I POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 – DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.
— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)
— La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 – FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.

Or pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{8}$

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Étudions le cas où $a < 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2. Étudions le cas où $a > 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

EXEMPLE

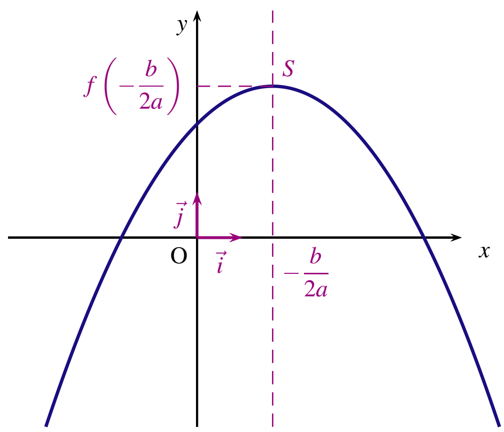
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$	$\searrow$

III COURBE REPRÉSENTATIVE

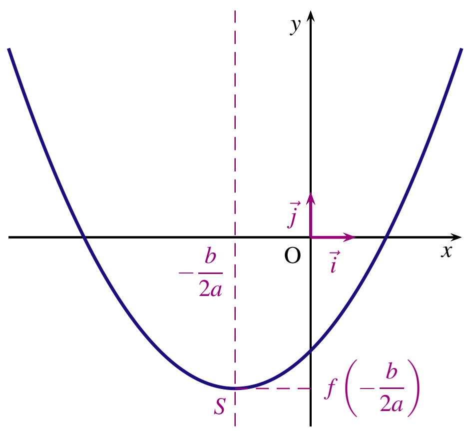
Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y=ax^2+bx+c$
Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$

$\boxed{a<0}$



La parabole est tournée vers le bas

$\boxed{a>0}$



La parabole est tournée vers le haut

SYMÉTRIE DE LA PARABOLE

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=2x^2-6x-5$ où a, b et c sont trois réels.
Déterminons deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant la même ordonnée.
Cherchons les solutions de l'équation $f(x)=-5$

$$\begin{aligned}2x^2-6x-5=-5 &\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\\ &\Leftrightarrow 2x(x-3)=0\end{aligned}$$

Soit $x=0$ ou $x=3$. Par conséquent, le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha=\dfrac{0+3}{2}=1{,}5$

IV ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

1 – RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2-x-2=0$.
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
3x^2-x-2=0 &\Leftrightarrow 3\times\left[x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}-\frac{2}{3}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left[\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\right]=0\\
&\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)=0 \quad \text{ou} \quad (x-1)=0
\end{aligned}$$

   L'équation admet deux solutions $x_1=-\dfrac{2}{3}$ ou $x_2=1$. $S=\left\{-\dfrac{2}{3};1\right\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2+3x-2=0$.
   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
-2x^2+3x-4=0 &\Leftrightarrow -2\times\left[x^2-\frac{3}{2}x+1\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+1\right]=0\\
&\Leftrightarrow -2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{36}\right]=0
\end{aligned}$$

   Or pour tout réel x, $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{36}\geqslant\dfrac{7}{36}$ donc l'équation n'a pas de solutions. $S=\varnothing$

2 – RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$.

   Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}-\frac{x^2}{4}-x+3&=-\frac{1}{4}\times\left[x^2+4x-12\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-4-12\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2)^2-16\right]\\&=-\frac{1}{4}\left[(x+2+4)(x+2-4)\right]\\&=-\frac{1}{4}(x+6)(x-2)\end{aligned}$$

   Étudions le signe du produit $-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-\dfrac{1}{4}$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-\dfrac{1}{4}(x+6)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble S des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$ est $S=\left]-\infty;-6\right]\cup\left[2;+\infty\right[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{x^2}{2}-x+1\geqslant 0$

   Pour tout réel x,

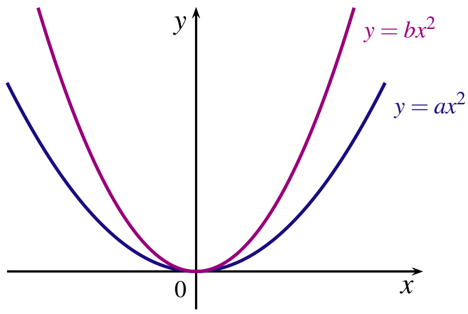
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2}-x+1&=\frac{1}{2}\times\left[x^2-2x+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2-1+2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]\end{aligned}$$

   Or pour tout réel x, $(x-1)^2+1\geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{2}\left[(x-1)^2+1\right]\geqslant\dfrac{1}{2}$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{x^2}{2}-x+1\geqslant 0$ est $S=\mathbb{R}$

