I FONCTION AFFINE

1 – DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

EXEMPLES

— La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ est une fonction affine avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -3$.

— La fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ n'est pas une fonction affine.

CAS PARTICULIERS

— Dans le cas où $b = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire.
— Dans le cas où $a = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b$ est une fonction constante.

2 – PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

✻ DÉMONSTRATION

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Alors pour tous réels $x_1 \neq x_2$ on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels $x_1 \neq x_2$, on a $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.
Alors, en particulier pour tout réel $x \neq 0$ on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = a$$

D'où $f(x) - f(0) = ax$. Soit en notant l'image de 0 $f(0) = b$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
Ainsi, f est une fonction affine.

EXEMPLE

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-6) = 5$ et $f(3) = -1$.
f est une fonction affine d'où pour tout réel x, $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{f(3) - f(-6)}{3 - (-6)} \qquad \text{Soit} \qquad a = \frac{-1 - 5}{3 + 6} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi, $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + b$. Or $f(3) = -1$ d'où

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \times 3 + b = -1 &\Leftrightarrow -2 + b = -1 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$.

3 – VARIATION

Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est décroissante.

✻ DÉMONSTRATION

Si a est positif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \geqslant 0$, $ax_1 \leqslant ax_2$. D'où $ax_1+b \leqslant ax_2+b$
Soit $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
Donc f est croissante

Si a est négatif :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$
Comme $a \leqslant 0$, $ax_1 \geqslant ax_2$. D'où $ax_1+b \geqslant ax_2+b$
Soit $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
Donc f est décroissante

4 – SIGNE DE $ax+b$ AVEC $a \neq 0$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{b}{a}$.

✻ DÉMONSTRATION

Si $a \neq 0$ alors l'équation $ax+b=0$ admet pour solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a > 0$ alors f est strictement croissante :
donc pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) < 0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante :
donc pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{b}{a}$, $f(x) > 0$
D'où le tableau du signe de $f(x)$

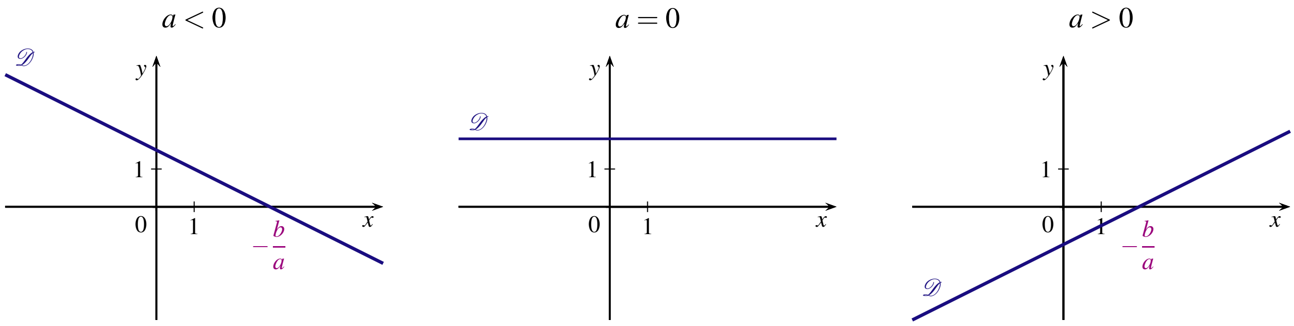
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, si $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

5 – COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax+b$.



II INÉQUATIONS

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x) \leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \leqslant 0$.

1 – ÉTUDE DU SIGNE D'UN PRODUIT

RÈGLE DES SIGNES D'UN PRODUIT

Le produit de deux nombres de même signe est positif. Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT

Pour étudier le signe d'un produit :

— On étudie le signe de chaque facteur.

— On regroupe dans un tableau le signe de chaque facteur. La première ligne du tableau contenant les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, qui annulent chacun des facteurs.

— On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)+(3x-1)] \times [(2x+3)-(3x-1)] \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (2x+3+3x-1)(2x+3-3x+1) \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (5x+2)(4-x) \leqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $(5x+2)(4-x)$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des facteurs du produit :

$$5x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 4-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+2)(4-x) \leqslant 0$ est $S = \left]-\infty;-\frac{2}{5}\right] \cup \left[4;+\infty\right[$.

