

I FONCTION CARRÉ

1 – DÉFINITION

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x , on a $x^2 = (-x)^2$.

2 – VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

* DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

— Si $a < b \leq 0$:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \text{ et } a < b \leq 0 \Leftrightarrow a + b < 0 \text{ donc } f(a) - f(b) > 0$$

Ainsi, sur l'intervalle $] -\infty; 0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.

— Si $0 \leq a < b$:

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \text{ et } 0 \leq a < b \Leftrightarrow a + b > 0 \text{ donc } f(a) - f(b) < 0$$

Ainsi, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

CONSÉQUENCES

- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leq x \leq 2$.

La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3; 2]$.

f est décroissante sur $[-3; 0]$ et croissante sur $[0; 2]$.

— Si $-3 \leq x \leq 0$ alors $0 \leq x^2 \leq 9$

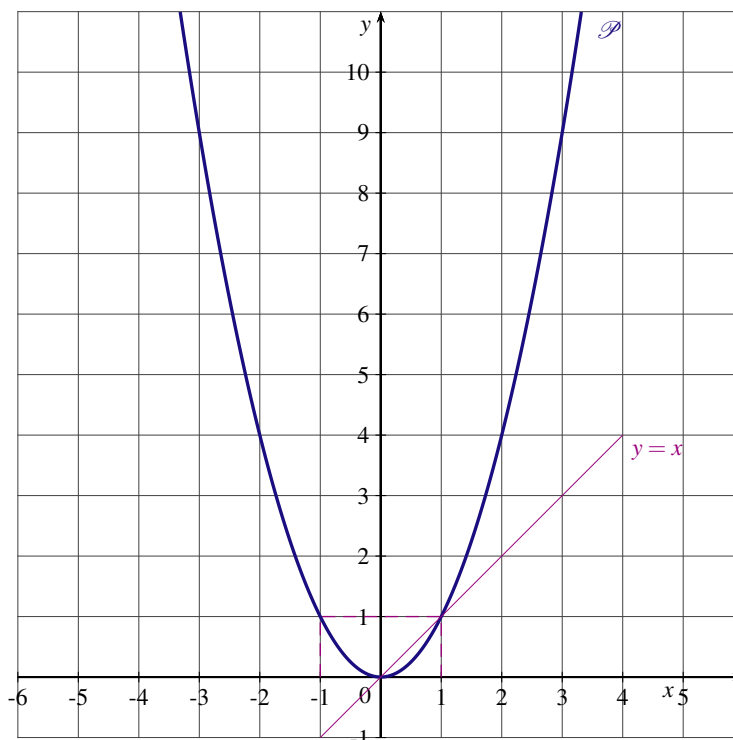
— Si $0 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 4$

x	-3	0	2
$f(x)$	9	0	4

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leq x \leq 2$ alors $0 \leq x^2 \leq 9$

3 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leq a \leq 1$ alors $a^2 \leq a$. Sur l'intervalle $[0; 1]$, la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

