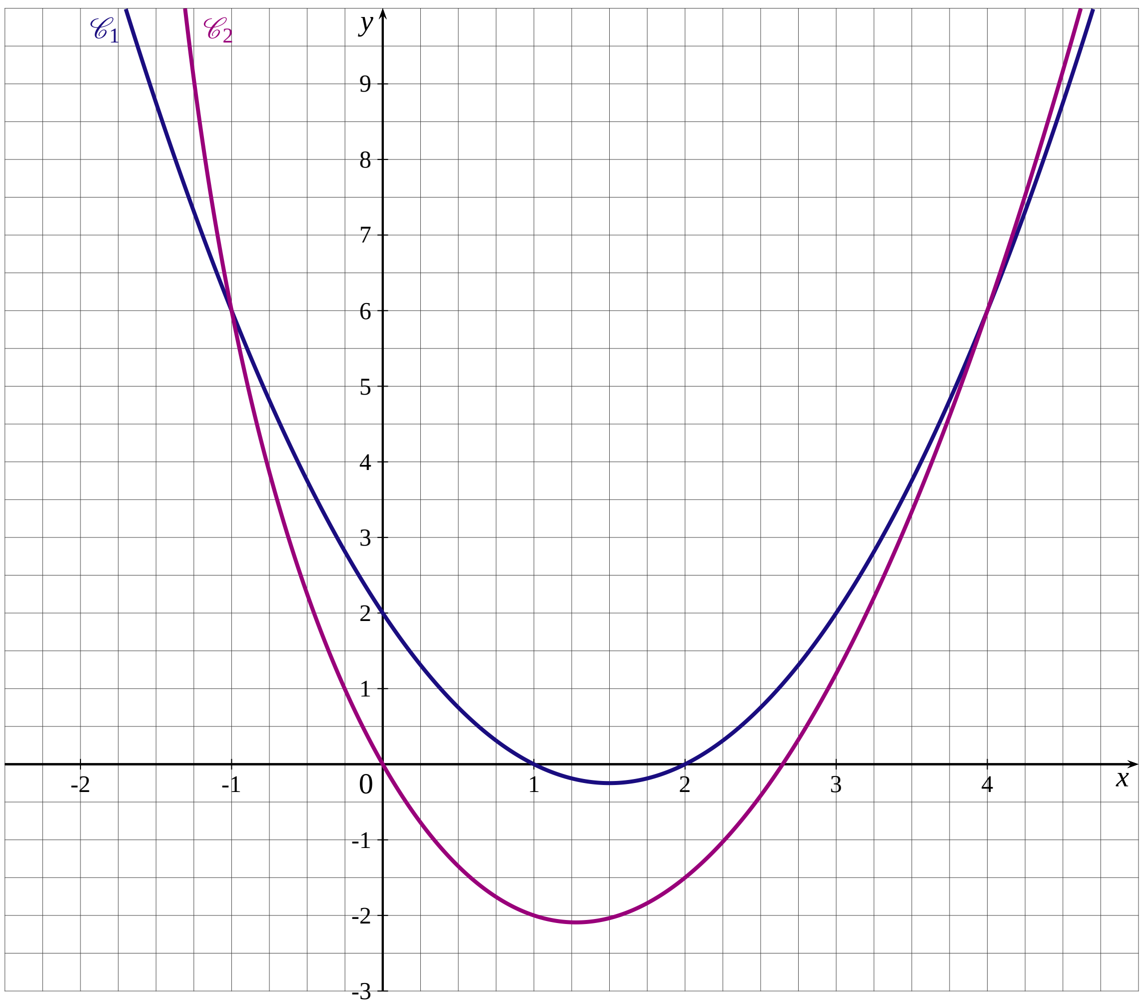
EXERCICE 2

(9 *points*)

PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=x^2-3x+2$

1. Donner le tableau des variations de la fonction f.
2. La proposition « Si $0\leqslant x\leqslant 3$ alors $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(3)$ » est-elle vraie ou fausse ?
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal. Laquelle des deux courbes $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$ est la courbe $\mathscr{C}_f$?



PARTIE B

La deuxième courbe, est la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^3-7x}{x+2}$.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses.
2. Montrer que pour tout réel $x > -2$, $g(x) - f(x) = \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+2}$
3. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{C}_f$ et de la courbe $\mathscr{C}_g$.