2 – ÉTUDE DU SIGNE D'UN QUOTIENT

RÈGLE DES SIGNES D'UN QUOTIENT

Le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

TABLEAU DE SIGNES D'UN QUOTIENT

Pour étudier le signe d'un quotient :

— On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).

— On regroupe dans un tableau le signe de chaque terme.

— On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x+7) - 2 \times (3x+2)}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.

On étudie les signe de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.

La double barre dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

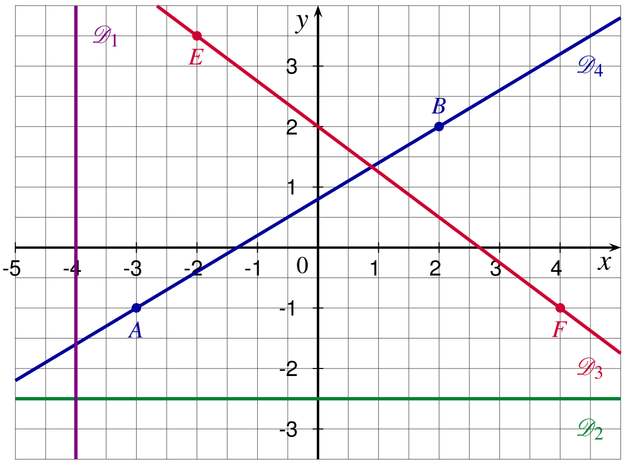
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}\right]$.

EXERCICE 1

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - 1$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

EXERCICE 2



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 3

Le tableau ci-dessous, donne le signe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

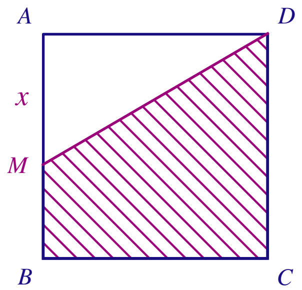
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\Gamma(x)$		$+$	0	$-$	

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui admettent le même tableau de signes ?

$f(x) = -x + 2$; $g(x) = -1 - \dfrac{x}{2}$; $h(x) = x^2 + 4$; $k(x) = 2x + 4$; $l(x) = -\dfrac{2x}{3} - \dfrac{4}{3}$

EXERCICE 4

$ABCD$ est un carré de côté 6.
À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.

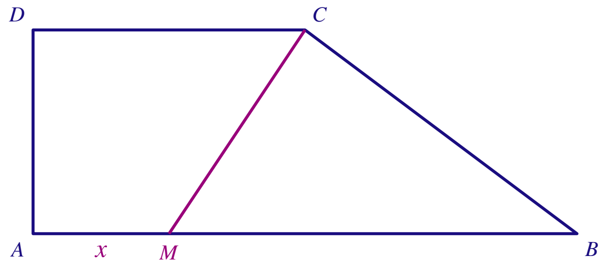


Le nombre $f(x)$ est égal à l'aire du trapèze $BCDM$.

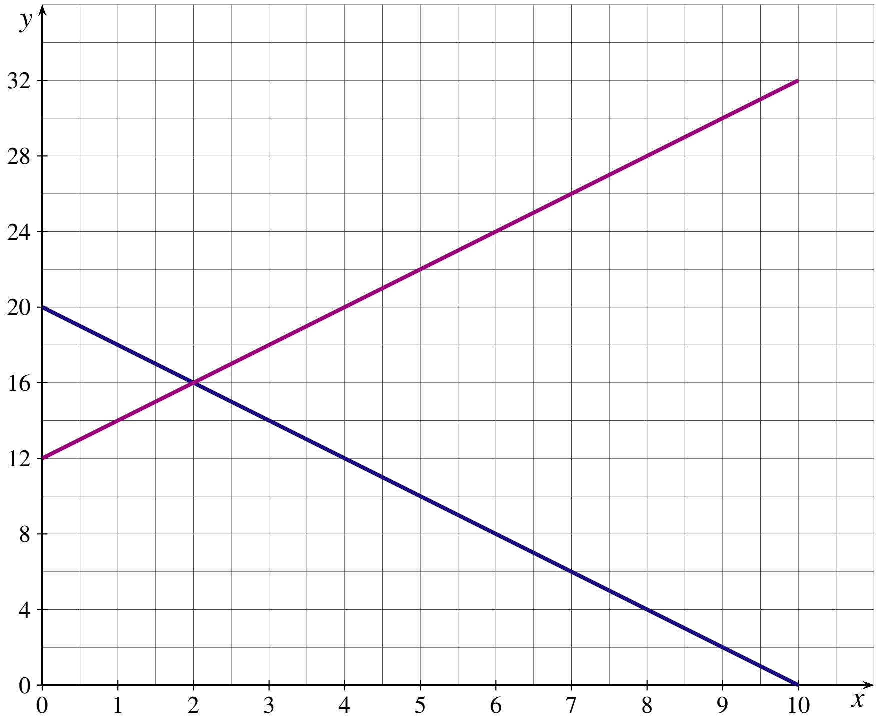
1. Donner une expression de $f(x)$.
2. Résoudre $f(x) \leqslant 24$.