4 – ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

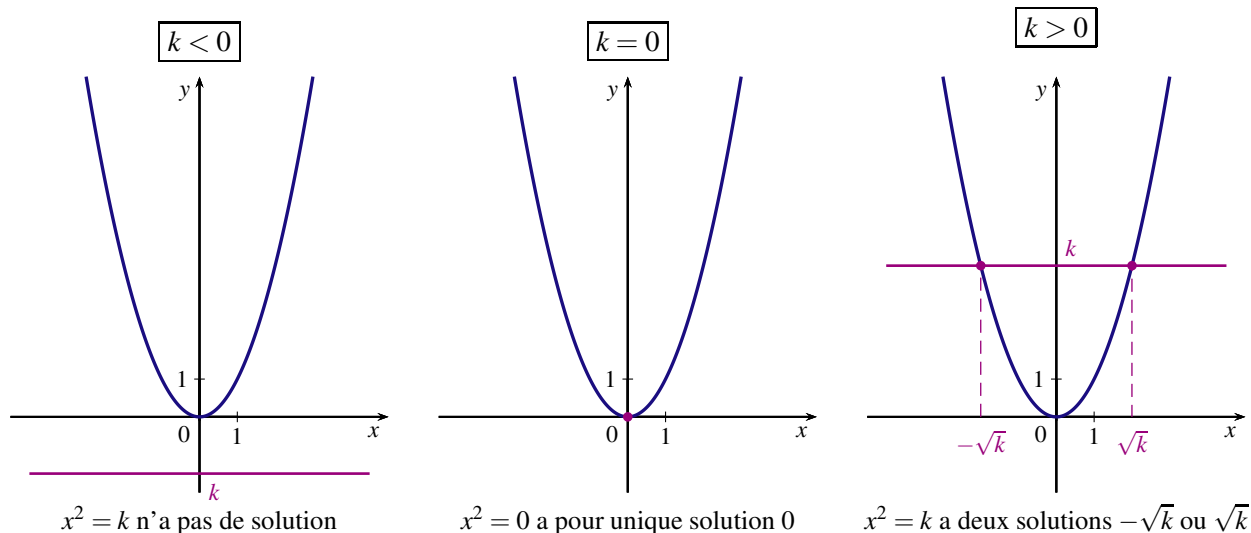
ÉQUATIONS $x^2 = k$ AVEC k RÉEL

— Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.

— Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$

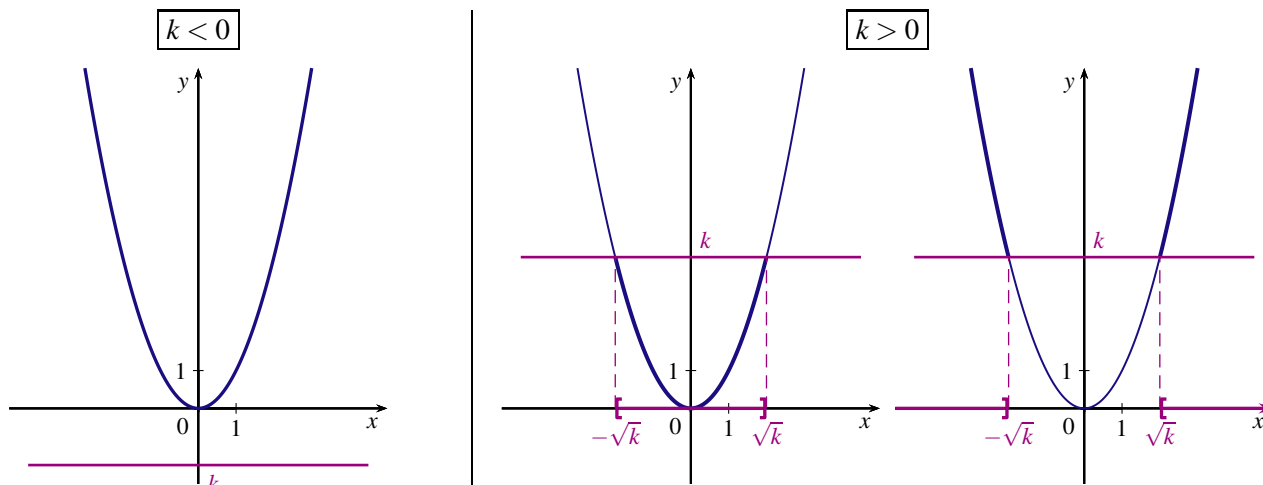
— Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0$.

On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.



INÉQUATIONS $x^2 \leq k$ OU $x^2 \geq k$ AVEC k RÉEL

Résoudre une inéquation $x^2 \leq k$ ou $x^2 \geq k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.



L'inéquation $x^2 \leq k$ n'a pas de solution :

$$S = \emptyset$$

L'inéquation $x^2 \geq k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$

L'inéquation $x^2 \leq k$ a pour ensemble solution :

$$S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$$

L'inéquation $x^2 \geq k$ a pour ensemble solution :

$$S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$$

EXEMPLE

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x ,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$(x+3)(x-3)$	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

