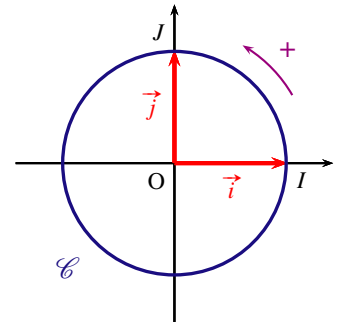


I REPÉRAGE SUR UN CERCLE

1 – CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Le cercle trigonométrique est le cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon 1 orienté dans le sens direct.



2 – ENROULEMENT DE LA DROITE RÉELLE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

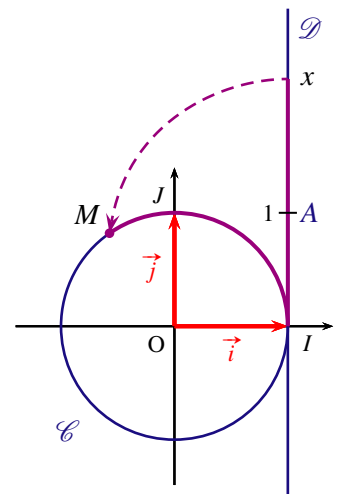
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

La droite \mathcal{D} est tangente en I au cercle trigonométrique \mathcal{C} .

A est le point de coordonnées $(1; 1)$. La droite \mathcal{D} est munie du repère $(I; A)$.

Par enroulement de la droite réelle \mathcal{D} sur le cercle trigonométrique \mathcal{C} :

- à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x ;
- tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x , alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

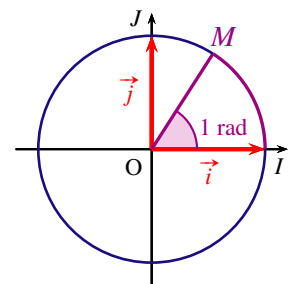


3 – MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION

Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O , de rayon 1.

Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle \mathcal{C} suivant un arc de longueur 1.

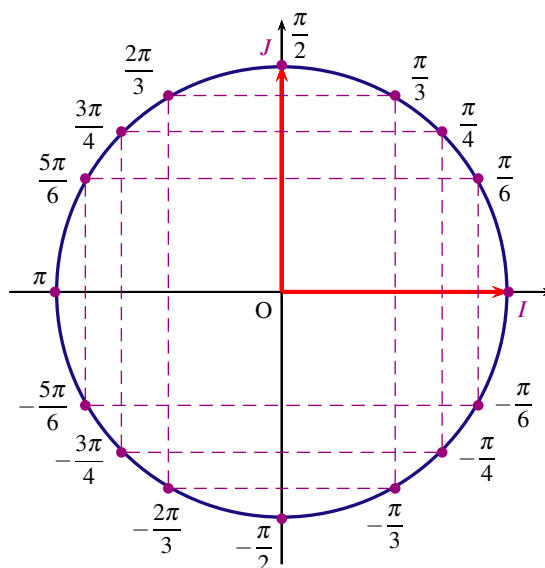


REMARQUE :

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

VALEURS REMARQUABLES

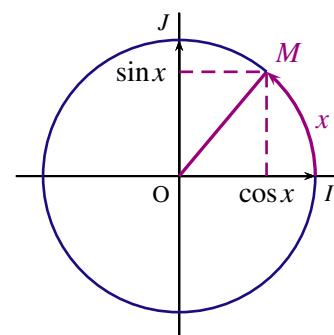


II COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL

1 – DÉFINITION

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x .

- Le cosinus du réel x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M .
- Le sinus du réel x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M .



2 – PROPRIÉTÉS

- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k , $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + \frac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \frac{4}{9}$.