EXERCICE 3 (4 *points*)

Un portefeuille d'actions d'un montant de 10 000 **€** a perdu 2% de sa valeur au bout d'un an.
Ce portefeuille était constitué de la manière suivante :
– une partie x du capital initial est constitué d'actions A dont le cours en un an a augmenté de 10% ;
– le reste du capital initial noté y est constitué d'actions B dont le cours en un an a baissé de 15%.

Calculer le montant en euros de chacune des deux sommes x et y.

EXERCICE 1

(5 *points*)

Le tableau suivant donne la distribution des montants en euros du niveau de vie annuel en France en 2011.

Déciles	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
Niveau de vie	10 530	13 160	15 350	17 400	19 550	21 920	24 910	29 110	37 450

Source INSEE.

1. Recopier et compléter le commentaire suivant :

   « En 2011, la moitié des personnes ont un niveau de vie inférieur à ... euros annuels en France, soit ... euros par mois.

   Les 10 % des personnes les plus modestes de la population ont un niveau de vie inférieur à ... euros.

   Les 10% des personnes les plus aisées ont un niveau de vie supérieur à ... euros soit ... fois plus que le 1$^{\text{er}}$ décile. »

2. Le niveau de vie annuel moyen est de 23 130 euros.

   Quel est l'indicateur du niveau de vie le plus pertinent, le niveau de vie moyen ou le niveau de vie médian ?

3. Le seuil de pauvreté monétaire est fixé à 60% du niveau de vie médian.

   a) Calculer le montant mensuel du seuil de pauvreté monétaire.

   b) On suppose qu'entre deux déciles successifs, le pourcentage de la population en fonction du montant du niveau de vie peut être modélisé à l'aide d'une fonction affine.

   Déterminer une estimation, arrondie à 0,1% près, du pourcentage de la population qui vit en dessous du seuil de pauvreté monétaire.

EXERCICE 2

(4 *points*)

Dans un atelier de fabrication de pièces mécaniques, on a constaté que parmi les pièces produites, 6% ont le défaut A, 5% ont le défaut B et 92% n'ont aucun défaut.

On choisit une pièce au hasard et on note :

A l'évènement « la pièce a le défaut A » ;
B l'évènement « la pièce a le défaut B ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

2. En déduire la probabilité que la pièce produite ait les deux défauts.

EXERCICE 3

(5 *points*)

On lance trois fois de suite un dé équilibré et on forme un nombre avec les résultats obtenus : par exemple, si on tire 4,3 et 3 on obtient : 433.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ? Quelle est la probabilité d'obtenir 433 ?

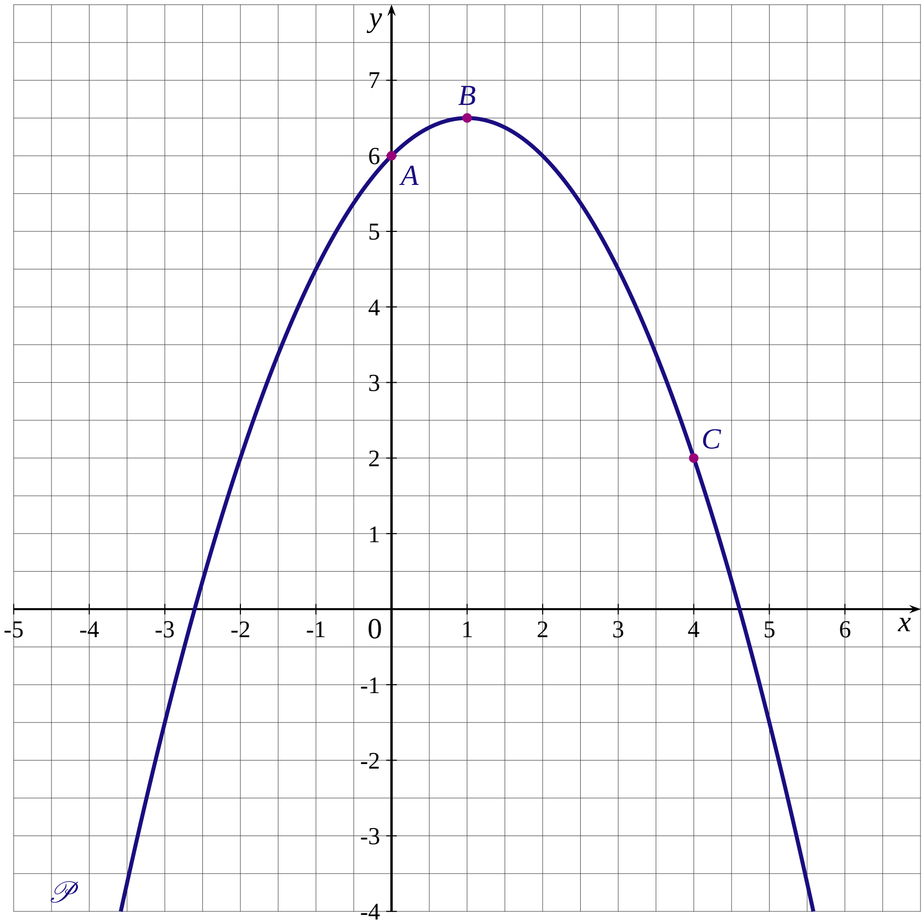
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres tous différents ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé seulement des chiffres 1 ou 2 ?

