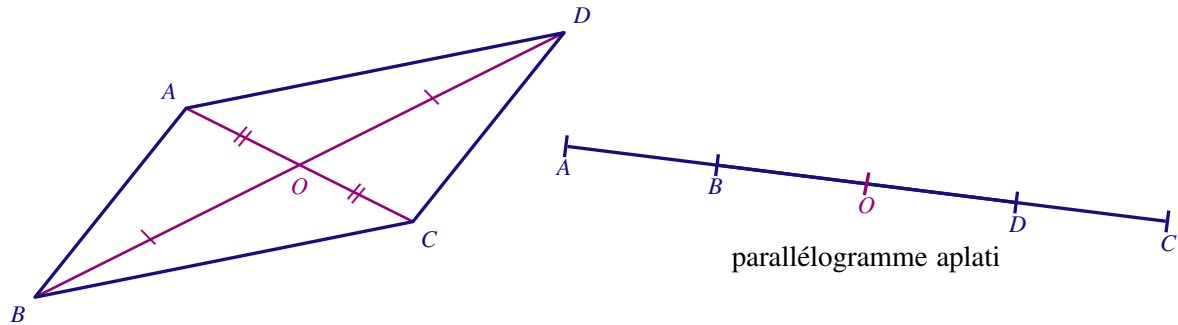


I NOTION DE VECTEUR

1 – PARALLÉLOGRAMME

DÉFINITION

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si ses diagonales ont le même milieu

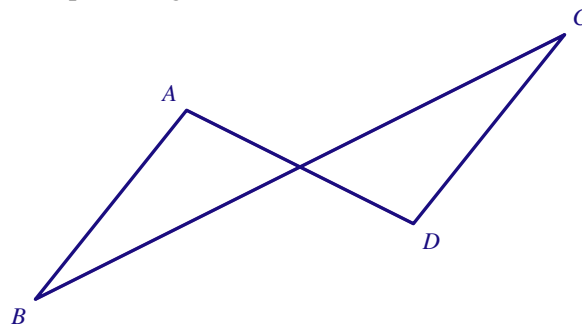


PROPRIÉTÉS

- Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.
- Dans un parallélogramme les côtés opposés ont la même longueur.

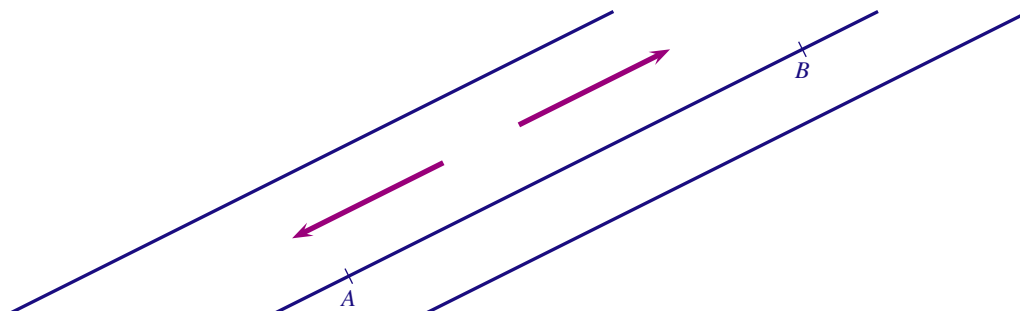
REMARQUE

Dire que dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ne suffit pas pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.



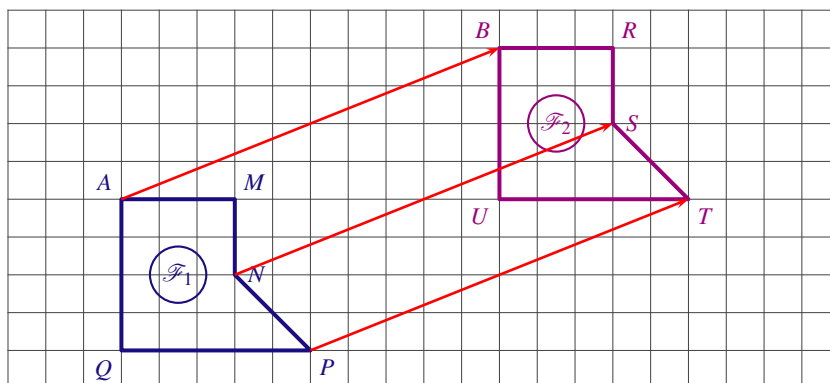
Dans le quadrilatère $ABCD$ nous avons $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$, pourtant $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

2 – SENS ET DIRECTION



- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même direction.
- Une direction étant indiquée par la donnée d'une droite (AB) , il y a deux sens de parcours dans cette direction : soit de A vers B , soit de B vers A .

3 – TRANSLATION



Le glissement qui permet d'obtenir la figure \mathcal{F}_2 à partir de la figure \mathcal{F}_1 peut être décrit de façon précise par trois caractères :

- la *direction* du glissement est donnée par la droite (AB) ;
- le *sens* du glissement est celui de A vers B ;
- la *distance* du glissement est égale à la longueur du segment $[AB]$.

On dit que la figure \mathcal{F}_2 est l'image de la figure \mathcal{F}_1 par la translation de vecteur \vec{AB} .

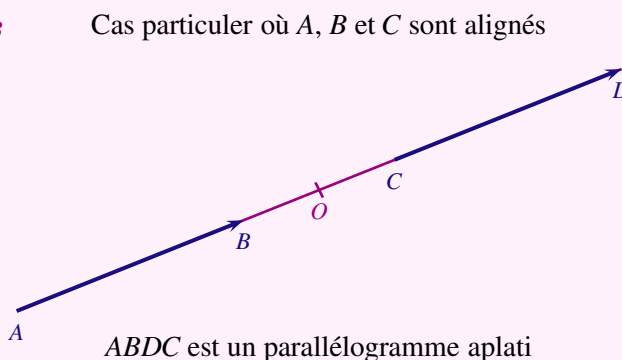
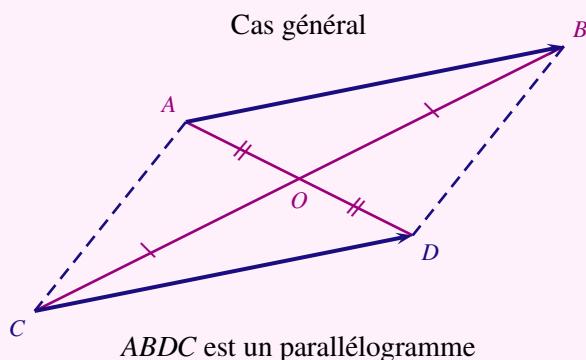
REMARQUE

Les vecteurs \vec{NS} et \vec{PT} sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur \vec{AB} , on dit qu'ils sont égaux. On note alors :

$$\vec{AB} = \vec{NS} = \vec{PT}$$

DÉFINITION

Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.
Cette translation est la translation de vecteur \vec{AB} .