EXERCICE 1

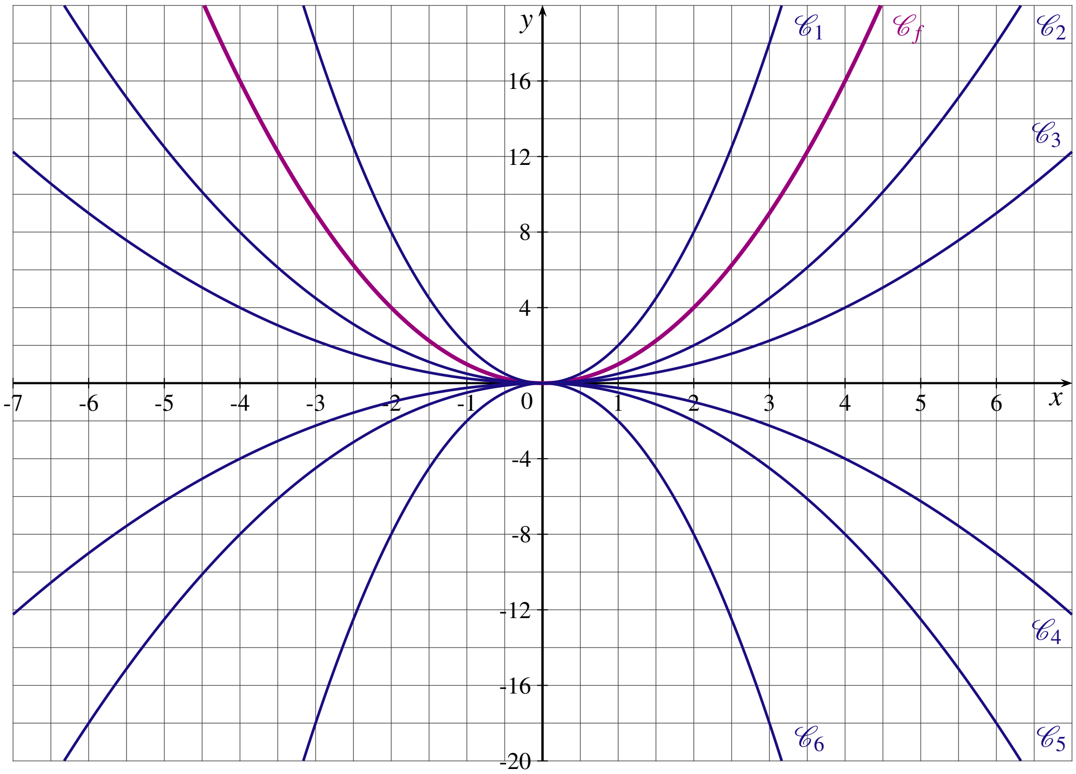
On a tracé ci-contre, les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = ax^2$ et $g(x) = bx^2$ où a et b sont deux réels.
Laquelle des quatre propositions suivantes est exacte ?

1. $a > 0$, $b > 0$, $a > b$;
2. $a < 0$, $b < 0$, $a > b$;
3. $a > 0$, $b > 0$, $a < b$;
4. $a < 0$, $b < 0$, $a < b$.



EXERCICE 2

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction carré f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$, dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Les paraboles $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_6$, ont une équation de la forme $y = ax^2$, où a est un réel.



1. Quelle est la courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$?
2. Quelle est la courbe représentative de la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 2x^2$?
3. Déterminer une expression, en fonction de x, de la fonction u dont la courbe représentative est $\mathscr{C}_5$.

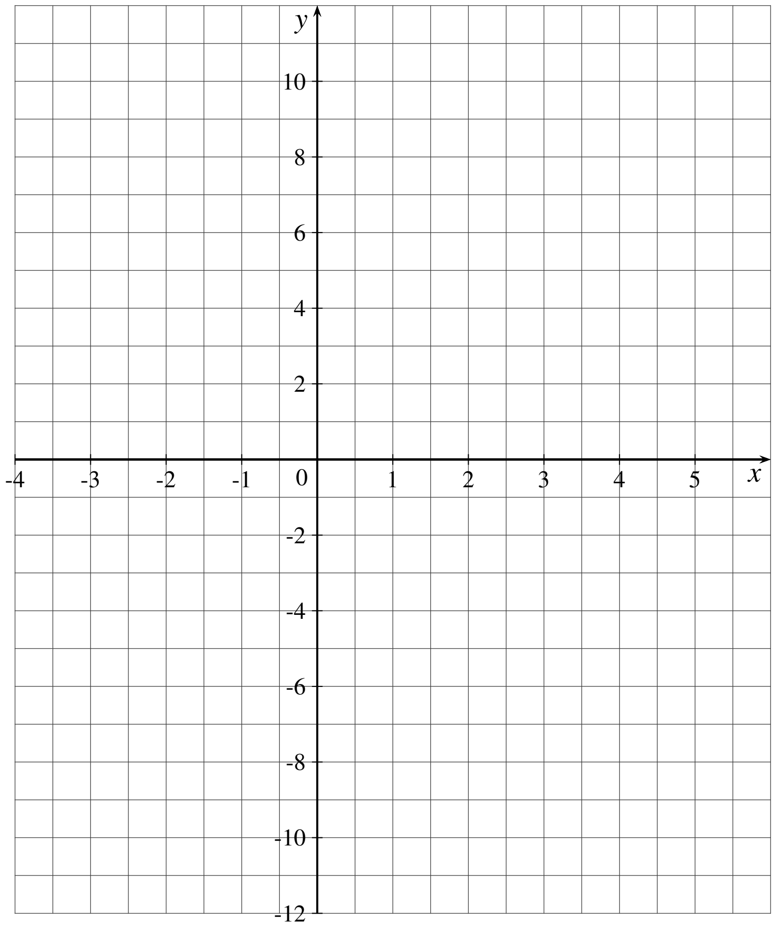
EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = -2x^2 + 5x + 7$.

1. Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$								

2. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



3. Par lecture graphique :
   a) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
   b) Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 4$?
   c) Quels sont les antécédents de -5 et de 7 ?

EXERCICE 4

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

1. Parmi les fonctions polynômes du second degré ci-dessous, quelles sont celles qui ont le même tableau de variation que la fonction f ? le même tableau de variation que la fonction g ?
   $A(x) = x^2 + 3x - 2$; $B(x) = -x^2 + 6x - 11$; $C(x) = x^2 - 6x + 7$; $D(x) = -x^2 - 4x + 13$;
   $E(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + x$; $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}$; $G(x) = x^2 - 4x + 2$; $H(x) = -3x^2 + 12x - 11$.
2. Déterminer deux fonctions polynômes du second degré ayant respectivement le même tableau de variation que les fonctions f et g.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	5
$f(x)$	8	2	-2	-4	-4	8

1. L'affirmation « le minimum de la fonction f est égal à -4 » est-elle vraie ?
2. Quel est l'image de 3 ?
3. Résoudre l'équation $f(x) = 2$?

EXERCICE 6

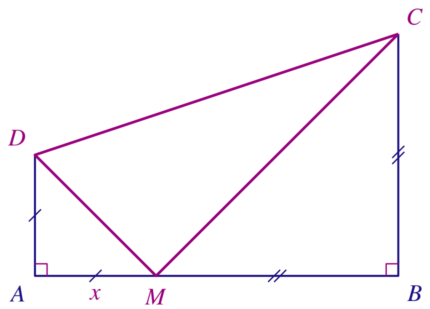
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	8	0	-6	-10	-12	-10

1. Pour quelle valeur du réel x le minimum de la fonction f est-il atteint ?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$?
3. Déterminer le minimum de la fonction f.

EXERCICE 7

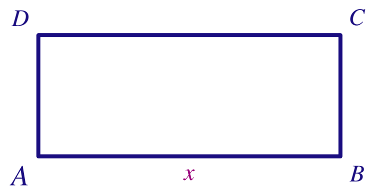
Sur la figure ci-contre, $AB = 6$, M est un point du segment $[AB]$ différent de A et B et les triangles AMD et MBC sont rectangles isocèles.
On cherche à déterminer la distance AM telle que l'aire du triangle MCD soit maximale.
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle MCD



1. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMD et MBC. En déduire que $f(x) = -x^2 + 6x$
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. En déduire la valeur de x telle que l'aire du triangle MCD soit maximale. Quel est alors l'aire maximale du du triangle MCD ?

EXERCICE 8

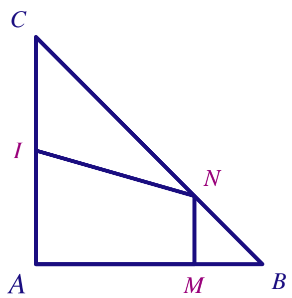
$ABCD$ est un rectangle de périmètre 32.
Quelle est l'aire maximale du rectangle $ABCD$?



EXERCICE 9

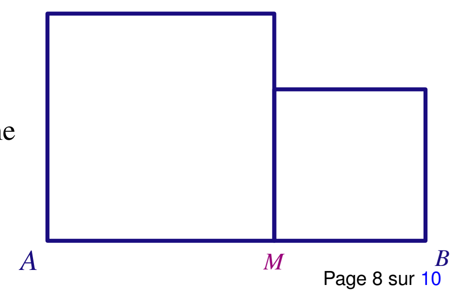
ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $AB = 10$. I est le milieu du segment $[AC]$.

Où faut-il placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du trapèze $AMNI$ soit maximale ?



EXERCICE 10

M est un point du segment $[AB]$ de longueur 12.
À quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que la somme des aires des carrés de côtés respectifs $[AM]$ et $[MB]$ soit minimale ?



EXERCICE 11

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $x^2 = x + 1$.

   b) $x^2 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$

   c) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$

   d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6} = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

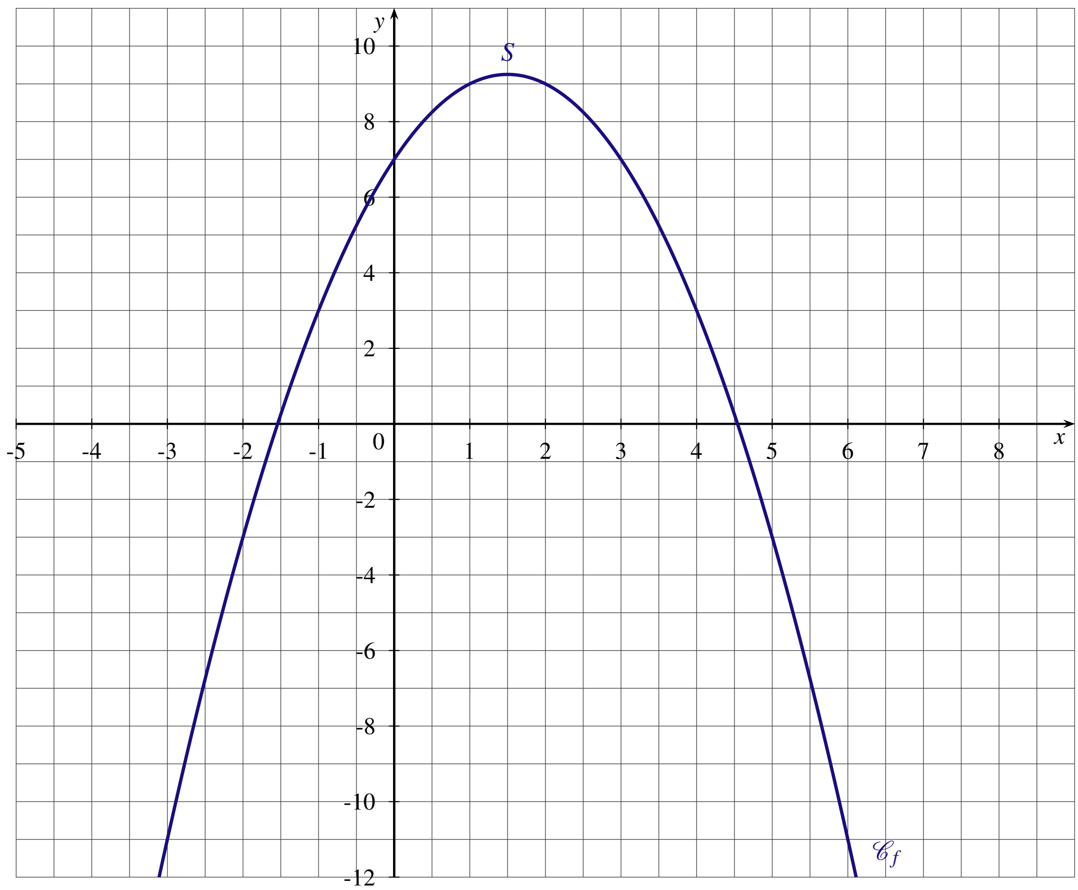
   b) $-2x^2 + 3x \leqslant 5$

   c) $3x^2 + 3x \geqslant \dfrac{9}{4}$

   d) $x - 1 \geqslant \dfrac{x^2}{3}$

EXERCICE 12

La parabole $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 7$.



1. Dessiner l'axe de symétrie de la parabole $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer les coordonnées du point S sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -3$.
4. Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 2x - 5$.
   a) Tracer la droite D représentative de la fonction g.
   b) Par lecture graphique, en déduire les solutions de l'équation $-x^2 + x + 12 = 0$
5. a) Avec la précision permise par le graphique, quelles semblent être les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
   b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   c) Que peut-on conclure ?
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 13

f est une fonction polynôme du second degré telle que sa courbe représentative est une parabole de sommet $S\left(\frac{3}{2};-\frac{25}{4}\right)$ passant par le point $A(1;-6)$.

1. Donner le tableau des variations de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. La courbe représentative de la fonction f, notée C_f, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. a) Le point $A(-1;5)$ appartient-il à la courbe C_f ?
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
   c) La proposition « Si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ » est-elle vraie ou fausse ?
2. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = 8$ et $g(3) = -4$.
   a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D représentative de la fonction g dans le repère orthogonal donné ci-dessous.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2 \times \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   c) En déduire les positions relatives de la parabole C_f et de la droite D.