EXERCICE 4 (6 *points*)

La parabole $\mathscr{P}$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

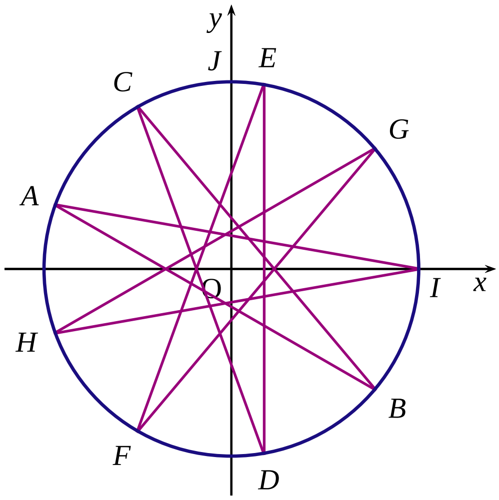
La parabole passe par les points $A(0;6)$, $B\left(1;\dfrac{13}{2}\right)$ et $C(4;2)$



1. Par lecture graphique, donner le tableau des variations de la fonction f.
2. Justifier que $\alpha = 1$ et $\beta = \dfrac{13}{2}$
3. Montrer que $a = -\dfrac{1}{2}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 1

Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(\mathrm{O}; I, J)$, on a tracé le polygone régulier étoilé $ABCDEFGHI$.



1. Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IG}$?
2. Donner les coordonnées des points C et F.
3. Les points A et H ont-ils la même abscisse ?

EXERCICE 2

Dans chaque cas, déterminer les réels x tels que :

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left]-\pi; \pi\right]$
2. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in [0; \pi]$

EXERCICE 3

1. On donne $\cos \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Calculer $\sin \dfrac{7\pi}{12}$
2. Soit x un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{4}{5}$. Calculer $\cos x$.

EXERCICE 4

1. Calculer $\left(\cos \dfrac{\pi}{6} + \sin \dfrac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \dfrac{\pi}{6} - \sin \dfrac{\pi}{6}\right)^2$
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.
   Montrer que f est une fonction affine.

EXERCICE 5

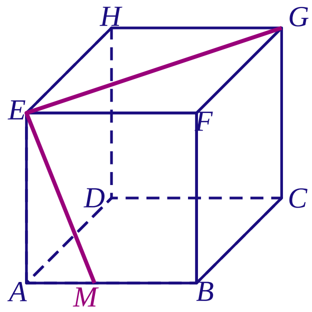
Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi; \pi\right]$ l'équation $4\cos^2 x - 3 = 0$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{7}{x+2} - 2$.

1. Donner le tableau des variations de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 1



$ABCDEFG$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$.

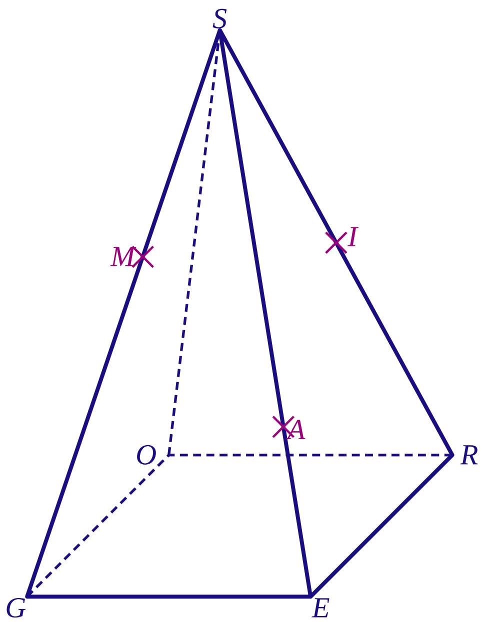
1. Le plan (GEM) coupe l'arête $[BC]$ en N. Que peut-on dire des droites (GE) et (MN) ?
2. Représenter la trace du plan (GEM) sur les faces du cube.