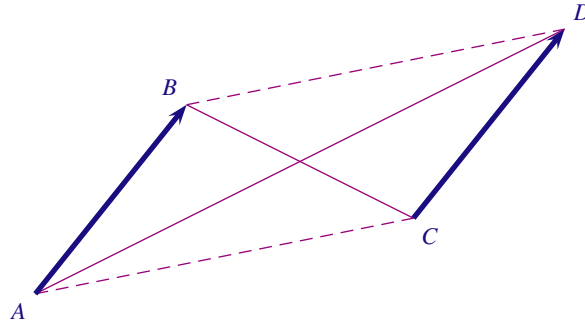
II VECTEURS

Un couple (A,B) du plan détermine un vecteur. A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note \vec{AB}

1 – ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation

DÉFINITION

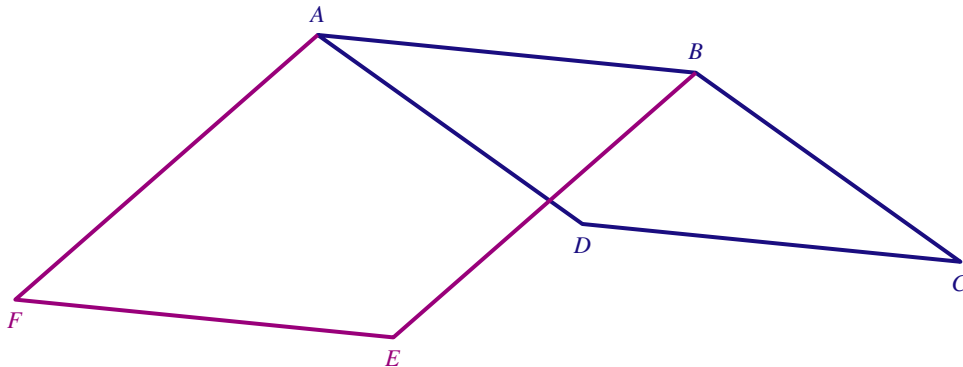


A, B, C et D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, D est l'image du point C par la translation de vecteur \vec{AB} .
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

EXEMPLE : LES TROIS PARALLÉLOGRAMMES

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



— $ABCD$ est un parallélogramme alors, $\vec{AB} = \vec{DC}$.

— $ABEF$ est un parallélogramme alors, $\vec{AB} = \vec{FE}$.

Par conséquent, $\vec{DC} = \vec{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

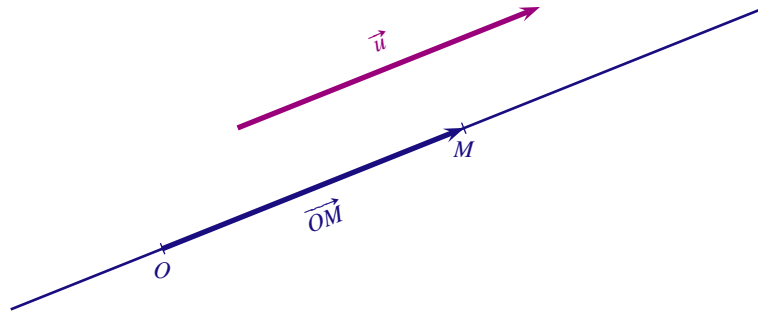
2 – REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

Devant des égalités du type $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{FE} = \dots$, on dit que les vecteurs $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{FE}, \dots$ sont des représentants du vecteur \vec{u} :

$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{FE} = \dots$$

Le vecteur $\vec{AA} = \vec{BB} = \dots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \vec{OM}$.



Si \vec{u} n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur \vec{u} est caractérisé par :

- Sa direction : c'est celle de la droite (OM) .
- Son sens : c'est le sens de O vers M .
- Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM .

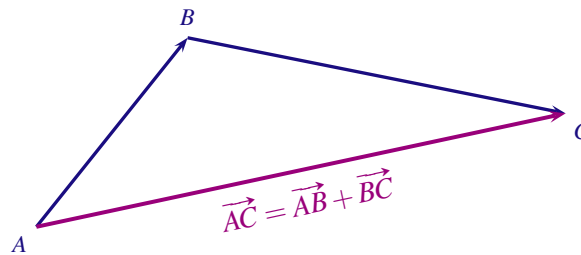
III ADDITION VECTORIELLE

1 – SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C .

Si on applique la translation de vecteur \vec{AB} suivie de la translation de vecteur \vec{BC} , on obtient la translation de vecteur \vec{AC} .

Le vecteur \vec{AC} est la somme des vecteurs \vec{AB} et \vec{BC}



RELATION DE CHASLES

Quels que soient les points A, B et C on a :

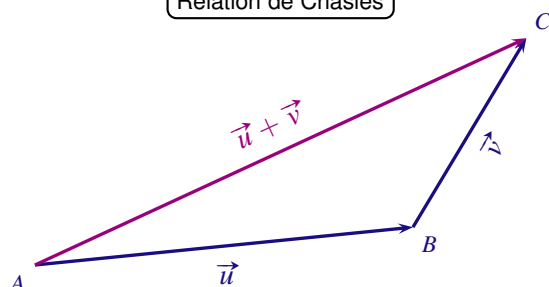
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

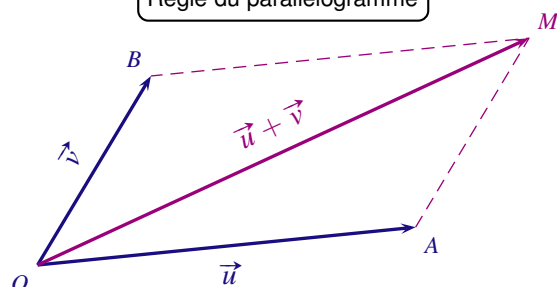
La somme $\vec{OA} + \vec{OB}$ est le vecteur \vec{OM} tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS

Relation de Chasles



Règle du parallélogramme



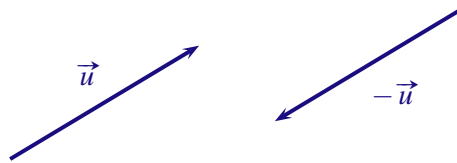
PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w}
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

2 – DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur \vec{u} est le vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.



CONSÉQUENCE

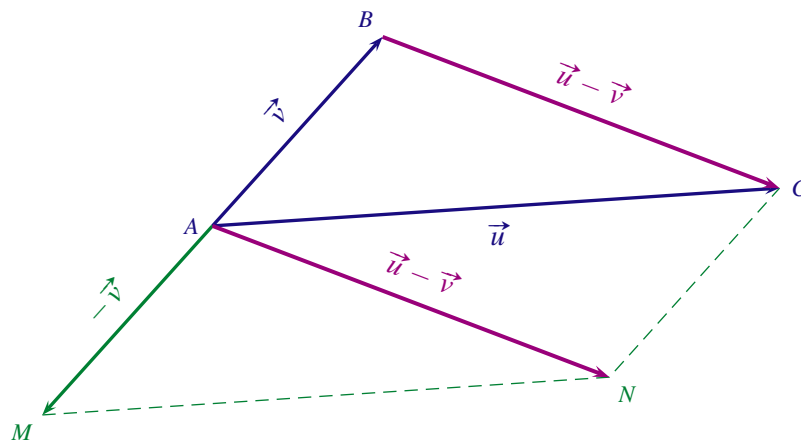
L'opposé du vecteur \vec{AB} est le vecteur \vec{BA} : $-\vec{AB} = \vec{BA}$

