I INTRODUCTION

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on cherche à établir une relation entre les coordonnées $(x;y)$ des points du plan appartenant à une droite $\mathscr{D}$.

EXEMPLE 1

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-2;3)$ et $B(1;-2)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Soit :

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\iff 3\left(y-3\right)-(-5)(x+2)=0\\ &\iff 3y-9+5x+10=0\\ &\iff 3y+5x+1=0\\ &\iff y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'équation $3y+5x+1=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
L'équation $y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$ est l'équation réduite de la droite (AB).
La droite (AB) est la courbe représentative d'une fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$.

EXEMPLE 2

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-3;-1)$ et $B(-3;4)$.

$M(x;y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Soit :

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\iff 0\times\left(y+1\right)-5(x+3)=0\\ &\iff -5x-15=0\\ &\iff x=-3\end{aligned}$$

L'équation $-5x-15=0$ est une équation cartésienne de la droite (AB).
L'équation $x=3$ est l'équation réduite de la droite (AB).
La droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, ce n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

II ÉQUATIONS D'UNE DROITE

1 – PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux points distincts du plan. M est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

2 – ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE

THÉORÈME

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, toute droite $\mathscr{D}$ a une équation soit de la forme $x=c$ soit de la forme $y=mx+p$

✻ DÉMONSTRATION

Soit $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ deux points distincts du plan.

La droite (AB) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit :

$$\begin{aligned}M\in(AB) &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)-\left(y_B-y_A\right)(x-x_A)=0\\ &\iff (x_B-x_A)\left(y-y_A\right)=\left(y_B-y_A\right)(x-x_A) \qquad (1)\end{aligned}$$

— Si la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées :
  les points A et B ont la même abscisse $x_A=x_B=c$ d'où, $x_B-x_A=0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y_B-y_A\right)(x-c)=0 \iff x=c$$

— Si la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
  les points A et B n'ont pas la même abscisse d'où, $x_B-x_A\neq 0$. L'équation (1) s'écrit alors :

$$\left(y-y_A\right)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \iff y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)+y_A$$

  Soit en posant $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, la droite (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$.

THÉORÈME RÉCIPROQUE

L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $x=c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $y=mx+p$ est une droite coupant l'axe des ordonnées au point P de coordonnées $(0;p)$.

✻ DÉMONSTRATION

— Le cas de l'équation $x=c$ est trivial : l'équation $x=c$ caractérise l'ensemble des points du plan qui ont la même abscisse.

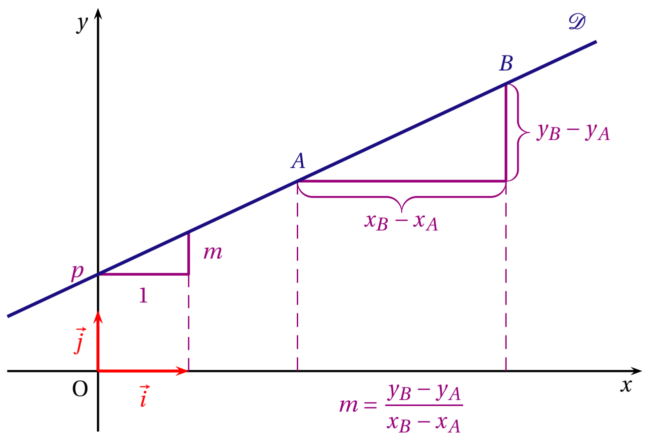
— Cas de l'équation $y=mx+p$
  $A(0;p)$ et $B(1;m+p)$ sont deux points distincts de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation $y=mx+p$.

  Pour tout point $M\left(x;mx+p\right)$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\mx+p-p\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$.

  Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\mx\end{pmatrix}$ sont colinéaires par conséquent, M est un point de la droite (AB).

