I FONCTION INVERSE

1 – DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2 – VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

✻ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels non nuls tels que $a < b$.
Étudions le signe de $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

$\boxed{a < b < 0}$

Si $a < b < 0$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement négatifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\boxed{0 < a < b}$

Si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\dfrac{b-a}{ab} > 0$ soit $f(a) - f(b) > 0$

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

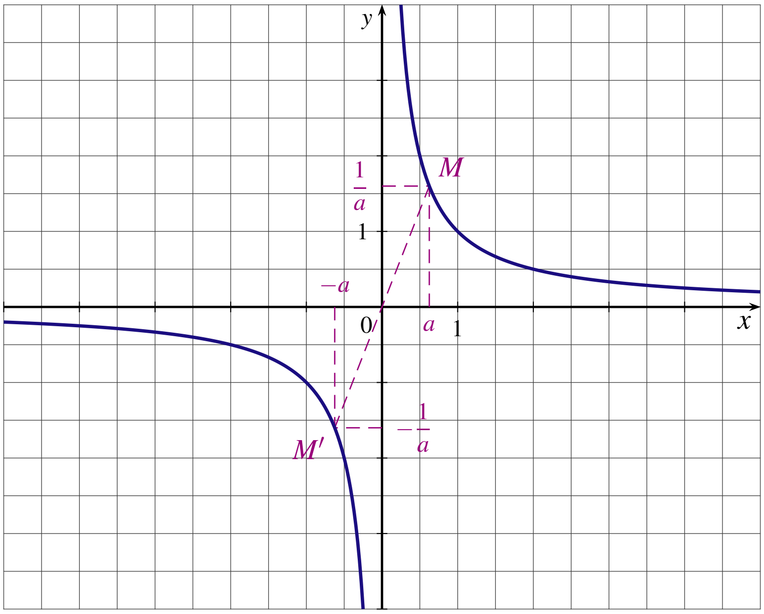
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

3 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

REMARQUE :

Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\,(a; f(a))$ et $M'\,(-a; f(-a))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



REMARQUE :

— On peut rendre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.

— On peut rendre $f(x)=\dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.

Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$, et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

II FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

1 – DÉFINITION

On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, $c\neq 0$ et d sont des réels tels que $ad-bc\neq 0$

REMARQUE

La condition $ad-bc\neq 0$ traduit le fait que $ax+b$ et $cx+d$ ne sont pas pas proportionnels.
Si $c\neq 0$ et $ad-bc=0$ alors le quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est constant. En effet

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{cax+bc}{c\,(cx+d)}=\frac{cax+ad}{c\,(cx+d)}=\frac{a}{c}$$

2 – ENSEMBLE DE DÉFINITION

Une fonction homographique est définie pour tout réel x tel que le dénominateur $cx+d$ ne s'annule pas.
La fonction $f:x\mapsto\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie sur $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c};+\infty;\right[$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{3-2x}$

f est définie pour tout réel x tel que $3-2x \neq 0$ soit $x \neq \dfrac{3}{2}$. L'ensemble de définition de la fonction f est $D = \left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$ que l'on note aussi $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

3 – PROPRIÉTÉ

Toute fonction homographique peut se mettre sous la forme réduite $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$.

PREUVE

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$)

— Si $a=0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$, $\dfrac{b}{cx+d} = \dfrac{b}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \dfrac{\dfrac{b}{c}}{x+\dfrac{d}{c}}$

— Si $a \neq 0$ alors pour tout réel $x \neq -\dfrac{d}{c}$,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \times \frac{x+\dfrac{b}{a}}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}\right)}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}$$

EXEMPLE

Soit f la fonction homographique définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2x-11}{3x+6}$

Pour tout réel $x \neq -2$,

$$\frac{2x-11}{3x+6} = \frac{2}{3} \times \frac{x-\dfrac{11}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} \times \frac{(x+2)-\dfrac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{\dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{2}}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{5}{x+2}$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$

4 – VARIATIONS

La forme réduite $f : x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$ d'une fonction homographique permet de déduire les variations de la fonction f à partir des variations de la fonction inverse.

EXEMPLE

Étudions les variations de la fonction homographique f définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{x+2}$.

Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty ; -2[$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned}
a < b < -2 &\iff a+2 < b+2 < 0 \\
&\iff \frac{1}{b+2} > \frac{1}{a+2} < 0 \\
&\iff 0 < \frac{-5}{a+2} < \frac{-5}{b+2} \\
&\iff \frac{2}{3} < \frac{2}{3} - \frac{5}{a+2} < \frac{2}{3} - \frac{5}{b+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $a < b < -2$ alors $f(a) < f(b)$ donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -2[$
On montre de même que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-2 ; -\infty[$.
D'où le tableau des variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

CAS GÉNÉRAL

Soit f une fonction homographique telle que $f\colon x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$.
Soient a et b deux réels tels que $a < b < \alpha$ (ou $\alpha < a < b$).

$$f(b) - f(a) = \frac{B}{b-\alpha} - \frac{B}{a-\alpha} = B \times \frac{a-b}{(b-\alpha)(a-\alpha)}$$

Dans chacun des deux cas $a < b < \alpha$ (ou $\alpha < a < b$), on a $\dfrac{a-b}{(b-\alpha)(a-\alpha)} < 0$. Par conséquent :

- Si $B < 0$ alors, $f(b) - f(a) > 0$ donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;\alpha[$ ou $]\alpha;+\infty[$
- Si $B > 0$ alors, $f(b) - f(a) > 0$ donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;\alpha[$ ou $]\alpha;+\infty[$

On en déduit le tableau des variations de la fonction f selon le signe de B :

$B < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

$B > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

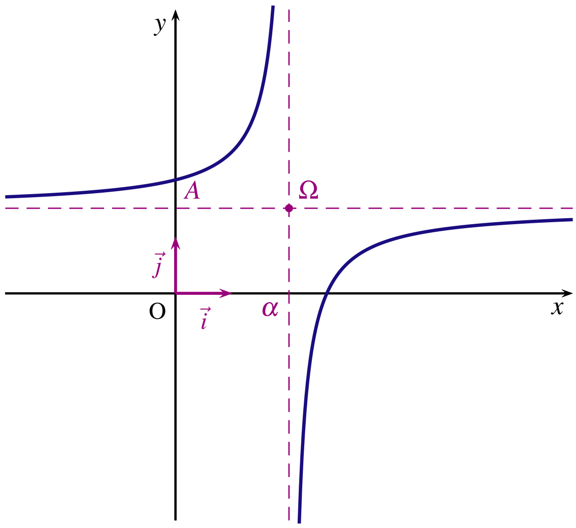
5 – COURBE REPRÉSENTATIVE

> La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

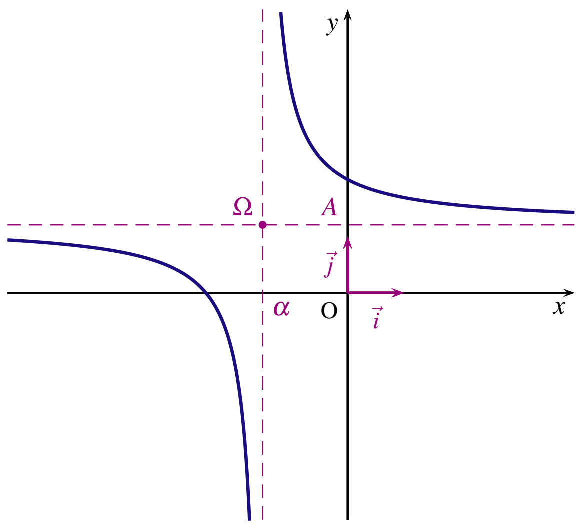
REMARQUE

La forme réduite $f\colon x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$ avec $B \neq 0$ d'une fonction homographique fait apparaître le centre de symétrie $\Omega\,(\alpha;A)$ ainsi que les deux asymptotes d'équation $x = \alpha$ et $y = A$ de l'hyperbole.