EXERCICE 1

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

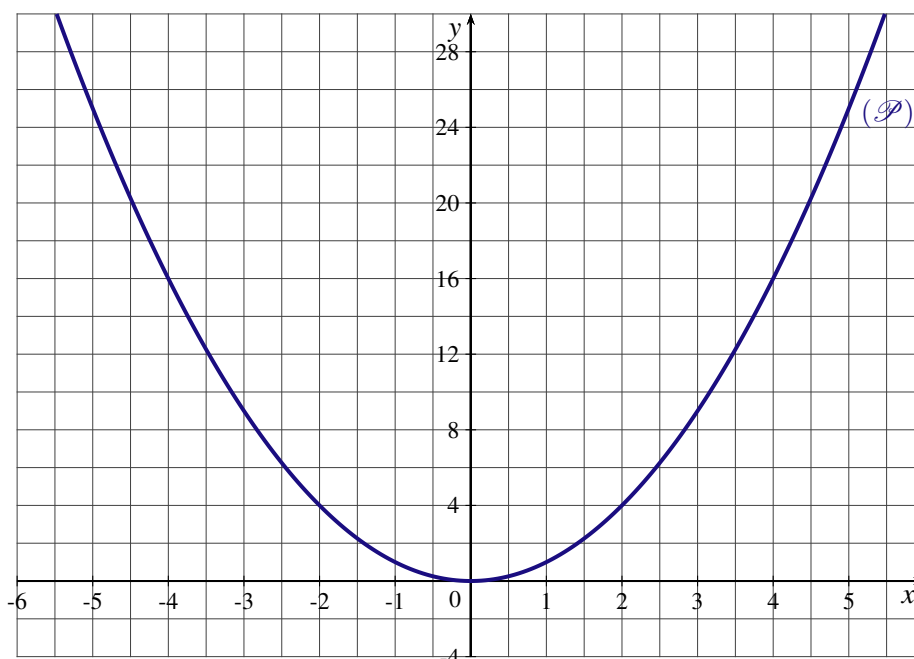
« Pour tout nombre réel x , $x + 1 \geq x$. D'où $(x + 1)^2 \geq x^2$

Soit en développant $x^2 + 2x + 1 \geq x^2$

On en déduit que $2x + 1 \geq 0$ soit $x \geq -\frac{1}{2}$ et donc finalement que tout nombre réel est plus grand que $-\frac{1}{2}$. »

EXERCICE 2

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative est la parabole (\mathcal{P}) tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $-\sqrt{6}$, $1 - \sqrt{2}$, 10^{-2} et $\frac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12?
3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = \frac{3}{2}x + 10$.
 - a) Tracer dans le repère précédent, la courbe D représentative de la fonction g .
 - b) Lire graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
 - c) En déduire une factorisation de $E(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 10$.

EXERCICE 3

Recopier et compléter les égalités suivantes :

A. $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - \dots$

B. $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \dots$

C. $x^2 + 3x - 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \dots$

D. $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \dots$

E. $2x^2 + 3x = 2 \left[(x + \dots)^2 - \dots \right]$

F. $-3x^2 - x + 1 = -3 \left[(x + \dots)^2 - \dots \right]$

G. $\frac{x^2}{2} + 3x - 1 = \frac{1}{2} \left[(x + \dots)^2 - \dots \right]$

H. $-\frac{x^2}{4} + 3x + 2 = -\frac{1}{4} \left[(x - \dots)^2 - \dots \right]$

EXERCICE 4

Soit x un nombre réel.

1. L'affirmation « Si $x^2 \geq 9$ alors $x \geq 3$ » est-elle vraie ?
2. Écrire une proposition équivalente à : $x^2 \geq 9$.

EXERCICE 5

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(x - 3)^2 = 25$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $(1 - 2x)^2 \geq 9$.