* PREUVE

D'après la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$

DÉFINITION

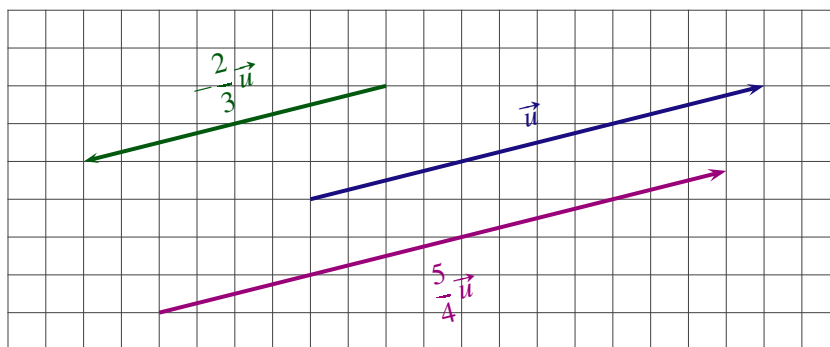
Étant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} la différence $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.



Quels que soient les points A, B et C , $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

IV MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 – PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k

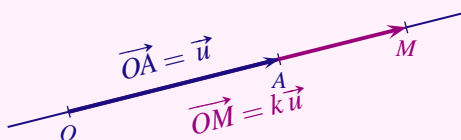


DÉFINITION

Soit \vec{u} un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k , noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

- sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur \vec{u} ;

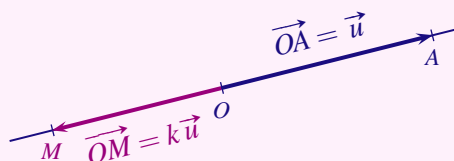
Cas où $k > 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur \vec{u} ;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur \vec{u} par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur \vec{u} ;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur \vec{u} par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :

« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur \vec{u} par la valeur absolue du réel k »

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, on convient que $k\vec{u} = \vec{0}$: ainsi, l'égalité $k\vec{u} = \vec{0}$ ne peut se produire que lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$.

REMARQUE

Soit A et B deux points distincts, et k un réel donné. Il existe un unique point M défini par la relation $\vec{AM} = k\vec{AB}$:

- M est un point de la droite (AB)
- M a pour abscisse k dans le repère $(A;B)$ d'origine A



2 – PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous réels k et k' :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}; \quad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}; \quad k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

3 – VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

- Comme $\vec{0} = 0\vec{u}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 – APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

MILIEU D'UN SEGMENT

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

- 1) $\vec{AI} = \vec{IB}$ ou
- 2) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ou
- 3) $\vec{AB} = 2\vec{AI}$.
- 4) Pour tout point M du plan $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

* DÉMONSTRATION

1. L'égalité $\vec{AI} = \vec{IB}$ caractérise le milieu I du segment $[AB]$ (conséquence de la définition de l'égalité de deux vecteurs).
2. I milieu du segment $[AB] \iff \vec{AI} = \vec{IB} \iff \vec{IA} = -\vec{IB} \iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$
3. I milieu du segment $[AB] \iff \vec{AI} = \vec{IB} \iff 2\vec{AI} = \vec{AI} + \vec{IB} \iff 2\vec{AI} = \vec{AB}$
4. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors pour tout point M

$$\vec{MA} + \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) = 2\vec{MI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{=\vec{0}} = 2\vec{MI}$$

Réciproquement, la propriété $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ étant vraie pour tout point M on peut l'appliquer au point I .
Soit :

$$\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{II} = \vec{0}$$

Ce qui prouve que I est le milieu du segment $[AB]$

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ alors $\vec{BC} = 2\vec{IJ}$

* DÉMONSTRATION

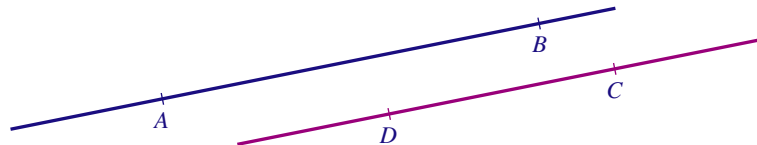
$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = 2\vec{IA} + 2\vec{AJ} = 2(\vec{IA} + \vec{AJ}) = 2\vec{IJ}$$

PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.
- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

* DÉMONSTRATION

- Si $(AB) \parallel (CD)$ alors, les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} ont la même direction donc ils sont colinéaires.



- Réciproquement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires alors, ils ont la même direction donc $(AB) \parallel (CD)$
- \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires signifie donc $(AB) \parallel (AC)$. Deux droites parallèles ayant un point commun sont confondues.

EXEMPLES

EXEMPLE 1 : CONSTRUCTION DE POINTS

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

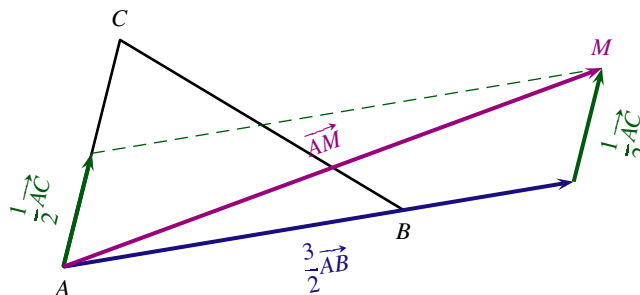
$$\underbrace{\vec{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Soit trois points non alignés A, B et C . Construire le point M défini par $\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{AC}$

- Choisissons par exemple A comme « origine connue »

$$\begin{aligned} \vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{AC} &\iff \vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{AC} \\ &\iff \vec{MA} - 3\vec{MA} - 3\vec{AB} = \vec{AC} \\ &\iff -2\vec{MA} = 3\vec{AB} + \vec{AC} \\ &\iff \vec{MA} = -\frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &\iff \vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned}$$

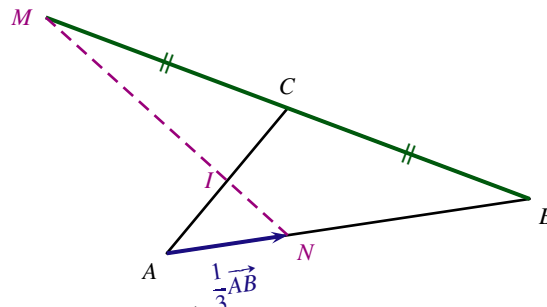
- Nous pouvons construire le point M :



EXEMPLE 2 : PARALLÉLISME, ALIGNEMENT

Montrer que des points sont alignés, ou sont sur des droites parallèles, revient à montrer que des vecteurs sont colinéaires.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$, M est le symétrique de B par rapport à C et le point N est tel que $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Les points M, I et N sont-ils alignés ?



— I est le milieu du segment $[AC]$ donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

— M est le symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu du segment $[BM]$ d'où $\vec{MC} = \vec{CB}$.

