I FONCTION CARRÉ

1 – DÉFINITION

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.

— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 – VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

✳ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

— Si $a < b \leqslant 0$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow a + b < 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$
Ainsi, sur l'intervalle $]-\infty;0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

— Si $0 \leqslant a < b$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leqslant a < b \Leftrightarrow a + b > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$
Ainsi, sur l'intervalle $[0;+\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$

— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3;2]$.
f est décroissante sur $[-3;0]$ et croissante sur $[0;2]$.

— Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

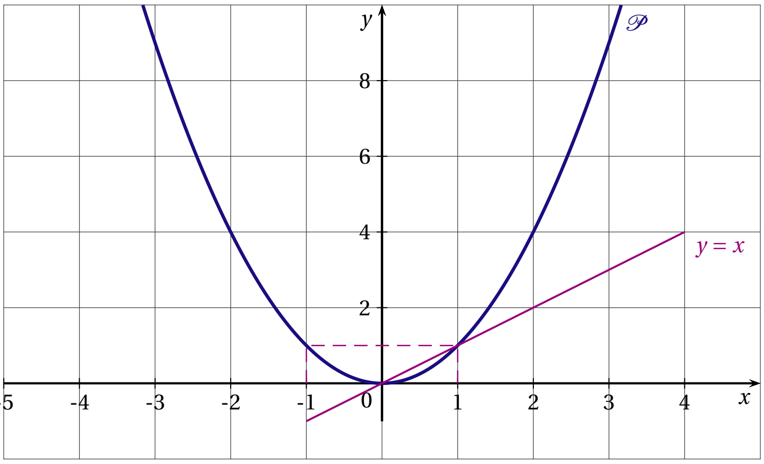
— Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

x	-3		0		2
$f(x)$	9	↘	0	↗	4

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

3 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



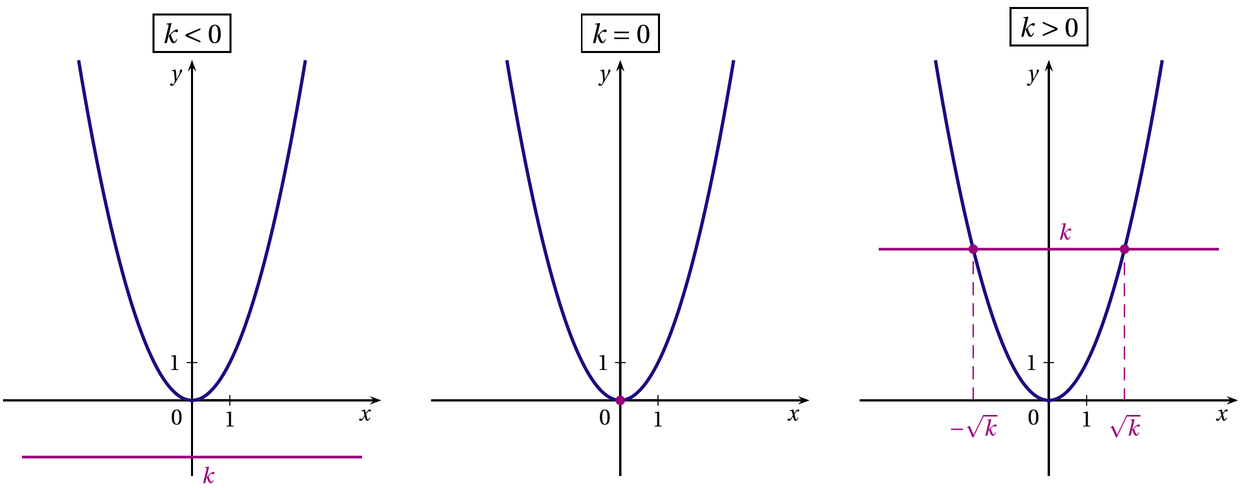
REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

4 – ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

ÉQUATIONS $x^2 = k$ AVEC k RÉEL

— Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.
— Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$
— Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.
On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

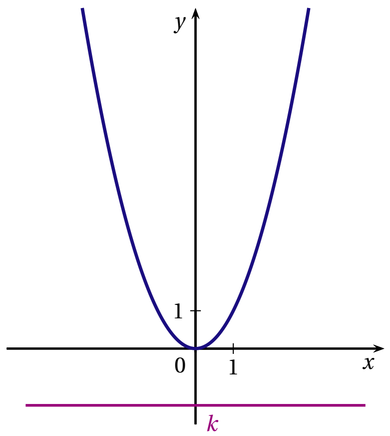


$x^2 = k$ n'a pas de solution — $x^2 = 0$ a pour unique solution 0 — $x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

INÉQUATIONS $x^2 \leqslant k$ OU $x^2 \geqslant k$ AVEC k RÉEL

Résoudre une inéquation $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.