EXERCICE 2

Les points M, A et I sont respectivement les points d'intersection d'un plan $\mathscr{P}$ avec les arêtes $[SG]$, $[SE]$ et $[SR]$ de la pyramide $SROGE$.

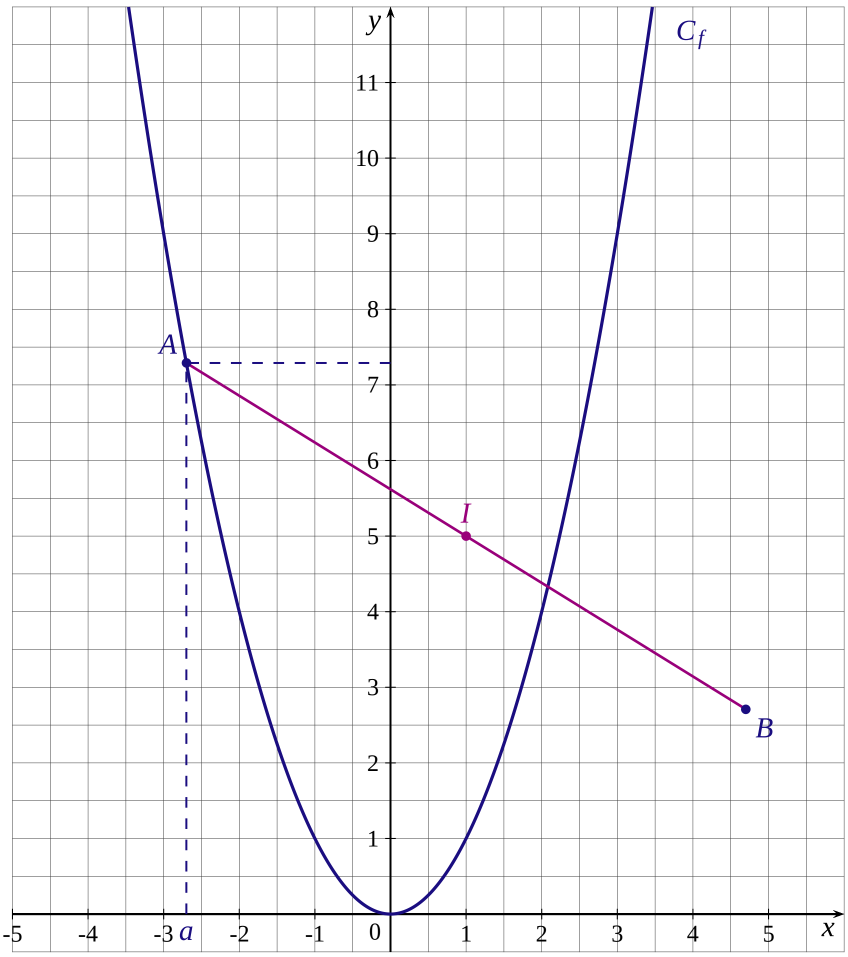
1. Représenter la droite $\mathscr{D}$ intersection du plan $\mathscr{P}$ avec le plan de base de la pyramide $SROGE$.
2. a) Construire le point N intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'arête $[S0]$.

   b) Représenter la trace du plan $\mathscr{P}$ sur les faces de la pyramide $SROGE$.



EXERCICE 3

C_f est la courbe représentative de la fonction carrée dans le plan muni d'un repère orthogonal.
I est le point de coordonnées $I(1;5)$.



Le but de cet exercice est de placer deux points sur la parabole C_f symétriques par rapport à I.

1. On note a l'abscisse d'un point A de la courbe C_f. Quelle est l'ordonnée du point A ?
2. a) Calculer en fonction de a, les coordonnées du point B symétrique du point A par rapport au point I.
   b) En déduire que $B \in C_f \Leftrightarrow 10 - a^2 = (2-a)^2$.
3. Montrer que $10 - a^2 = (2-a)^2 \Leftrightarrow -2 \times \left[(a-1)^2 - 4\right] = 0$.
4. Déterminer les coordonnées des deux points de la parabole C_f symétriques par rapport au point I.

EXERCICE 4

La conjecture suivante est-elle vraie ?
« La somme d'un réel x strictement positif et de son inverse est supérieure ou égale à 2 ».