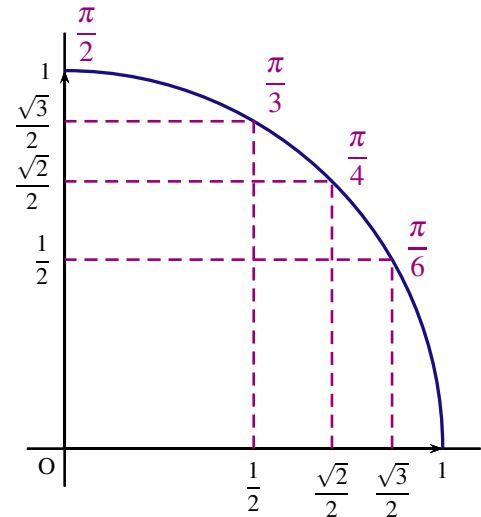
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x = -\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{2}{3}$$

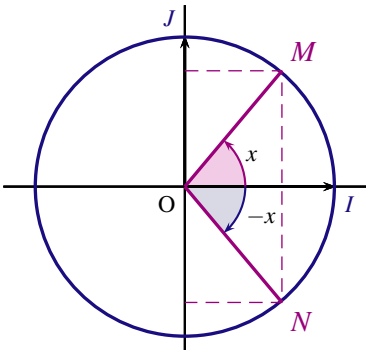
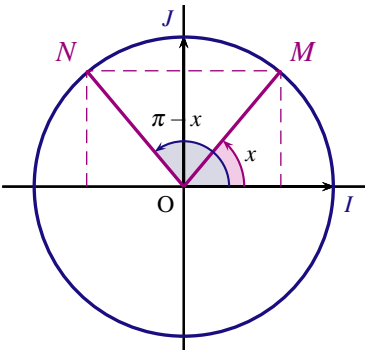
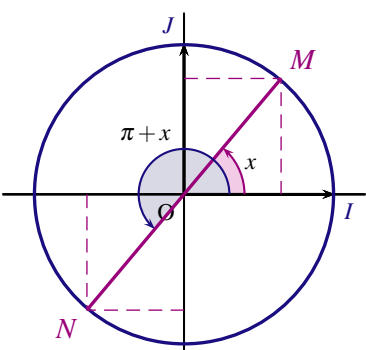
Comme $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2}{3}$.

3 – VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 – ANGLES ASSOCIÉS

<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OI)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à (OJ)</p>	<p>Pour tout réel x :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ </div>  <p>M et N sont symétriques par rapport à O</p>
---	---	---

EXEMPLES :

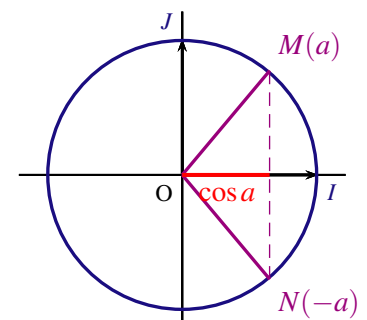
1. $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
2. $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5 – ÉQUATIONS

— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

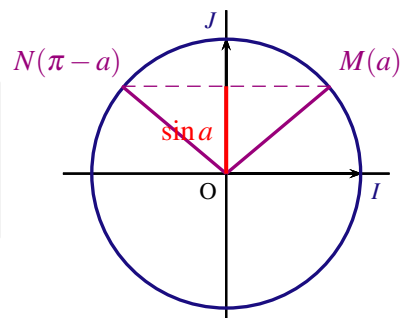
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$



— Équation $\sin x = \sin a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin a$ sont :

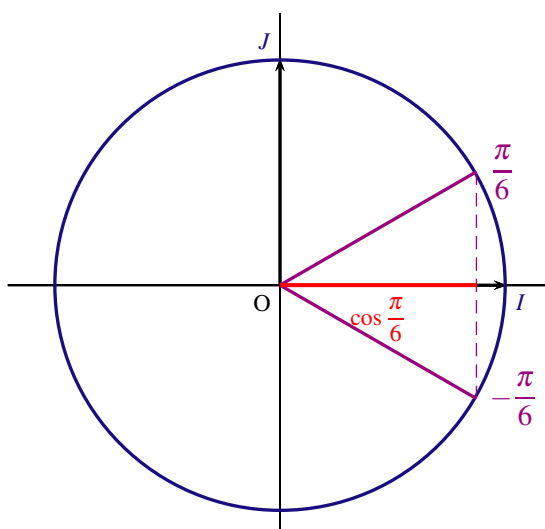
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$



EXEMPLES :