$B < 0$



$B > 0$



EXERCICE 1

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b) $\dfrac{2}{3} < x < 1$; c) $x > \dfrac{1}{5}$; d) $x \leqslant -\sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$; b) $\dfrac{1}{x} > 2$; c) $-2 < \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$; d) $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 3$

EXERCICE 2

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

EXERCICE 3

1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $x > 4 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{4}$; b) $x \leqslant -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant -1{,}5$; c) $x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$; d) $x < 0{,}6 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{5}{3}$

2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

EXERCICE 4

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$

   a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$

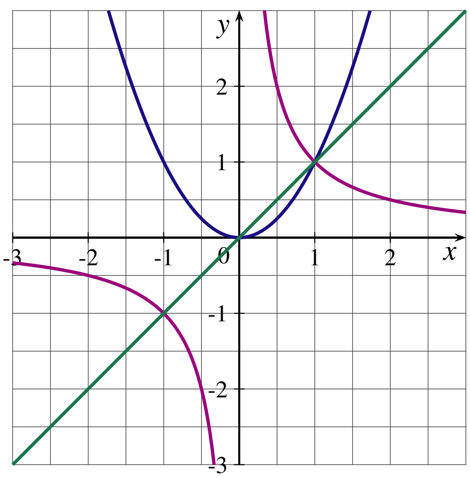
   b) Que peut-on en déduire pour $\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}$?

2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{1}{(x-1)^3} \geqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 5

Soit $a \neq 0$ un réel. On souhaite ranger dans l'ordre croissant les trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$

1. Les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



   Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{a}$

EXERCICE 6

On suppose dans cet exercice, que le prix de la location d'une voiture pour le week-end est de 90€, que la consommation moyenne d'un véhicule est de 8 litres de carburant pour 100 km parcourus et que le prix d'un litre de carburant est de 1,50€.

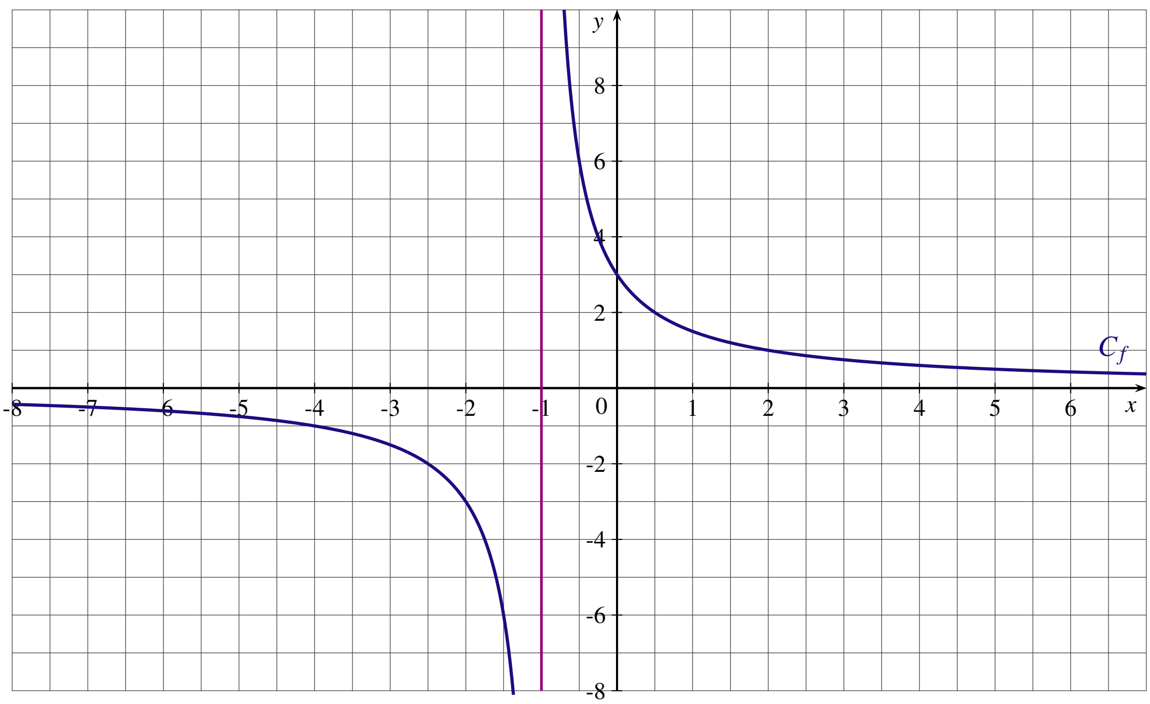
1. Pierre loue un véhicule pendant le week-end et parcourt 120 km pendant le week-end.
   Quel est le prix de revient moyen par kilomètre parcouru ?
2. Soit $x > 0$ le nombre de kilomètres parcourus par un client qui loue une voiture pendant le week-end.
   a) Exprimer en fonction de x, le montant $f(x)$ du prix de revient moyen par kilomètre parcouru.
   b) Préciser les variations de la fonction f.
3. Un client ayant loué une voiture pendant le week-end a calculé que le prix de revient moyen par kilomètre parcouru a été de 0,52€.
   a) Quelle distance ce client a-t-il parcouru pendant le week-end ?
   b) Quel est le montant du coût total de la location pendant le week-end ?