Exprimons les vecteurs \vec{MI} et \vec{IN} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} :

$$\vec{MI} = \vec{MC} + \vec{CI} = \vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{CA} + \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{IN} = \vec{IA} + \vec{AN} = -\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}$$

Ainsi, $\vec{MI} = \vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}$ et $\vec{IN} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$ d'où $\vec{MI} = 3\vec{IN}$.

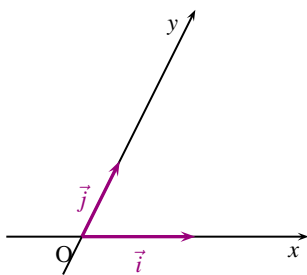
Par conséquent, les vecteurs \vec{MI} et \vec{IN} sont colinéaires donc les points M, I et N sont alignés.

V COORDONNÉES

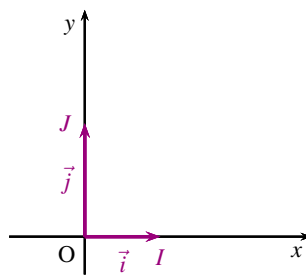
1 – REPÈRE DU PLAN

On appelle base tout couple (\vec{i}, \vec{j}) de vecteurs non colinéaires.

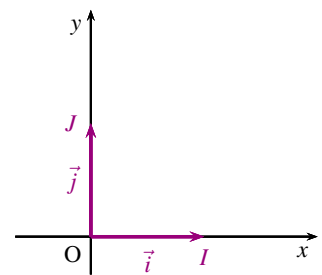
Un repère du plan est un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et (\vec{i}, \vec{j}) une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal
 $(OI) \perp (OJ)$



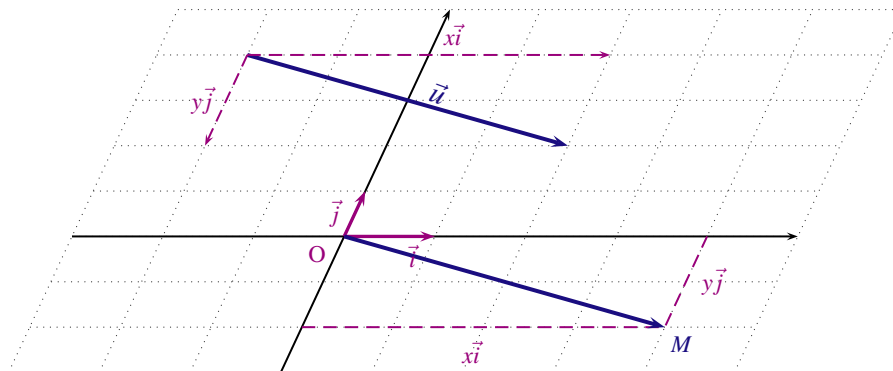
Repère orthonormé
 $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

2 – COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit \vec{u} un vecteur.

On appelle coordonnées du vecteur \vec{u} les coordonnées du point $M(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

On note indifféremment $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



- $(x; y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

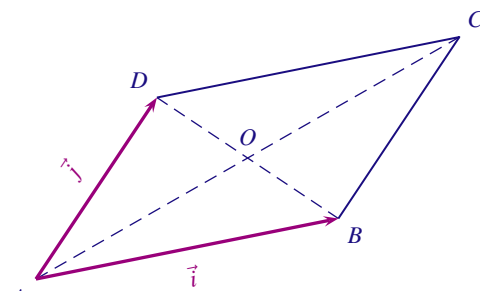
REMARQUE

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

EXEMPLE

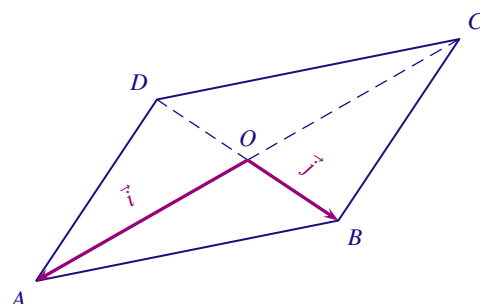
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

- Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:



$A(0;0), B(1;0), C(1;1), D(0;1), \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:



$A(1;0), B(0;1), C(-1;0), D(0;-1), \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

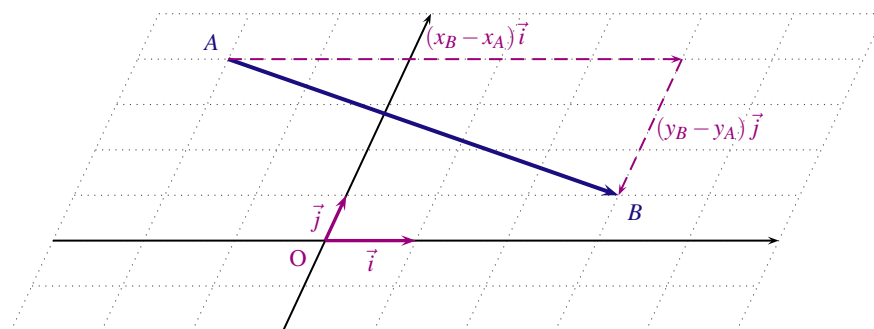
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs :

- $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- pour tout réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

3 – COORDONNÉES DU VECTEUR \vec{AB}

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du vecteur \vec{AB} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



* DÉMONSTRATION

D'après la relation de Chasles $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

4 – COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du milieu $I(x_I; y_I)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

* DÉMONSTRATION

I est le milieu du segment $[AB]$ d'où $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB}$ soit $\vec{OI} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$

5 – CONDITION DE COLINÉARITÉ

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$xy' - x'y = 0$$

* DÉMONSTRATION

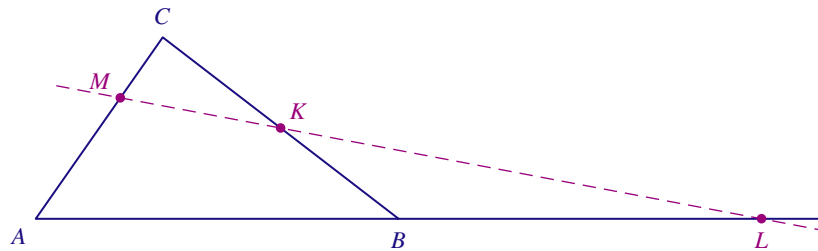
— Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, les vecteurs sont colinéaires et la relation $xy' - x'y = 0$ est vérifiée car $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.

— Dans le cas où les deux vecteurs sont non nuls, dire que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Soit $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$.

EXEMPLE

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, K est le milieu de $[BC]$, L est le symétrique du point A par rapport à B .

Déterminer la position du point M sur la droite (AC) pour que les points K, L et M soient alignés.



Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ nous avons $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

— Les coordonnées du point K milieu du segment $[BC]$ sont $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

— L est le symétrique du point A par rapport à B donc $\vec{AL} = 2\vec{AB}$. Les coordonnées du point L sont $L(2;0)$.

— M est un point de la droite (AC) donc $\vec{AM} = y\vec{AC}$ d'où M a pour coordonnées $M(0;y)$.

Les points K, L et M sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{LK} et \vec{LM} sont colinéaires.