$\boxed{k < 0}$



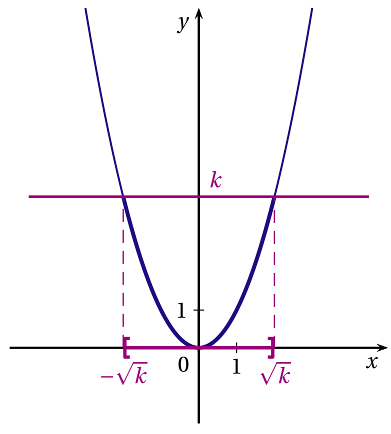
L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution :

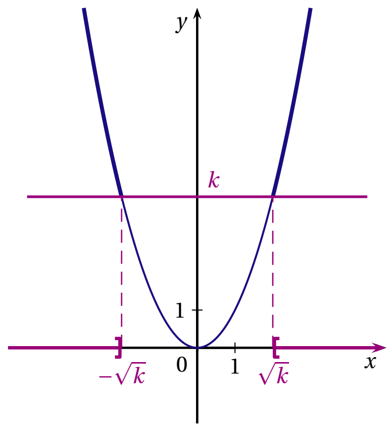
$$S = \varnothing$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$

$\boxed{k > 0}$





L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

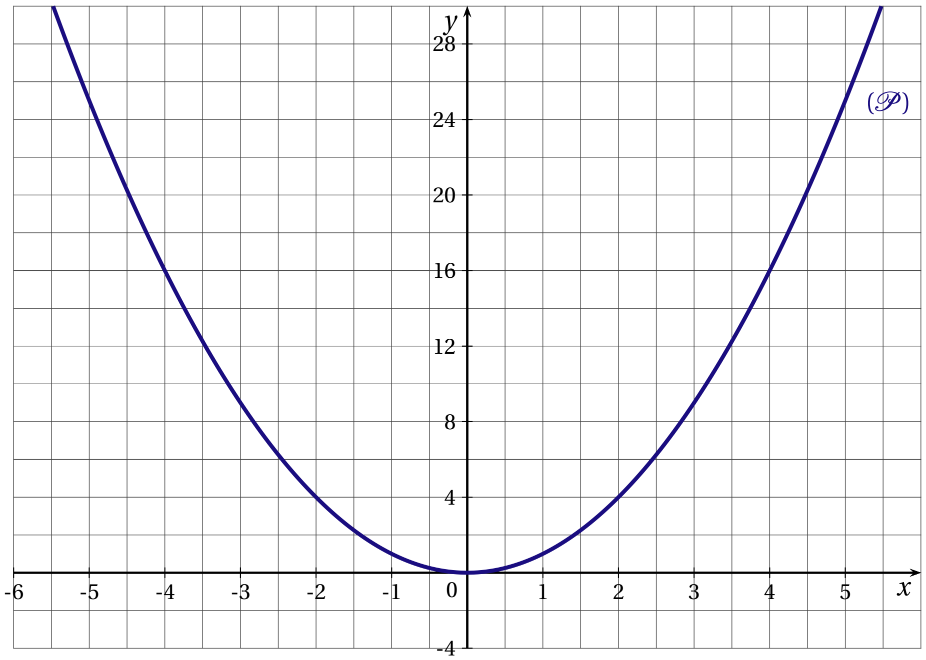
EXERCICE 1

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :

« Pour tout nombre réel x, $x+1 \geqslant x$. D'où $(x+1)^2 \geqslant x^2$
Soit en développant $x^2+2x+1 \geqslant x^2$
On en déduit que $2x+1 \geqslant 0$ soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc finalement que tout nombre réel est plus grand que $-\dfrac{1}{2}$. »

EXERCICE 2

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative est la parabole $(\mathscr{P})$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $-\sqrt{6}$, $1-\sqrt{2}$, 10^{-2} et $\dfrac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
3. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = \dfrac{3}{2}x + 10$.
   a) Tracer dans le repère précédent, la courbe D représentative de la fonction g.
   b) Lire graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
   c) En déduire une factorisation de $E(x) = x^2 - \dfrac{3}{2}x - 10$.