EXERCICE 7

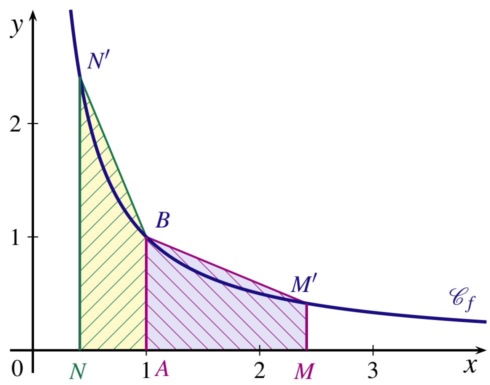
La courbe C_f représentative d'une fonction f a pour équation $y = \dfrac{3}{x+1}$. La courbe C_f est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal en annexe ci-dessous.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-5) = -7$ et $g(3) = 9$.
   Déterminer l'expression de g en fonction de x. Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\dfrac{3}{x+1} \leqslant 2x+3$. Interpréter graphiquement le résultat.

ANNEXE



EXERCICE 8



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$on considère les points $A(1;0)$ $M(a;0)$ et $N(b;0)$ avec $b<1<a$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Les points B, M' et N' sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement la même abscisse que les points A, M et N.

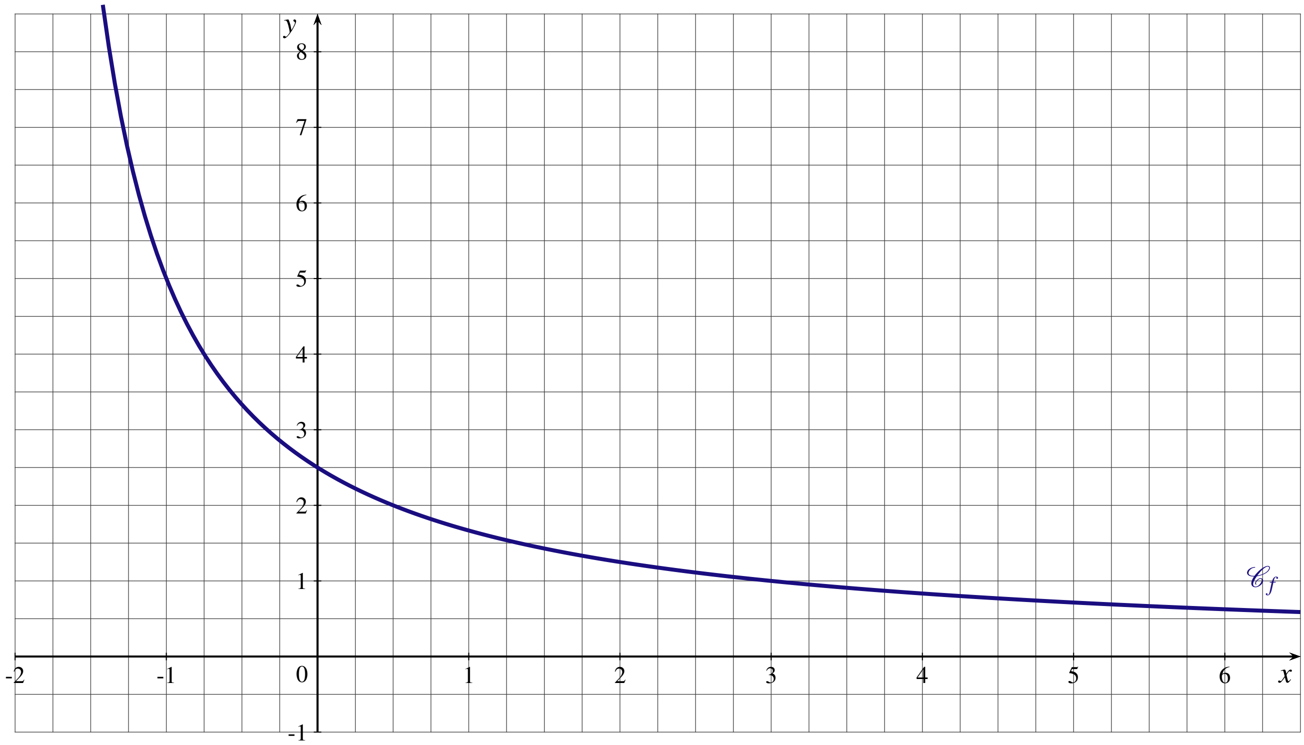
1. Déterminer l'abscisse du point M pour que l'aire du trapèze $AMM'B$ soit égale à une unité d'aire.
2. Déterminer l'abscisse du point N pour que l'aire du trapèze $ABNN'$ soit égale à une unité d'aire.