Calculons les coordonnées des vecteurs \vec{LK} et \vec{LM} :

$$\vec{LK} \begin{pmatrix} x_K - x_L \\ y_K - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{LK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} \iff \vec{LK} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{LM} \begin{pmatrix} x_M - x_L \\ y_M - y_L \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{LM} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ y - 0 \end{pmatrix} \iff \vec{LM} \begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

Les vecteurs \vec{LK} et \vec{LM} sont colinéaires pour y solution de l'équation :

$$-\frac{3}{2} \times y - (-2) \times \frac{1}{2} = 0 \iff -\frac{3}{2} \times y = -1 \iff y = \frac{2}{3}$$

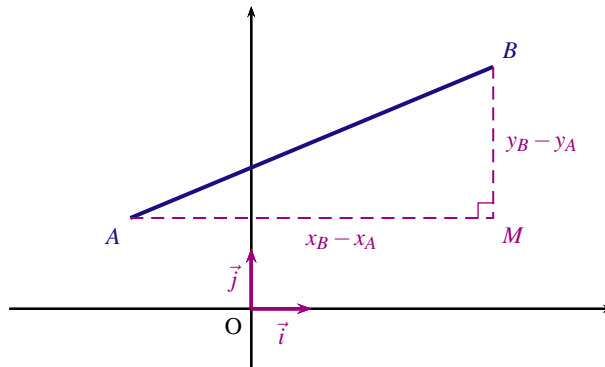
Ainsi, M est le point de la droite (AC) tel que $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

6 – DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la distance AB est donné par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

* DÉMONSTRATION



Comme $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, le triangle AMB est un triangle rectangle en M .
D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2 + MB^2 \\ \text{Soit } AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ \text{d'où } AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

EXEMPLE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-1; -2)$, $B(2; 2)$ et $C(-2; 5)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC :

$$— AB = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

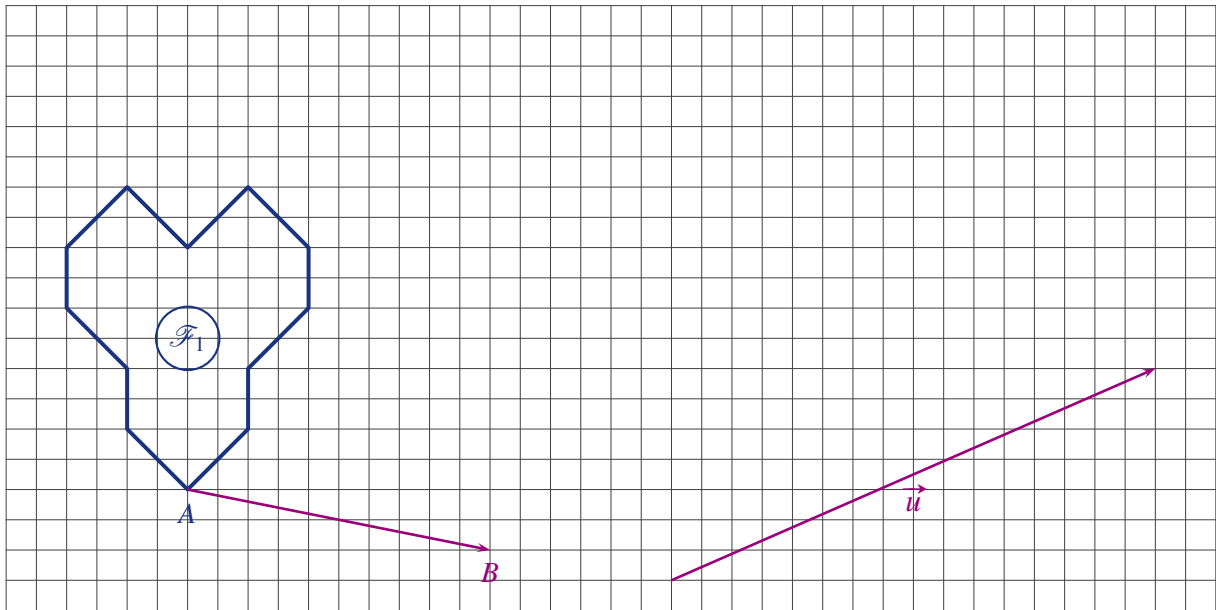
$$— AC = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$— BC = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Nous avons $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

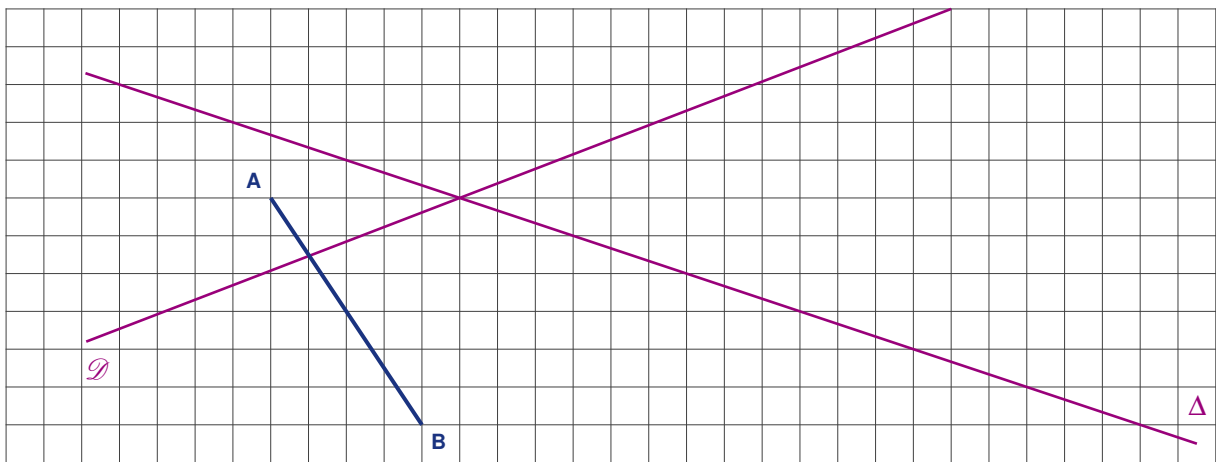
En outre $AB = BC$ donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B .

EXERCICE 1



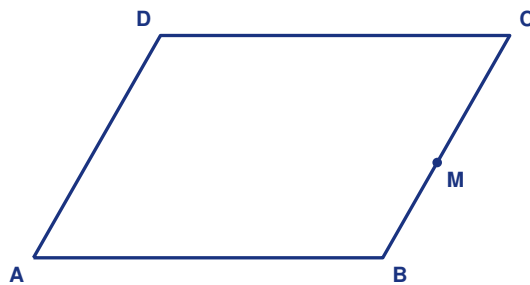
1. Tracer la figure \mathcal{F}_2 image de la figure \mathcal{F}_1 par la translation de vecteur \vec{AB} .
2. Tracer la figure \mathcal{F}_3 image de la figure \mathcal{F}_2 par la translation de vecteur \vec{u} .