EXERCICE 3

Soit x un nombre réel.

1. L'affirmation « Si $x^2 \geqslant 9$ alors $x \geqslant 3$ » est-elle vraie ?
2. Écrire une proposition équivalente à : $x^2 \geqslant 9$.

EXERCICE 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-3)^2 = 25$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)^2 \geqslant 9$.

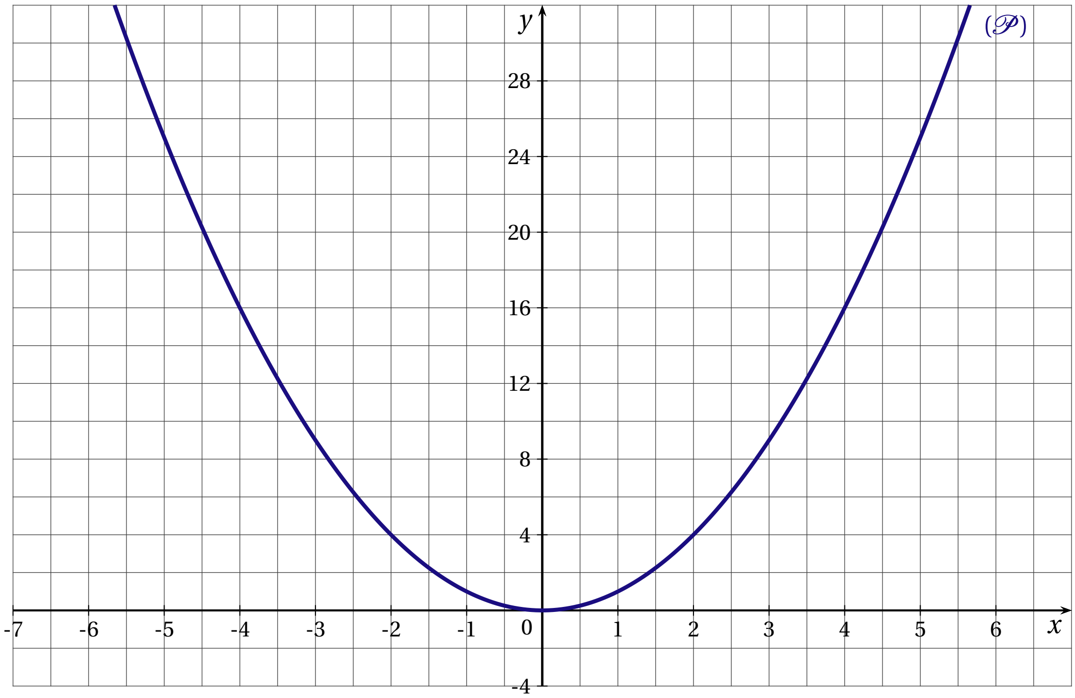
EXERCICE 5

Soit x un réel de l'intervalle $[-0,5;3]$.

1. Donner un encadrement de x^2 puis de x^2-4x
2. a) Montrer que pour tout réel x, $x^2-4x=(x-2)^2-4$.
   b) En déduire un deuxième encadrement de x^2-4x.