REMARQUES

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=mx+p$:

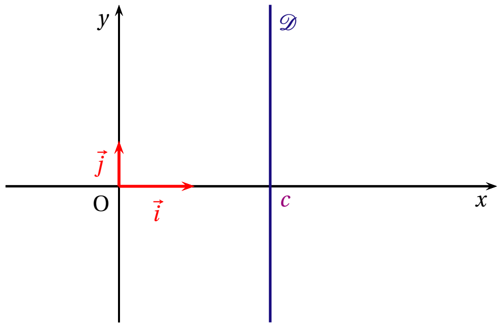


— Le nombre réel m est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$;

— Le nombre réel p est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$;

— Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = c$:



— La droite $\mathscr{D}$ n'a pas de coefficient directeur ;

— $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

3 – DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE DROITE

Équation de la droite passant par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

1. Première méthode

   Soit $M(x; y)$ un point de la droite (AB). On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$; on écrit alors la condition de colinéarité

$$XY' - X'Y = 0$$

   EXEMPLE

   Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(-2; 4)$ et $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

   $M(x; y)$ est un point de la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Soit

$$\begin{aligned}3(y-4)+\frac{9}{2}(x+2)=0 &\iff 3y-12+\frac{9}{2}x+9=0\\ &\iff y=-\frac{3}{2}x+1\end{aligned}$$

   Ainsi, la droite (AB) a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

2. Seconde méthode

   On distingue deux cas :

   a) Si les points A et B ont la même abscisse, $x_A = x_B = c$ alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation $x = c$.

   b) Si les points A et B n'ont pas la même abscisse, $x_A \neq x_B$.
   On calcule le coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puis, on on détermine l'ordonnée à l'origine à l'aide des coordonnées du point A :

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

EXEMPLE

Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(3;1)$ et $B\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Les points A et B n'ont pas la même abscisse donc la droite $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $y = mx+p$ avec

$$m = \frac{-\dfrac{4}{3}-1}{-\dfrac{1}{2}-3} = \frac{-\dfrac{7}{3}}{-\dfrac{7}{2}} = \frac{2}{3}$$

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \dfrac{2}{3}x+p$. Comme le point $A(3;1)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite d'où

$$\frac{2}{3}\times 3+p = 1 \iff p = 1$$

Ainsi, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \dfrac{2}{3}x+1$.

III DROITES PARALLÈLES, DROITES SÉCANTES

1 – DROITES PARALLÈLES

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx+p$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = m'x+p'$ sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$:

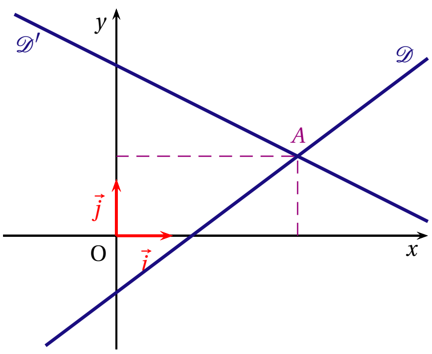
$$\mathscr{D} \,//\, \mathscr{D}' \iff \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires } \iff 1\times m' - 1\times m = 0 \iff m = m'$$

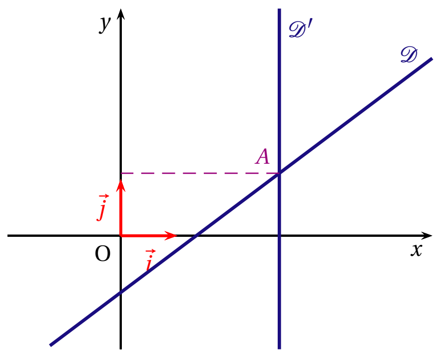
REMARQUE

Les droites d'équations $x = c$ et $x = c'$ étant parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles.

2 – COORDONNÉES DU POINT D'INTERSECTION DE DEUX DROITES SÉCANTES

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx+p$ et la droite $\mathscr{D}'$ dont l'équation est soit $y = m'x+p'$ avec $m \neq m'$ soit $x = c$.
Déterminer les coordonnées $(x_A; y_A)$ du point d'intersection A de deux droites sécantes c'est résoudre un système d'équations linéaires, formé des équations de chacune des deux droites :





$$\begin{cases} y = mx+p \\ y = m'x+p' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = c \\ y = mx+p \end{cases}$$

EXEMPLE

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations respectives $y=-\dfrac{2}{3}x+3$ et $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4}$

Le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est égal à $-\dfrac{2}{3}$ et celui de la droite $\mathscr{D}'$ est égal à $\dfrac{5}{6}$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont des coefficients directeurs différents donc les deux droites sont sécantes.

Les coordonnées $(x_A;y_A)$ du point d'intersection A des deux droites correspondent au couple solution du système :

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ -\dfrac{2}{3}x+3=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+3 \\ -\dfrac{3}{2}x=-\dfrac{15}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{2}+3=\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{4}{3}\right)$.