EXERCICE 2



Construire un point E sur la droite Δ et un point F sur la droite \mathcal{D} de façon que $ABEF$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 3

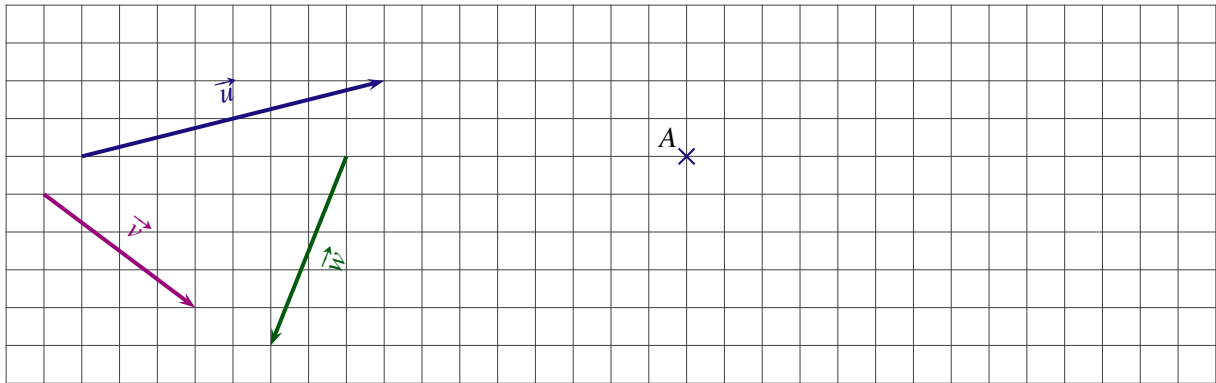


$ABCD$ est un parallélogramme. M est un point du segment $[BC]$.

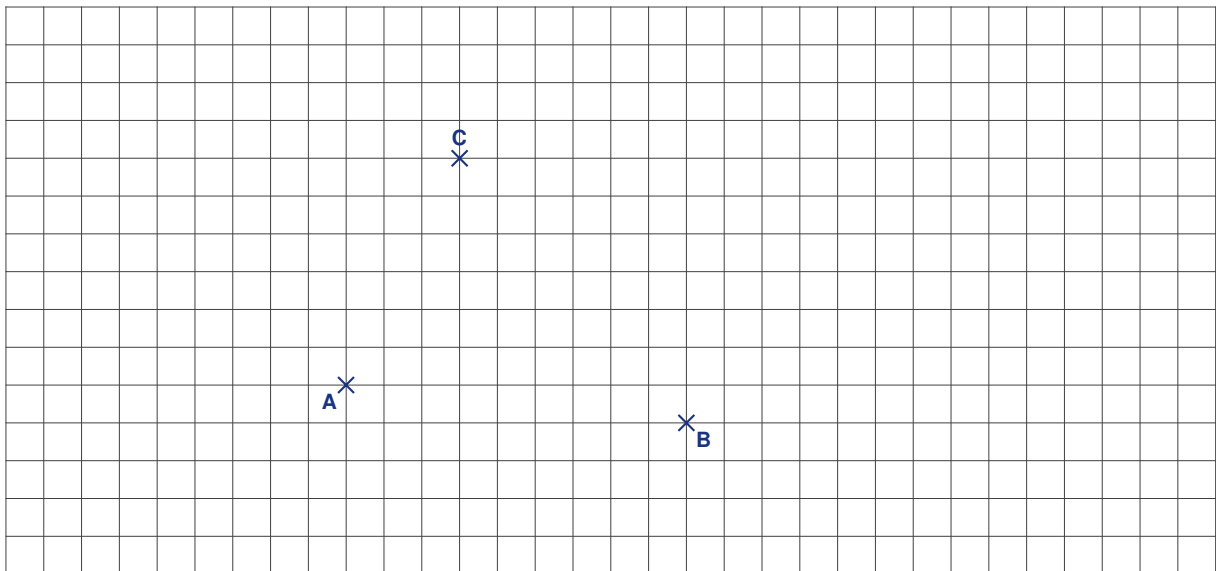
1. Construire le point N tel que le quadrilatère $AMNB$ soit un parallélogramme.
2. Montrer que les segments $[CM]$ et $[DN]$ ont le même milieu.

EXERCICE 4

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$



EXERCICE 5



1. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

EXERCICE 6

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .

1. Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
2. En déduire que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

EXERCICE 7

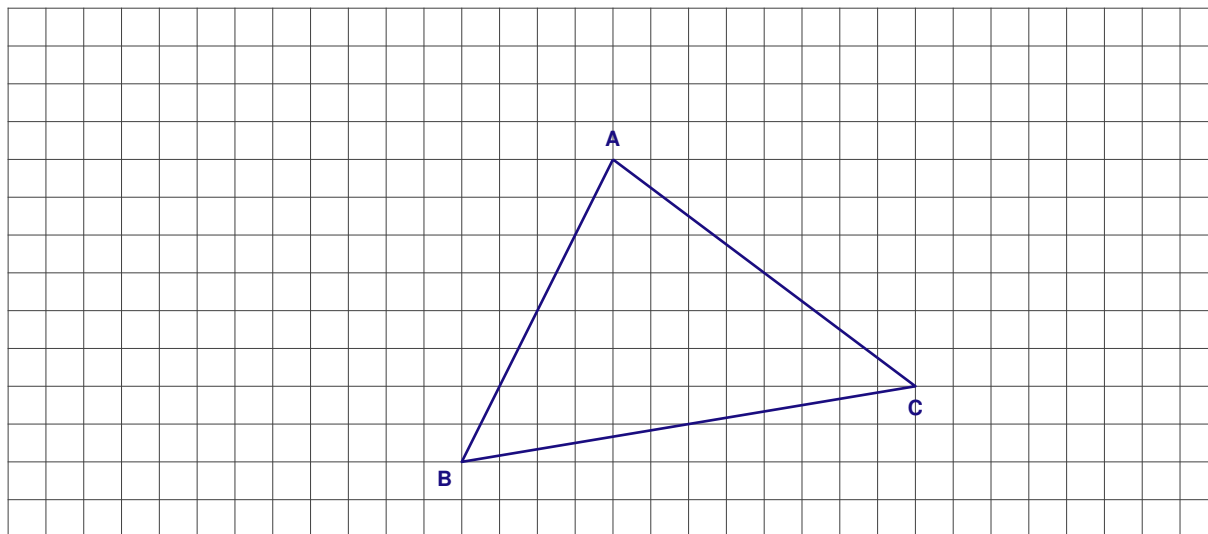
Soit un triangle ABC . Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 8

On considère un triangle ABC .

1. Soit M le point du plan tel que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Exprimer le vecteur \overrightarrow{AM} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Construire le point M dans la figure ci-dessous.
2. Construire le point N tel que $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{CN}$.