EXERCICE 6

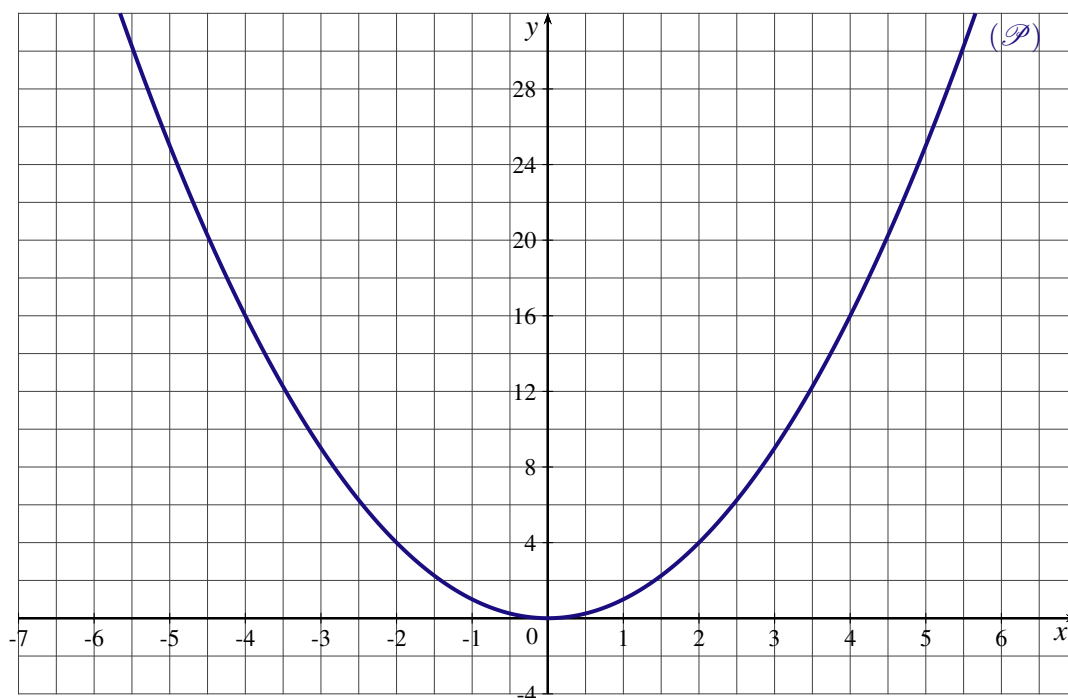
Soit x un réel de l'intervalle $[-0,5; 3]$.

1. Donner un encadrement de x^2 puis de $x^2 - 4x$
2. a) Montrer que pour tout réel x , $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.
b) En déduire un deuxième encadrement de $x^2 - 4x$.

EXERCICE 7

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est la parabole (\mathcal{P}) tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



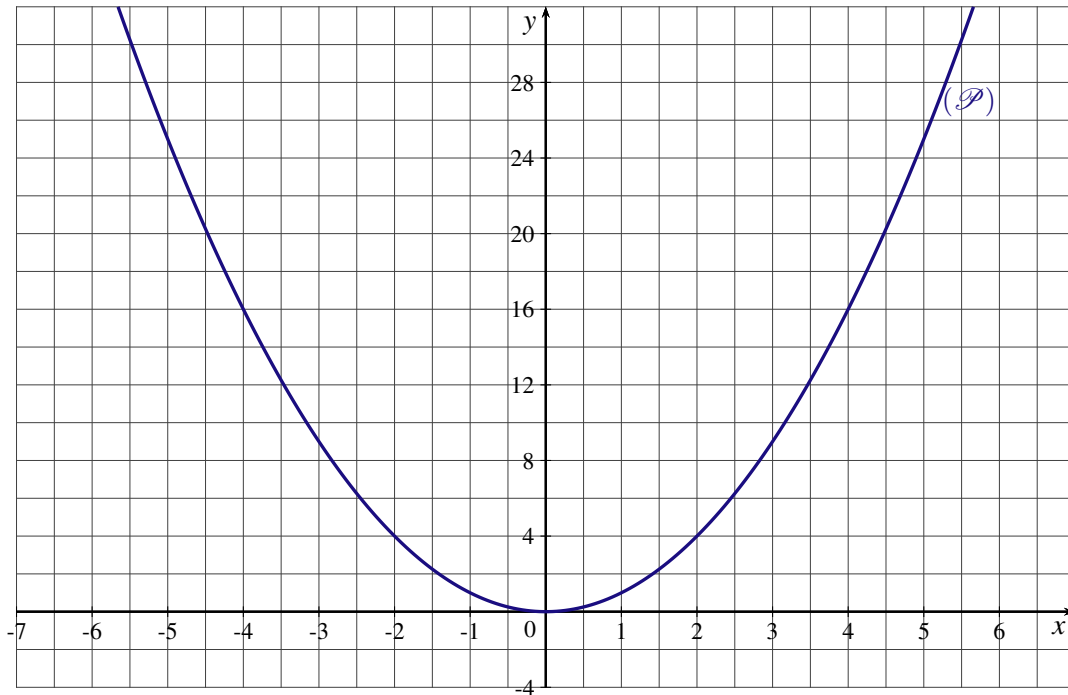
1. Calculer les images des réels : (-10^{-3}) , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2 - \sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 20 ?
3. Le point $A(3,6; 13)$ appartient-il à la parabole (\mathcal{P}) ?
4. Soit a un réel tel que : $-3 \leq a \leq 2$. Déterminer un encadrement de a^2 .
5. Soit g la fonction affine telle que $g(-3) = 18$ et $g(5) = 6$.
 - a) Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
 - b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.