IV SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1 – DÉFINITION

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y c'est trouver tous les couples $(x;y)$ vérifiant les deux équations.

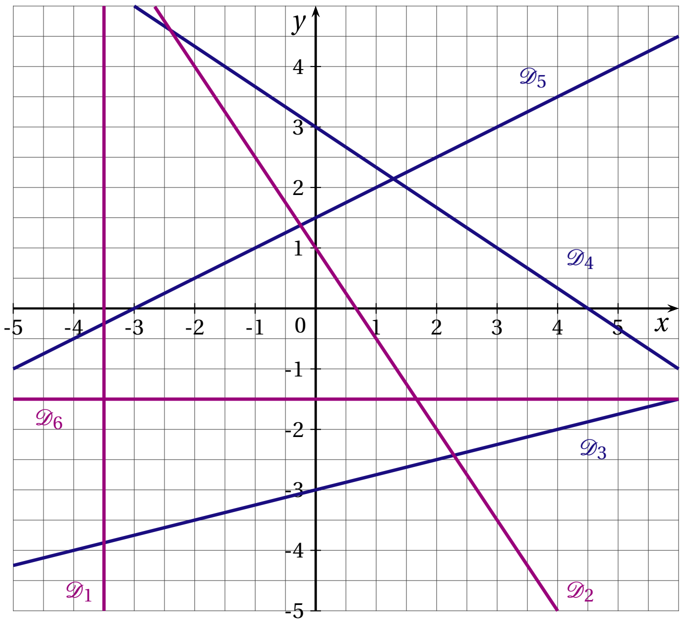
EXEMPLE

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-2y & = & -4 \\ 2x+6y & = & 1 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l|l} 3x-2y=-4 & L_1 \\ 2x+6y=1 & L_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l|l} 3x-2y=-4 & L_1 \\ 11x=-11 & L_2\leftarrow 3\times L_1+L_2 \end{array}\right. \iff \begin{cases} 3x-2y=-4 \\ x=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 1

Par lecture graphique, déterminer une équation réduite chacune des six droites.



EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.

1. La droite $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur 0,5 et passe par le point $A(-4;1)$.
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour ordonnée à l'origine $-1{,}5$ et passe par le point $A(1;-2)$.
3. La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(-1;-2)$.
4. La droite $\mathscr{D}$ passe par les points $A(2;-1)$ et $B(-1;0)$.
5. La droite $\mathscr{D}$ passe par les points $A(-5;-4)$ et $B(-5;5)$.
6. La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $A(-3;2)$ et est parallèle à la droite d d'équation $y=-\dfrac{2}{3}x+1$.

EXERCICE 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-3x+2$ et le point $A(-5;7)$.
On veut déterminer la distance d du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite $\mathscr{D}$. Exprimer AM^2 en fonction de x.
   b) Calculer la valeur de x pour laquelle la distance AM^2 est minimale.
   En déduire la distance d du point A à la droite $\mathscr{D}$.
2. Donner les coordonnées du point M pour lesquelles la distance AM est minimale.

EXERCICE 4

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(-3;-1)$, $B(3;3)$ et $C(-5;7)$.

1. Déterminer une équation de la médiane (AM).
2. Calculer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(-3;4)$, $B(6;1)$ et $C(-3;-2)$.

1. On note d la médiatrice du segment $[BC]$
   a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite d. Exprimer MB^2 et MC^2 en fonction de x et y.
   b) Déterminer une équation de la médiatrice d du segment $[BC]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice Δ du segment $[AC]$.
3. Calculer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne les points $A(6;5)$, $B(-1;6)$ et $C(2;-3)$.

1. a) Déterminer une équation de la médiatrice d du segment $[BC]$.
   b) En déduire une équation de la hauteur (AK) du triangle ABC.
2. Déterminer une équation de la hauteur BL du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 7

Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$un repère orthonormé du plan.

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $E(4;-2)$ et admettant pour coefficient directeur (-2)
   a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$.
   b) Le point $F(2;-1)$ est-il un point de la droite $\mathscr{D}$?
2. On considère les points $A(-4;9)$ et $B(2;12)$
   a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   b) Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont elles parallèles ?
3. Résoudre le système $S:\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -2x+6 \\ y & = & 0{,}5x+11 \end{array}\right.$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. On admettra maintenant que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en $H(-2:10)$.
   Démontrer que le triangle BHE est rectangle en H.