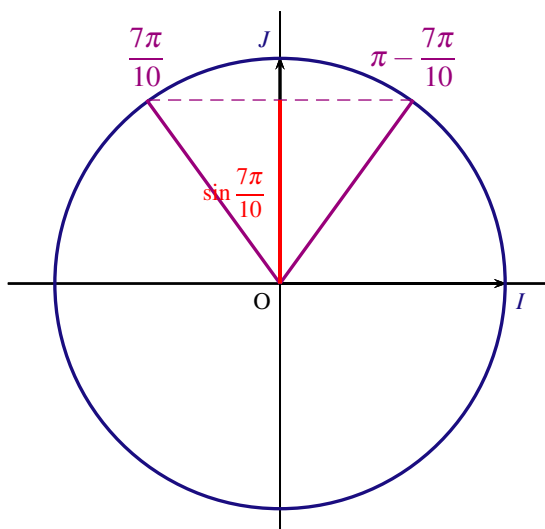
1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$



Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin x = \sin \frac{7\pi}{10}$.



Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin \frac{7\pi}{10}$ sont $x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

EXERCICE 1

1. Convertir en radians les mesures d'angle géométriques donnés en degrés :

- a) 210° b) 5° c) 198° d) 315° e) 72° f) 40°

2. Convertir en degrés les mesures des angles géométriques donnés en radians :

- a) $\frac{\pi}{9}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{9\pi}{5}$ e) $\frac{14\pi}{9}$ f) $\frac{72\pi}{45}$

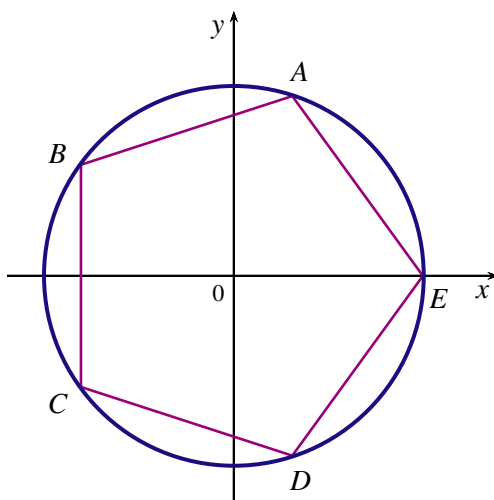
EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel $x \in]-\pi; \pi]$ dont l'image par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique coïncide avec le point image du réel donné.

- a) $\frac{41\pi}{6}$ b) $-\frac{15\pi}{2}$ c) 13π d) $-\frac{10\pi}{3}$ e) -35π f) $\frac{52\pi}{9}$

EXERCICE 3

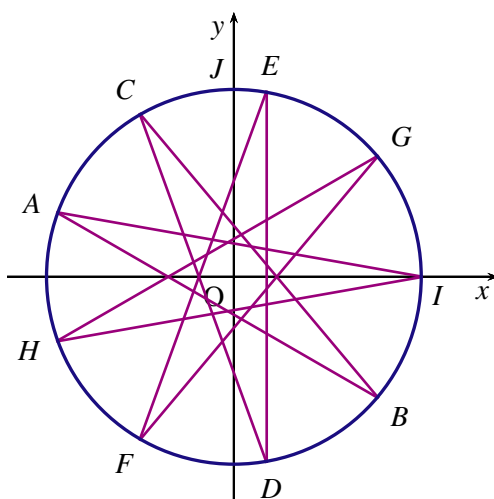
Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique \mathcal{C} .



À quels réels de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

EXERCICE 4

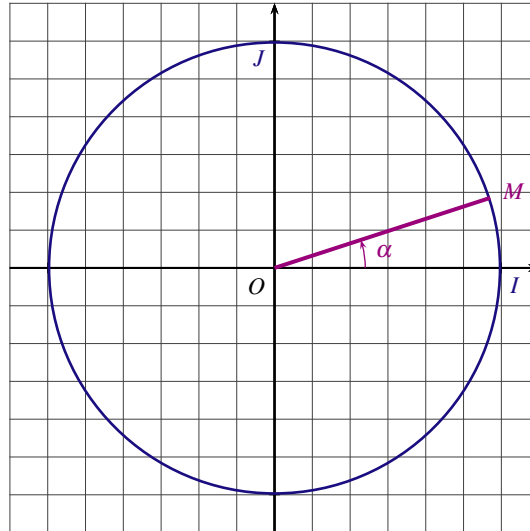
Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(O;I,J)$, on a tracé le polygone régulier étoilé $ABCDEFGHI$.