EXERCICE 5

$ABCD$ est un trapèze rectangle. À tout point M du segment $[AB]$, on associe le réel $x = AM$.
Le réel $f(x)$ est égal à l'aire du triangle BMC.
Le réel $g(x)$ est égal à l'aire du trapèze $AMCD$.



Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous :



À l'aide du graphique, déterminer les distances AB, AD et CD.

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2;-1)$ et $(1;3)$.

EXERCICE 7

1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 8

— Augmenter une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 + \dfrac{t}{100}$

— Diminuer une grandeur de $t\%$ revient à multiplier cette grandeur par $1 - \dfrac{t}{100}$

1. Quel est le pourcentage d'évolution d'un article qui baisse successivement de 8% puis de 5% ?
2. Après une hausse de 6,25% le prix d'un article est de 272€. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
3. Après une baisse de 5,6% le prix d'un article est de 236€. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
4. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel devra être le taux du pourcentage d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 9

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$ et $g(x) = (5x+1)^2$.
On cherche à résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

1. Factoriser l'expression de $f(x) - g(x)$.
2. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

EXERCICE 10

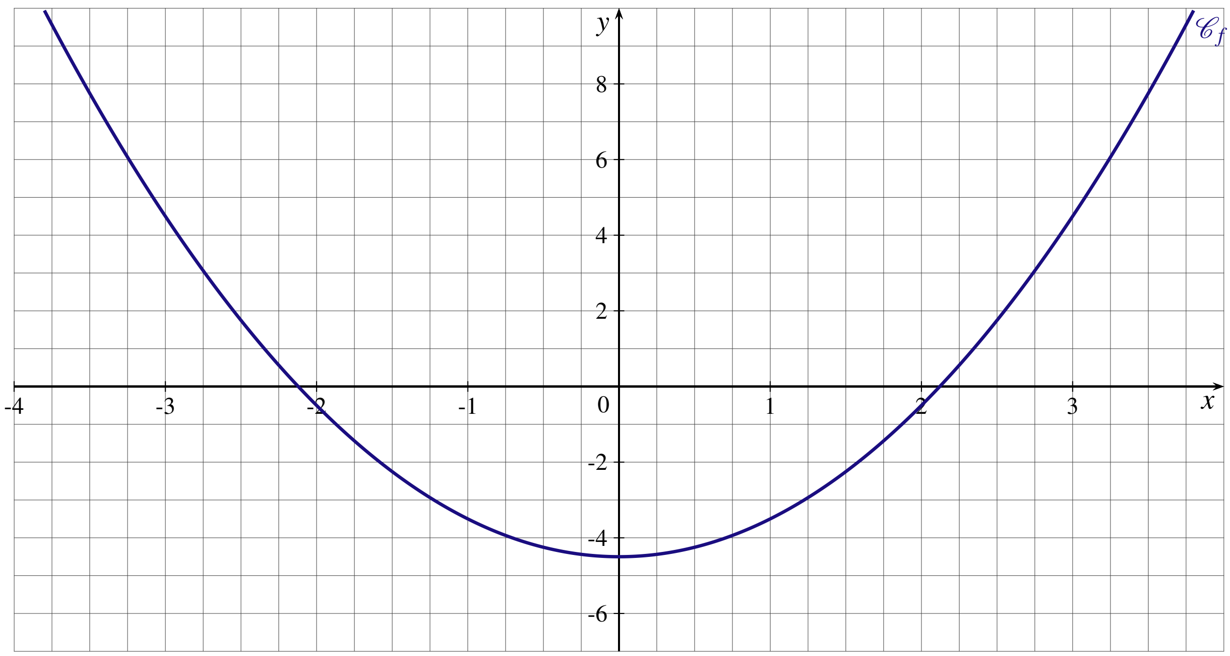
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x-2)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0$
2. $(2-3x)^2 \leqslant (2-3x)(3-5x)$
3. $\dfrac{3x+4}{1-2x} \geqslant 0$
4. $\dfrac{2x}{3x+2} < 1$