6. a) Montrer que $f(x) - g(x) = \left(x + \frac{9}{2}\right)(x - 3)$.
b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole (\mathcal{P}).

EXERCICE 8

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative (\mathcal{P}) est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



PARTIE A

- Calculer les images des réels : $\left(-\frac{4}{5}\right)$, $(-\sqrt{6})$, $(1 - \sqrt{3})$, 10^{-3} et $\frac{7}{13}$.
- Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
- Placer dans le repère précédent le point A de coordonnées $A\left(-\frac{9}{2}; 20\right)$.
Le point A appartient-il à la parabole (\mathcal{P}) ?
- Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation $f(x) \geq 8$.
- Soit a un réel tel que : $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq a \leq -0,1$. Déterminer un encadrement de a^2 .
- Si $x \in]-1; 10^{-2}]$, à quel intervalle appartient $f(x)$?

PARTIE B

Soit g la fonction affine telle que $g(-6) = 6$ et $g(2) = 26$.

- a) Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x .
b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole (\mathcal{P}).
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

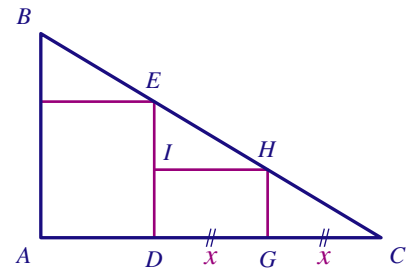
EXERCICE 9

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 15$ cm.
 G et D sont deux points du segment $[CA]$ tels que $CG = GD$.

On construit les rectangles $ADEF$ et $DGHI$ comme indiqué sur la figure.

On pose alors $CG = GD = x$ avec $0 < x < 7,5$.

Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires des rectangles $DGHI$ et $ADEF$ sont égales.



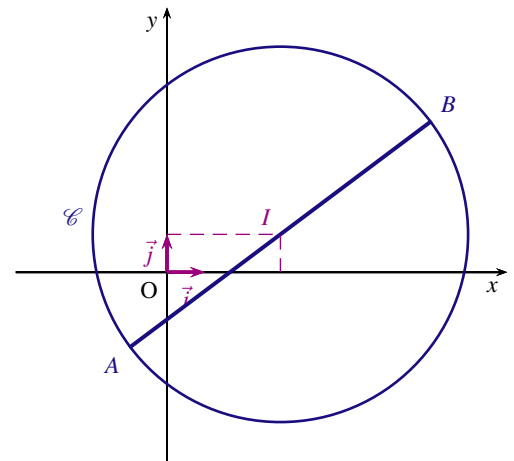
1. a) Exprimer GH en fonction de x . En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $DGHI$ en fonction de x .
b) Exprimer ED en fonction de x . En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $ADEF$ en fonction de x .
2. Résoudre alors le problème.

EXERCICE 10

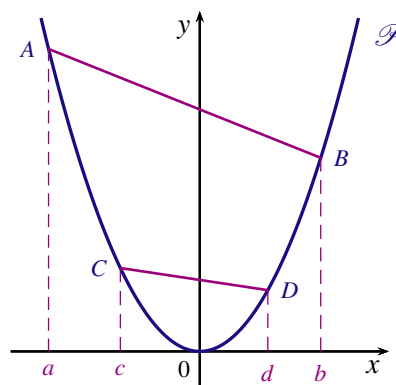
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-1; -2)$, $B(7; 4)$ et le cercle \mathcal{C} de diamètre AB .

1. Calculer les coordonnées du centre I du cercle \mathcal{C} .
2. Calculer le rayon r du cercle \mathcal{C} .
3. Déterminer les abscisses des points $M(x; 5)$ appartenant au cercle \mathcal{C} .



EXERCICE 11



Soient a, b, c et d les abscisses respectives de quatre points distincts A, B, C et D de la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$.

Quelle condition les réels a, b, c et d doivent-ils vérifier pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles ?