

I VOCABULAIRE ET NOTATIONS

1 – EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

- Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard.
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est l'univers associé à cette expérience aléatoire. On le note Ω .
- Chacun des résultats de cette expérience aléatoire est une éventualité ou un évènement élémentaire.

Remarques :

1. Le résultat d'une expérience aléatoire est défini par l'expérimentateur.

On lance un dé cubique :

- Si on s'intéresse au chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera l'un des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Par contre, si on s'intéresse à la parité du chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera « pair » ou « impair ». L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{\text{pair, impair}\}$

2. L'univers Ω n'est pas toujours un ensemble fini .

On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « face » un résultat est un mot de longueur finie ou infinie formé avec les deux lettres P pour « pile » et F pour « face ». Par exemple, le résultat PPPF signifie qu'on a lancé quatre fois la pièce, les trois premiers lancers ont donné « pile » et le quatrième « face ».

Ω est l'ensemble des mots de la forme $\underbrace{P \cdots P}_k \text{PF}$, $k \in \mathbb{N}$ et du mot de longueur infinie formé avec la lettre P.

2 – ÉVÈNEMENT

Un évènement associé à une expérience aléatoire est une partie de l'univers Ω constituée de l'ensemble des évènements élémentaires de Ω pour lesquels on sait si une propriété est vérifiée ou non à l'issue de l'expérience aléatoire.

- L'évènement certain est noté Ω , il est toujours réalisé.
- L'évènement impossible est noté \emptyset , il ne se réalise jamais.

EXEMPLE

Dans le cas d'un lancer de dé cubique, les phrases « le résultat est un multiple de 3 », « le résultat est 6 » et « le résultat est 7 » définissent trois évènements.

3 – OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements

- L'évènement « A ne s'est pas réalisé » est l'évènement contraire de A noté \bar{A} .
- L'évènement « au moins un des évènements A ou B s'est réalisé » est l'évènement « A ou B » noté $A \cup B$.
- L'évènement « les évènements A et B se sont réalisés » est l'évènement « A et B » noté $A \cap B$.
- Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles.
On a alors $A \cap B = \emptyset$.
Les évènements A et \bar{A} sont incompatibles.

II PROBABILITÉ

1 – LOI DE PROBABILITÉ

Ω désigne un univers de n éventualités $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Définir une loi de probabilité p sur Ω , c'est associer, à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle $[0; 1]$, tel que :

$$\sum_{i=1}^n p(e_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

2 – PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

La probabilité d'un évènement A , est le réel noté $p(A)$ tel que :

- $p(A) \in [0; 1]$
- $p(A)$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

3 – PROPRIÉTÉS

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

1. La probabilité de l'évènement certain est égale à 1. $p(\Omega) = 1$.
2. Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
3. Pour tout évènement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
4. $p(\emptyset) = 0$.
5. Si A et B sont deux évènements $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

4 – ÉQUIPROBABILITÉ

Soit Ω un univers fini de n éventualités. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(e_1) = p(e_2) = \dots = p(e_n) = \frac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.

On a alors pour tout évènement A ,

$$p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Notation :

Soit E un ensemble fini, le cardinal de E noté $\text{card}(E)$ est le nombre d'éléments de l'ensemble E .

EXEMPLES

1. On lance deux dés équilibrés. Quel est l'évènement le plus probable A « la somme des nombres obtenus est égale à 7 » ou B « la somme des nombres obtenus est égale à 8 » ?

Si on s'intéresse à la somme des deux dés, l'univers est $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement élémentaire n'a pas la même probabilité.

$$2 = 1 + 1 \text{ alors que } 5 = 1 + 4 \text{ ou } 5 = 2 + 3$$

On se place dans une situation d'équiprobabilité en représentant une issue à l'aide d'un couple (a,b) où a est le résultat du premier dé et b le résultat du second dé. L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Les dés étant équilibrés, il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'évènement A est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 7. D'où $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

L'évènement B est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 8. D'où $p(B) = \frac{5}{36}$

L'évènement le plus probable est A .

2. La probabilité de l'évènement B « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est-elle supérieure à la probabilité de l'évènement A « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé » ?

- a) Probabilité de l'évènement A

Lorsqu'on lance deux fois un dé il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

L'évènement A « obtenir au moins un six » est l'évènement contraire de l'évènement « n'obtenir aucun six au cours des deux lancers ».

Or l'évènement \bar{A} est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5\}$.

Le nombre d'éléments de \bar{A} est $5^2 = 25$ d'où $p(\bar{A}) = \frac{5^2}{6^2}$ et

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36} \approx 0,306$$

- b) Probabilité de l'évènement B

Lorsqu'on lance une fois deux dés, il y a 36 couples de résultats équiprobables. La probabilité de l'évènement « ne pas obtenir de double six » vaut $\frac{35}{36}$.

Lorsqu'on lance 12 fois deux dés, la probabilité de l'évènement \bar{B} « ne pas obtenir de double six » vaut $\left(\frac{35}{36}\right)^{12}$ d'où

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{12} \approx 0,287$$

Ainsi, la probabilité de l'évènement B « obtenir au moins un double six en lançant 12 fois deux dés » est inférieure à la probabilité de l'évènement A « obtenir au moins une fois un six en lançant deux fois un dé »

EXERCICE 1

Le jour de l'ouverture d'un centre commercial, on distribue 1 000 billets de loterie. Parmi les 1 000 billets distribués, 2 donnent droit à un bon d'achat de 50 €, 10 donnent droit à un bon d'achat de 30 €, 20 donnent droit à un bon d'achat de 15 €, 50 donnent droit à un bon d'achat de 10 € et les autres billets ne gagnent rien.

1. Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner un bon d'achat de 15 € ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de ne rien gagner ?
3. On s'intéresse aux montants en euros des gains.
 - a) Quels sont les différents gains possibles ?
 - b) Déterminer la loi de probabilité de ces gains.
 - c) Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner au moins 30 € ?
 - d) Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner au plus 15 € ?

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique un produit destiné à l'exportation.

Sur le marché extérieur la demande (en milliers d'unités) est régie par la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

1. Calculer a .
2. Si l'entreprise dispose d'un stock de 3 000 unités du produit, quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

EXERCICE 3

Dans une entreprise, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des salariés ont été absents au moins 1 jour ; 30% des salariés ont été absents au moins 2 jours ; 15% des salariés ont été absents au moins 3 jours ; 10% des salariés ont été absents au moins 4 jours ; 5% des salariés ont été absents au moins 5 jours.

On choisit au hasard un salarié de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que ce salarié :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année ?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année ?
3. ait été absent au plus 3 jours ?

EXERCICE 4

On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
 - a) R : « la carte est un roi » ;
 - b) F : « la carte est une figure » ;
 - c) C : « la carte est un cœur ».
2. Décrire l'événement $F \cap C$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap C)$.
En déduire la probabilité $p(F \cup C)$ d'obtenir une figure ou un cœur.

EXERCICE 5

On choisit au hasard un nombre entre 1 et 36.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
— A : « le nombre est un multiple de 3 »

- B : « le nombre est un multiple de 4 »
- C : « le nombre est un multiple de 9 »
- D : « le nombre est premier »

2. Calculer la probabilité des évènements : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap \bar{C}$.

EXERCICE 6

Les résultats d'une enquête sur l'audience de deux magazines A et B, sont les suivants :

3 % de la population lit les deux magazines. Le magazine A est lu par 12 % de la population tandis que le magazine B est lu par 7 % de la population.

On interroge une personne de cette population au hasard.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise pas le magazine A.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise aucun des deux magazines.

EXERCICE 7

Deux maladies A et B affectent les animaux d'un pays.

On estime que 12% des animaux sont atteints de la maladie A, 8% des animaux sont atteints de la maladie B et 3% des animaux sont atteints des deux maladies.

On prend un animal de ce pays au hasard.

1. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint seulement de la maladie A.
2. Calculer la probabilité que cet animal ne soit pas malade.

EXERCICE 8

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b .

On prélève un article au hasard et on note, A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » et B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b ».

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0,05$; $p(B) = 0,06$.

1. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

EXERCICE 9

On considère un alphabet soit formé des trois lettres A , B et C .

1. Avec cet alphabet on écrit un mot de deux lettres. Quelle est la probabilité que ce mot soit écrit avec deux lettres différentes ?
2. Quelle est la probabilité d'écrire un mot de trois lettres différentes ?

EXERCICE 10

On lance trois fois de suite un dé équilibré et on forme un nombre avec les résultats obtenus : par exemple, si on tire 4,3 et 3 on obtient : 433.

1. Combien de nombres différents peut-on obtenir ? Quelle est la probabilité d'obtenir 433 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé de trois chiffres tous différents ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre composé seulement des chiffres 1 ou 2 ?