3. Les points A , M et N sont-ils alignés ?



EXERCICE 9

Soit un triangle ABC et les milieux I , J , et K des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

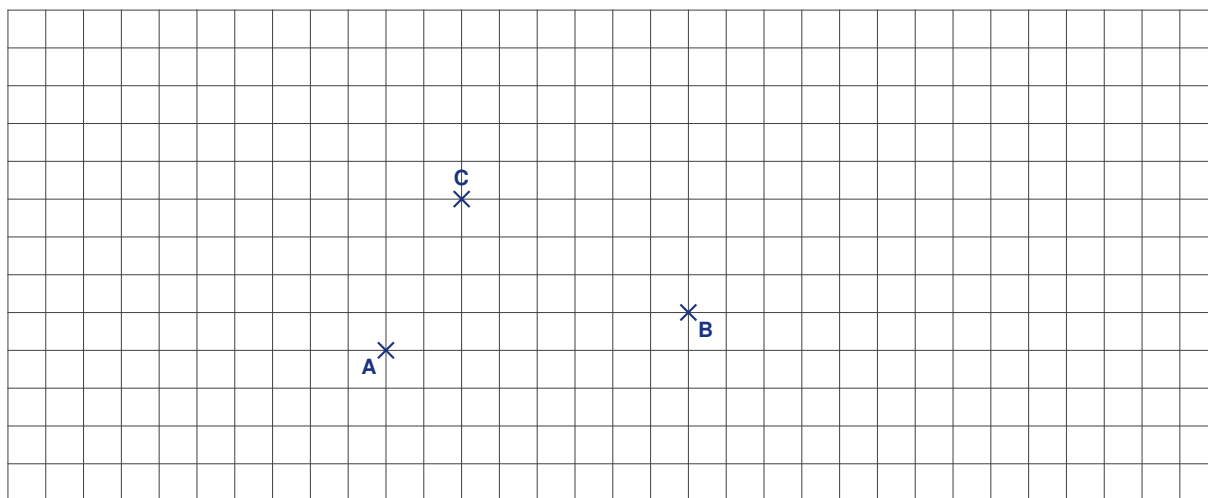
1. Construire les points M et N tels que $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{AC}$ et $\vec{NA} + \vec{NC} = \vec{AB}$.
2. Les droites (MN) et (IJ) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 10

$ABCD$ est un parallélogramme.

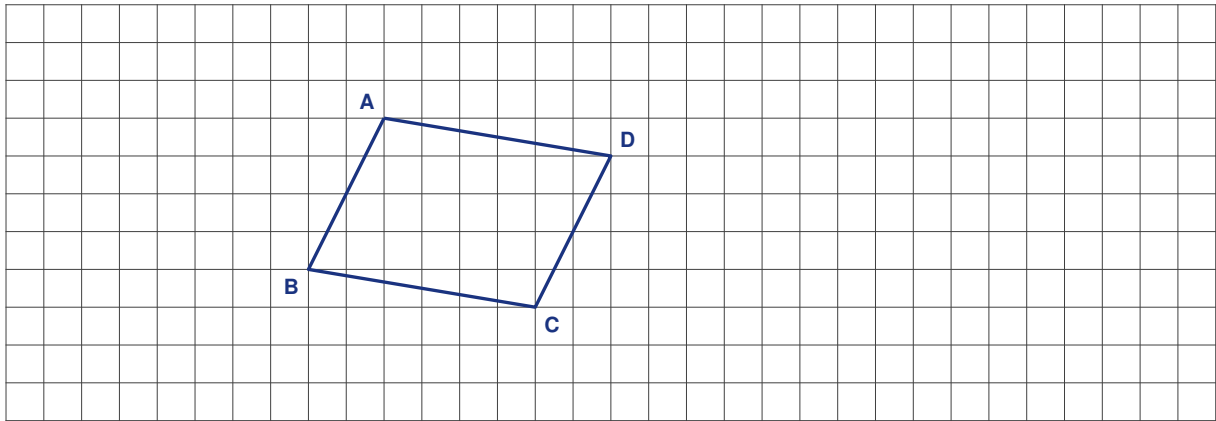
1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\vec{DE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = -\frac{4}{3}\vec{AD}$
2. Exprimer le vecteur \vec{AE} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} .
3. Exprimer le vecteur \vec{BF} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} .
4. Montrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

EXERCICE 11



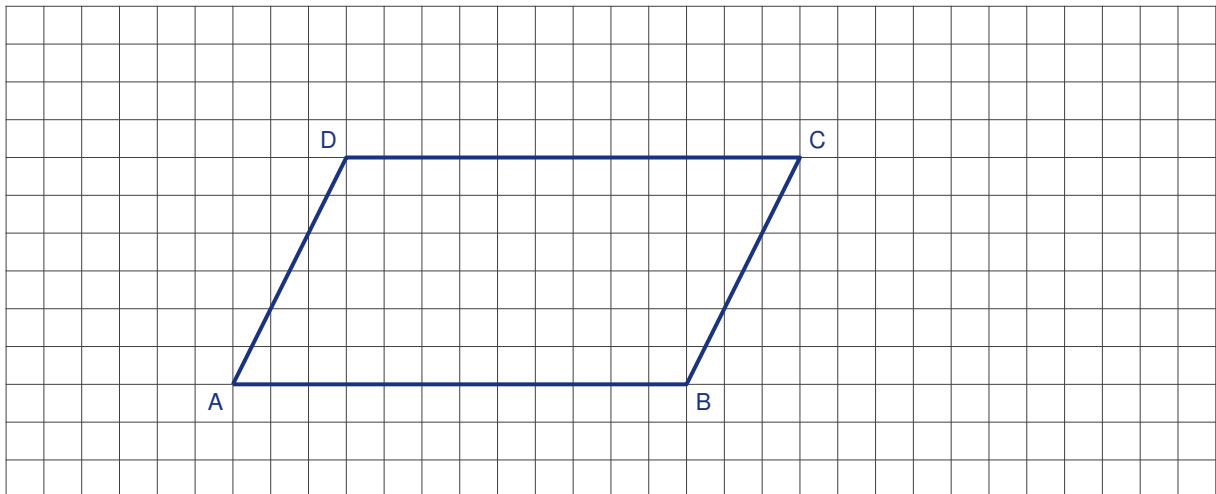
1. Placer les points M , N et P tels que $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AP} = 2\vec{AC} - \vec{AB}$.
2. Exprimer le vecteur \vec{MN} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
3. Montrer que les droites (MN) et (AP) sont parallèles.

EXERCICE 12



1. $ABCD$ est un parallélogramme. Placer les points E et F tels que $\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = 3\vec{AD}$.
2. Exprimer les vecteurs \vec{CE} et \vec{CF} en fonction de \vec{AB} et \vec{AD} . En déduire que les points E , C et F sont alignés.

EXERCICE 13



$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E , F et G tels que : $\vec{AE} = \frac{4}{3}\vec{AB}$, $\vec{FD} = -\frac{1}{3}\vec{AD}$ et $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AD}$.
2. Exprimer le vecteur \vec{EF} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} .
3. Les points E , F et G sont-ils alignés ?

EXERCICE 14

Soit ABC un triangle. On considère les points M et N tels que $\vec{BM} = 2\vec{CA}$ et $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.

Les droites (AM) et (BN) sont-elles parallèles ?