EXERCICE 9

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{1}{2x+3}\leqslant 1$
2. Chercher l'erreur dans le raisonnement suivant :
   « Comme la fonction inverse est décroissante, $\dfrac{1}{2x+3}\leqslant 1 \Leftrightarrow 2x+3\geqslant 1$ d'où $x\geqslant -1$ ».

EXERCICE 10

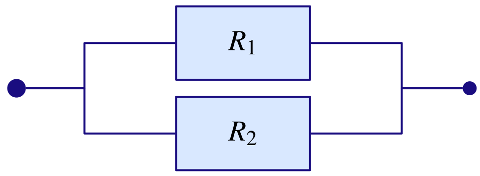
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5}{x+2}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 2$.
2. Soit a et b deux réels tels que $-2 < a < b$
   a) Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1{,}5) = 4$ et $g(2{,}5) = 0$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal précédent.
4. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}5x}{x+2}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 11

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance R du dipôle vérifie la relation $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.
Les résistances sont exprimées en ohms (Ω).
On donne $R_1 = 4$ et $R_2 = x$.



1. Montrer que $R = \dfrac{4x}{x+4}$
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x+4}$
   a) Déterminer les réels A et B tels que $f(x) = A + \dfrac{B}{x+4}$
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Est-il possible que la résistance R du dipôle soit supérieur à $4\,\Omega$?
   b) Déterminer la résistance R_2 pour que la résistance R du dipôle soit égale à $3\,\Omega$.

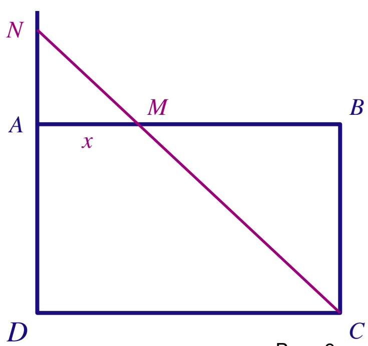
EXERCICE 12

À l'occasion d'une randonnée, la vitesse moyenne d'un cycliste à l'aller est de 15 km/h.

1. Quelle est la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour lorsque la vitesse moyenne au retour est de 21 km/h ?
2. On note x la vitesse moyenne exprimée en km/h du cycliste au retour et $V(x)$ la vitesse moyenne du cycliste sur le trajet aller-retour.
   a) Montrer que $V(x) = \dfrac{30x}{x+15}$.
   b) Pour quelles valeurs de x la vitesse moyenne sur le trajet total sera supérieure à 20 km/h ?
   c) La vitesse moyenne sur le trajet total peut-elle dépasser les 30 km/h ?

EXERCICE 13

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ et $BC = 5$.
M est un point du segment $[AB]$ distinct de B.
La droite (CM) coupe la droite (AD) en N



1. On pose $AM = x$
   a) Quelles sont les valeurs possibles du réel x ?
   b) Exprimer la distance AN en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;8[$ par $f(x) = \dfrac{40}{8-x} - 5$.

   Étudier les variations de la fonction f.
3. Pour quelles valeurs de x la distance AN est-elle comprise entre 3 et 20 ?
4. Est-il possible que $AN \geqslant 1995$?

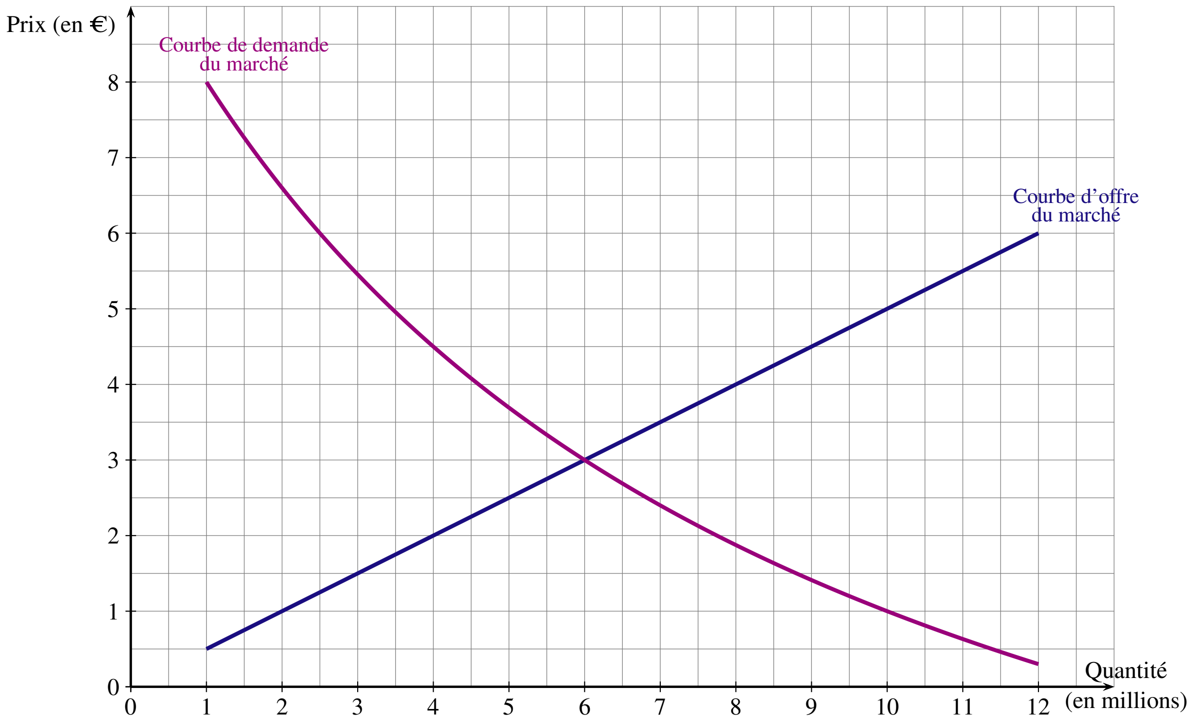
EXERCICE 14

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$

— la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78-6q}{q+8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. À l'aide du graphique précédent, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.

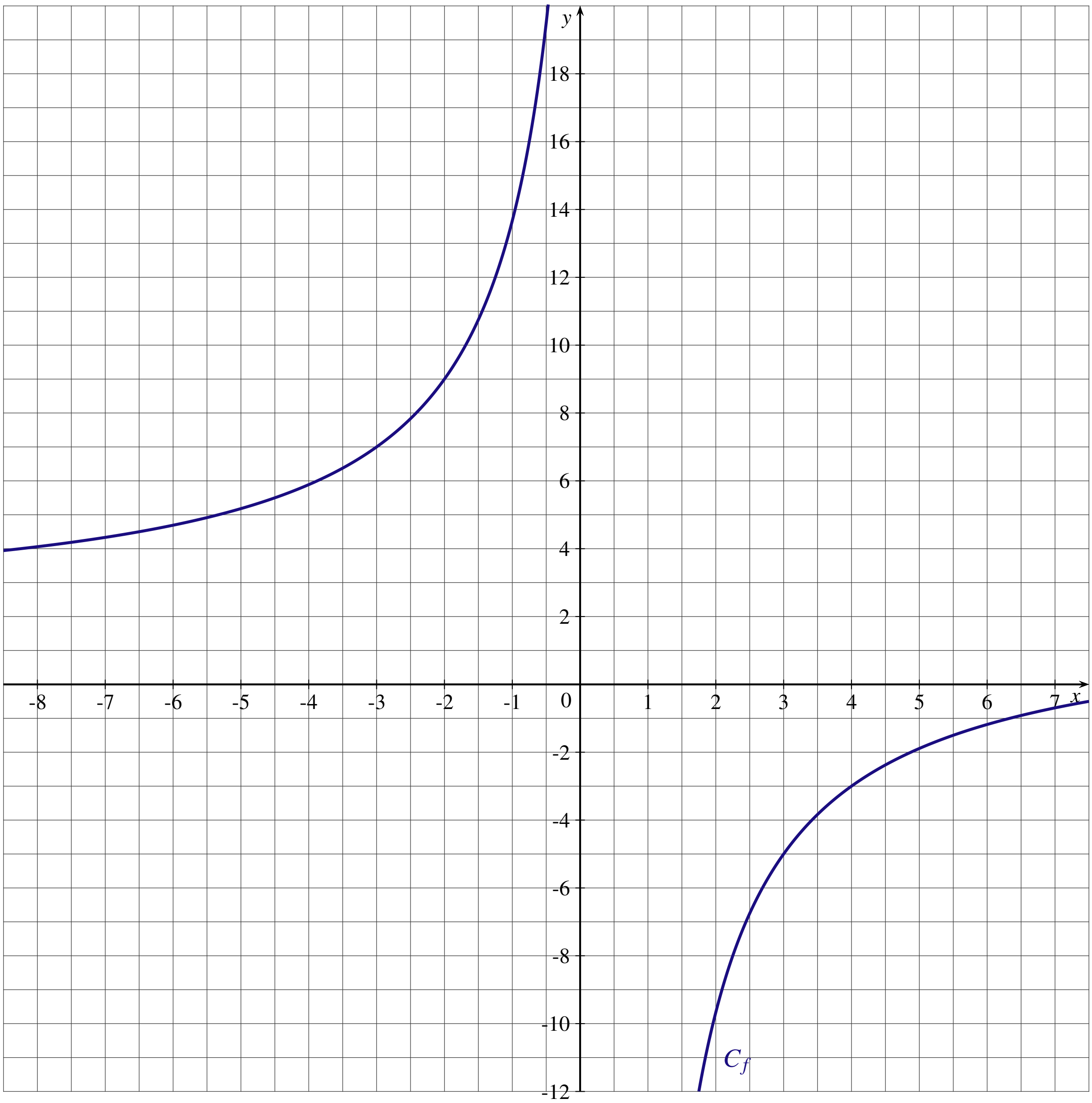
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 15

L'hyperbole C_f tracée dans le plan muni d'un repère orthogonal en annexe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f. L'hyperbole C_f a pour équation $y = \dfrac{4x-37}{2x-1}$.

1. a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
   c) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
2. a) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-0,5}$.
   b) 2 a-t-il un antécédent par f ?
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-7) = 8$ et $g(6) = -5$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. a) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et D.

ANNEXE



EXERCICE 16

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{-12x-2}{3x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. a) Déterminer les réels A et B tels que $f(x)=A+\dfrac{B}{x+\dfrac{2}{3}}$.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

   c) En déduire un encadrement de $f(x)$ si $x\in[65;66]$

   d) Pour quelles valeurs du réel x, $-4\leqslant f(x)\leqslant -3{,}997$?
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-7)=-10$ et $g(3)-g(-7)=9$.

   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné en annexe.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

   b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et D.

ANNEXE