- À quels réels de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ sont associés les sommets de ce polygone ?
- Donner les coordonnées des points C et F .
- Les points A et H ont-ils la même abscisse ?

EXERCICE 5

- a) Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$.



- Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D .
- M est un point du cercle trigonométrique tel que la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM} = \alpha$ avec $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1 et M_2 tels que $\widehat{IOM_1} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{IOM_2} = \pi - \alpha$.
- a) On donne $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donner la valeur exacte de $\sin\left(-\frac{9\pi}{10}\right)$
 - Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 6

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur l'intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus du réel x correspondant :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \in [0; \pi];$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ et } x \in [-\pi; 0];$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right];$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

EXERCICE 7

Simplifier chacune des expressions suivantes :

- $A = \cos(\pi - x) + 2\cos x - 3\cos(\pi + x)$
 - $B = \sin(2\pi - x) - 2\sin(\pi + x) + 3\sin(x - \pi)$
 - $C = \cos(-x) - 2\cos(3\pi - x) + 2\cos(x + \pi)$
- $D = (1 + \cos t + \sin t)^2 - 2(1 + \cos t)(1 + \sin t)$
 - $E = \cos^4 t - \sin^4 t + 2\sin^2 t$

EXERCICE 8

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 1 + 2\cos x = 0; \quad 1 - 2\sin x = 0.$$

EXERCICE 9

Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}; \quad \sin x = \sin \frac{3\pi}{4}; \quad \sin x = \sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right); \quad \cos x = \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

EXERCICE 10

On donne $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

- Déterminer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{5}$
- En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $-\frac{\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$.

EXERCICE 11

- Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$.
- Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation $2\cos^2 x - 1 = 0$.

EXERCICE 12

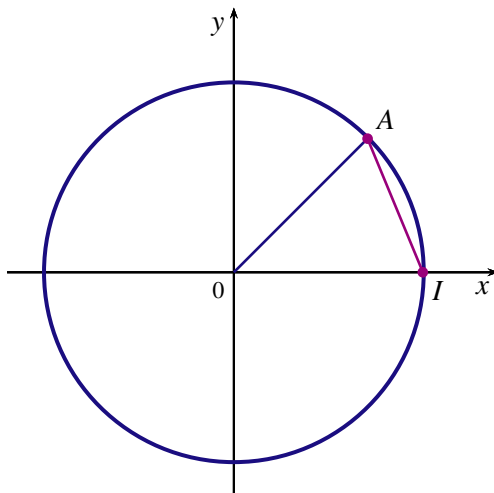
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - \frac{3}{4} = 0$.
- En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ de l'équation $\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$

EXERCICE 13

- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$.
- En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

EXERCICE 14

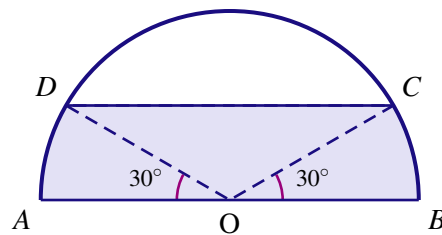
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique, A le point du cercle trigonométrique image du réel $\frac{\pi}{4}$ et I le point de coordonnées (1;0).



1. a) Calculer distance IA
 - b) Montrer que $IA = 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
 - c) Déterminer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
2. En reproduisant la méthode pour calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:
 - a) Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 - b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 15

Dans la figure ci-dessous, on considère le demi-cercle de rayon 5 cm.



Comparer l'aire située sous la corde DC et l'aire de la partie du demi-cercle située au dessus de la corde DC .

EXERCICE 16

Pour tout entier n non nul on considère le réel $a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1. Calculer $a_1 = \sin(\pi) \cos(\pi)$, $a_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $a_3 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $a_4 = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $a_6 = 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée des réels suivants :
 $a_{20} = 20 \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) \cos\left(\frac{\pi}{20}\right)$, $a_{50} = 50 \sin\left(\frac{\pi}{50}\right) \cos\left(\frac{\pi}{50}\right)$ et $a_{100} = 100 \sin\left(\frac{\pi}{100}\right) \cos\left(\frac{\pi}{100}\right)$
3. Emettre une conjecture sur la valeur de a_n quand n devient de plus en plus grand.