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{9}{2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe C_f est tracée ci dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

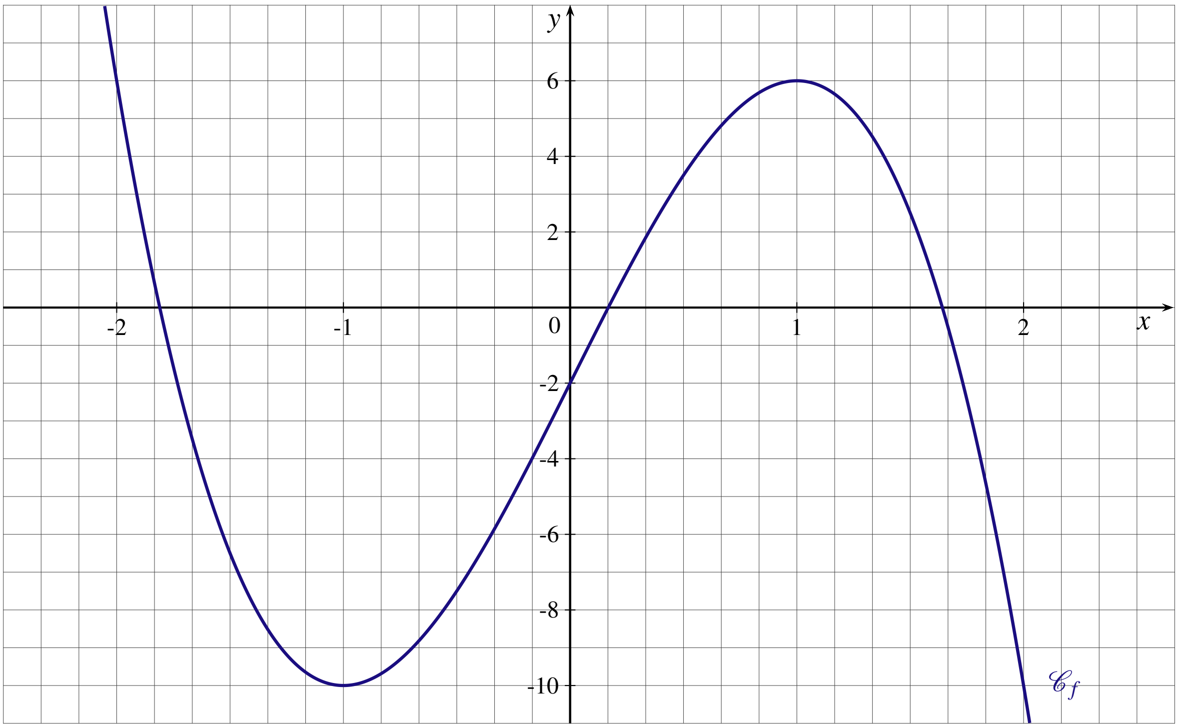
1. Soit g la fonction affine telle que $g\left(-\dfrac{9}{4}\right) = -6$ et $g\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci dessous.



2. a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(x-3)(x+1)$.
   b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3+12x-2$.
Sa courbe représentative notée C_f est tracée dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. Soit g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(3)-g(-1)=12$ et $g(2)=4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2. a) Factoriser $f(x)-g(x)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.
   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite D avec la courbe C_f.

EXERCICE 13

Deux offres de location de vacances sont proposées dans deux résidences similaires.

— **OFFRE A :** 50 € par nuit pour les trois premières nuits puis, 44 € par nuit supplémentaire.

— **OFFRE B :** Un forfait de 350 € pour sept nuits consécutives puis, 32 € par nuit supplémentaire.

1. On appelle f la fonction qui à tout séjour de x nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client qui a choisi l'offre A.
   a) Calculer $f(3)$ et $f(5)$.
   b) Donner une expression de $f(x)$.
2. On appelle g la fonction qui à tout séjour de x nuits fait correspondre le montant en euros à payer pour un client qui a choisi l'offre B.
   a) Calculer $g(5)$ et $g(12)$.
   b) Donner une expression de $g(x)$.
3. a) Représenter dans un même repère les fonctions f et g.
   b) Par lecture graphique, déterminer le nombre de nuits à partir duquel l'offre B est plus avantageuse que l'offre A.