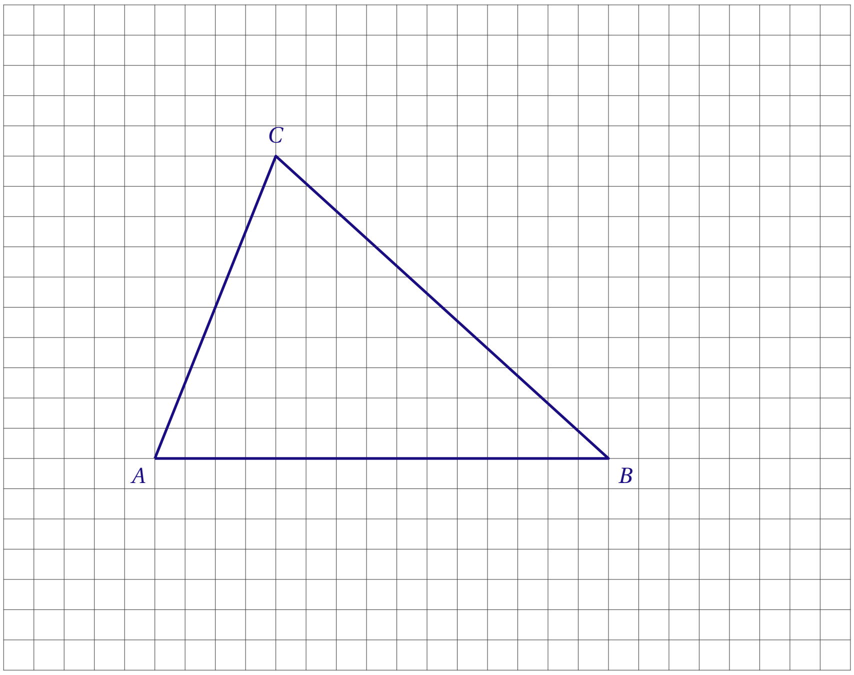
EXERCICE 8

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, placer les points $A(-5;3)$, $B(3;7)$ et $C(-2;-8)$.
La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.

1. Centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Soit $M(x;y)$ un point de la droite $\mathscr{D}$ médiatrice du segment $[AB]$.
      i. Exprimer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y.
      ii. En déduire une équation de la médiatrice $\mathscr{D}$ du segment $[AB]$.
   b) La médiatrice d du segment $[BC]$ a pour équation $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$. Tracer la droite d dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   c) Calculer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Orthocentre du triangle ABC.
   a) Déterminer une équation de la hauteur (AA') du triangle ABC.
   b) Déterminer une équation de la hauteur (CC') du triangle ABC.
   c) Calculer les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC.
3. a) Calculer les coordonnées du point G tel que $3\overrightarrow{\Omega G}=\overrightarrow{\Omega H}$.
   b) Soit I le milieu du segment $[AB]$. Le point G appartient-il à la médiane (CI) ?

EXERCICE 9

ABC est un triangle. Les points A', B' et C' sont définis par : $\overrightarrow{A'C} = 6\overrightarrow{A'B}$; $\overrightarrow{B'A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C}$ et $\overrightarrow{C'B} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{C'A}$.



1. Sur la figure ci-dessus, placer les points A', B' et C'.
2. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
   a) Déterminer les coordonnées des points A, B et C ainsi que celles des points A', B' et C'.
   b) Déterminer une équation des droites (BB') et (CC').
   En déduire les coordonnées du point K, intersection des droites (BB') et (CC')
   c) Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont-elles concourantes ?

EXERCICE 10

Un capital de 10 000 € a perdu 6% de sa valeur au bout d'un an.
Ce capital avait été placé de la manière suivante :

— une partie x a été placée sur un compte d'épargne qui rapporte 5% d'intérêts par an ;

— le reste du capital noté y a été placé en bourse. Un an plus tard, le portefeuille boursier a perdu 20% de sa valeur.

Calculer le montant en euros de chacune des deux sommes x et y.

EXERCICE 11

Un assembleur commande deux types de composants électroniques.

— Le composant A est vendu par lot de 30 au prix de 2 550€ le lot.

— Le composant B est vendu par lot de 40 au prix de 1 400€ le lot.

L'assembleur a commandé au total 720 composants pour un montant global de 37 200 €, déterminer le nombre de lots de chacun des composants.

EXERCICE 12

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
La parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(0; -3)$ et coupe la droite d d'équation $y = -2x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.