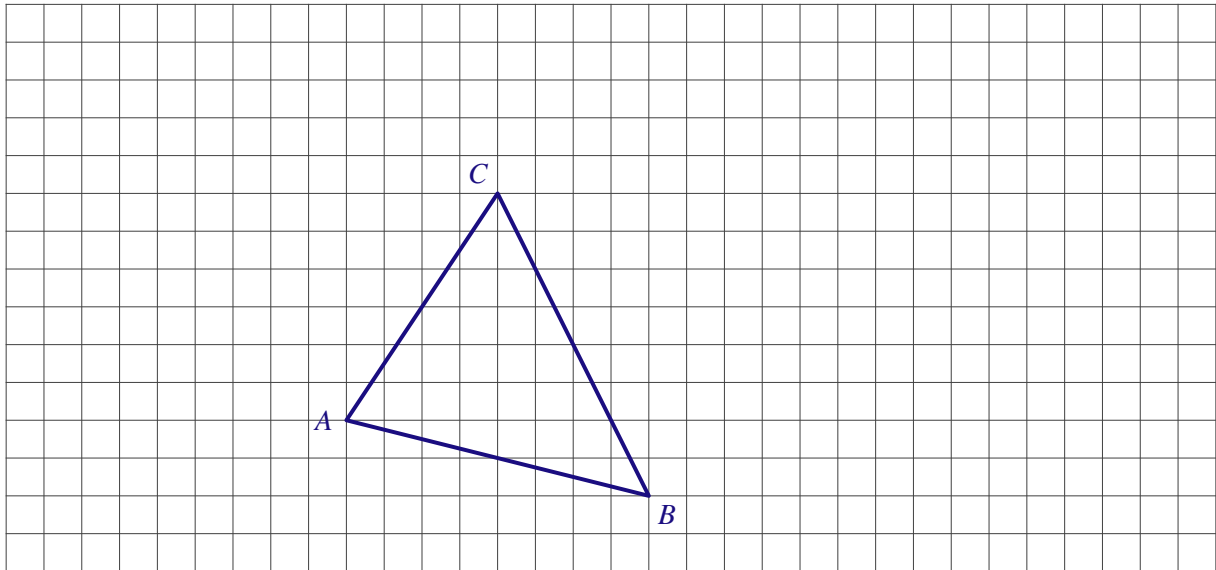
EXERCICE 15

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Placer les points E et F définis par les égalités : $\vec{DE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = -\frac{4}{3}\vec{AD}$
2. Les droites (AE) et (BF) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 16

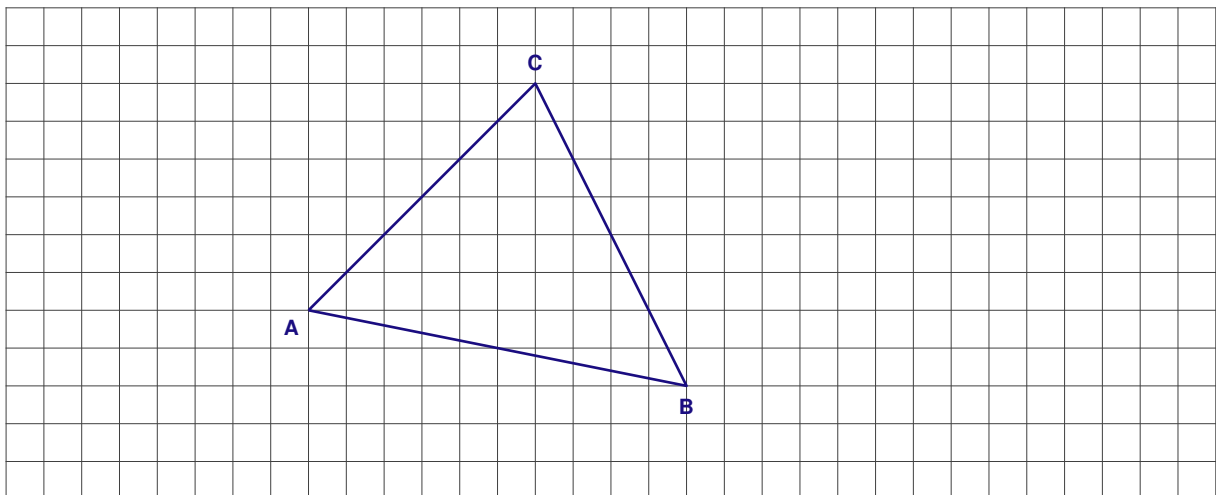
ABC est un triangle.



- Soit M le point défini par $\vec{MA} - 3\vec{MC} = \vec{AB}$.
 - Exprimer le vecteur \vec{AM} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
 - Placer le point M sur la figure.
- Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ on considère le point D de coordonnées $(1; 1)$
 - Placer le point D sur la figure.
 - Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?
- Les droites (BC) et (DM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 17

ABC est un triangle.



- Placer les points I, J et K tels que $\vec{AI} = 2\vec{AB}$, $\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ et K milieu du segment $[BC]$.
- Exprimer les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.
- Les points I, J et K sont-ils alignés ?

EXERCICE 18

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(7; 0)$ et $D(5; 4)$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 19

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-4; -1)$, $B(3; 2)$ et $C(4; -1)$.

1. Les points A , B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\vec{BD} = 2\vec{BA} + \vec{AC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 20

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On considère les points $A(-2; 2)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

1. Les points A , B et C sont-ils alignés ?
2. Déterminer l'ordonnée y du point $D\left(-\frac{1}{3}; y\right)$ tel que les points A , B et D soient alignés.

EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(-1; 1)$, $B(2; 1)$ et $C(-2; 3)$

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{AM} = 2\vec{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point P tel que $\vec{BA} + 2\vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{BP} = \vec{0}$.
3. Les points B , M et P sont-ils alignés ?

EXERCICE 22

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3; 4)$, $B(-2; 1)$ et $C(2; -2)$.

1. Soit G le point du plan tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
 - a) Montrer que $3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.
 - b) En déduire les coordonnées du point G .
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que les vecteurs \vec{AG} et \vec{AI} sont colinéaires.
3. Soit J le milieu de $[AC]$. Les points B , G et J sont-ils alignés ?
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 23

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(4; -2)$, $B(2; 2)$, $C(-4; -1)$ et $D(-2; -5)$.

1. a) Placer le point E tel que le quadrilatère $ABEC$ soit un parallélogramme.
b) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.
b) Les points A , O et M sont-ils alignés ?
3. a) Calculer les distances AC et BD .
b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. Placer les points $A(-4; -3)$, $B(-1; 3)$ et $C(3; 1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par

$$6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$$

- a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
 - b) Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).
 - c) Calculer les coordonnées de M .
5. Les points D , I et M sont-ils alignés? Justifier la réponse.

EXERCICE 25

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A(-5; 1)$, $B(3; -3)$, $C(5; 1)$ et $E(2; 0)$.
2. a) Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AB]$.
b) Les points E , C et M sont-ils alignés?
3. a) Calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .
b) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
4. a) Calculer les distances AC et BD .
b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
5. Placer le point N de coordonnées $(1; 3)$.
Les droites (AN) et (EC) sont-elles parallèles?

EXERCICE 26

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1. Placer les points $A\left(-2; \frac{5}{2}\right)$, $B\left(4; -\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(3; -\frac{5}{2}\right)$.
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.
3. Le vecteur $\vec{u}(2; 4)$ est-il colinéaire au vecteur \overrightarrow{AB} ? au vecteur \overrightarrow{BC} ?
4. Soit $D(-1; y)$ où y est un nombre réel.
 - a) Déterminer y pour que le point D appartienne à la droite (CI) .
Placer le point D dans le repère.
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?
5. Le point B appartient-il au cercle de diamètre $[AC]$?