EXERCICE 6

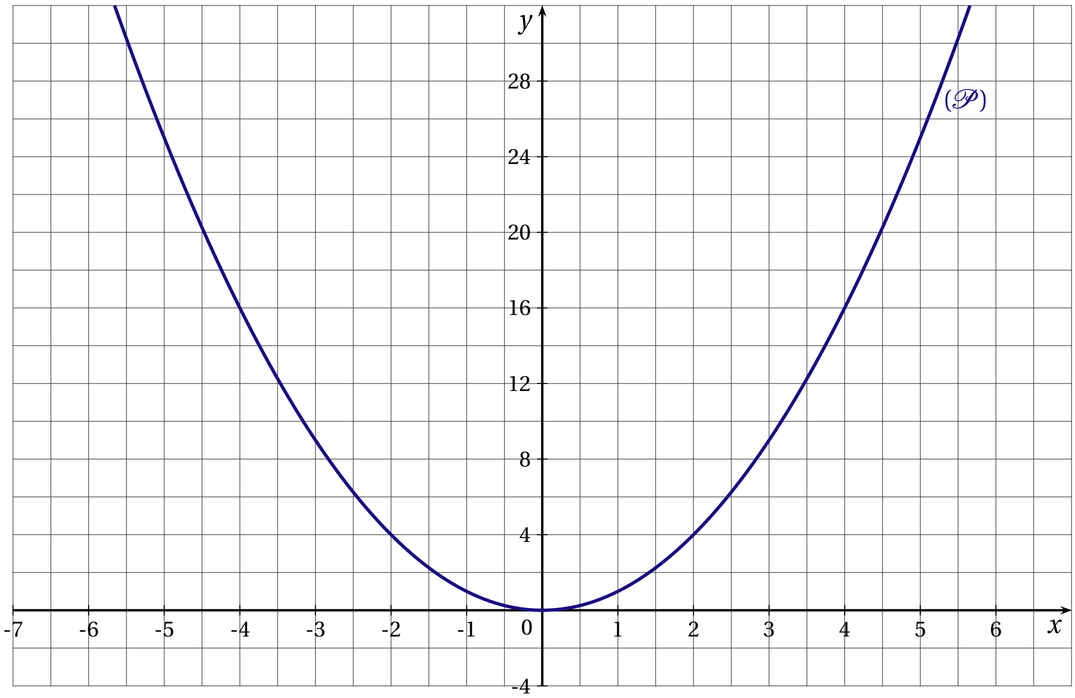
f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative est la parabole $(\mathscr{P})$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Calculer les images des réels : $\left(-10^{-3}\right)$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $2-\sqrt{3}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 20 ?
3. Le point $A(3,6;13)$ appartient-il à la parabole $(\mathscr{P})$?
4. Soit a un réel tel que : $-3\leqslant a\leqslant 2$. Déterminer un encadrement de a^2.
5. Soit g la fonction affine telle que $g(-3)=18$ et $g(5)=6$.
   a) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.
   b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.
6. a) Montrer que $f(x)-g(x)=\left(x+\dfrac{9}{2}\right)(x-3)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$.
   c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole $(\mathscr{P})$.

EXERCICE 7

f est la fonction carré définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative $(\mathscr{P})$ est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



PARTIE A

1. Calculer les images des réels : $\left(-\frac{4}{5}\right)$ $(-\sqrt{6})$, $(1-\sqrt{3})$, 10^{-3} et $\frac{7}{13}$.
2. Quels sont les antécédents éventuels de 12 ?
3. Placer dans le repère précédent le point A de coordonnées $A\left(-\frac{9}{2};20\right)$.

   Le point A appartient-il à la parabole $(\mathscr{P})$?
4. Résoudre dans l'ensemble des réels l'inéquation $f(x) \geqslant 8$.
5. Soit a un réel tel que : $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leqslant a \leqslant -0{,}1$. Déterminer un encadrement de a^2.
6. Si $x \in \left]-1;10^{-2}\right]$, à quel intervalle appartient $f(x)$?

PARTIE B

Soit g la fonction affine telle que $g(-6)=6$ et $g(2)=26$.

1. a) Déterminer l'expression de de $g(x)$ en fonction de x.

   b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.
2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite D_g avec la parabole $(\mathscr{P})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 8

Recopier et compléter les égalités suivantes :

A. $x^2+2x=(x+1)^2-\cdots$

B. $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\cdots$

C. $x^2+3x-1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\cdots$

D. $x^2-5x+7=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\cdots$

E. $2x^2+3x=2\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

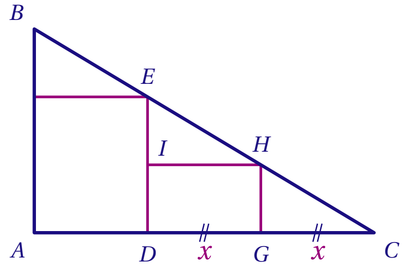
F. $-3x^2-x+1=-3\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

G. $\frac{x^2}{2}+3x-1=\frac{1}{2}\left[(x+\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

H. $-\frac{x^2}{4}+3x+2=-\frac{1}{4}\left[(x-\cdots)^2 \quad \cdots\right]$

EXERCICE 9

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 9$ cm et $AC = 15$ cm.
G et D sont deux points du segment $[CA]$ tels que $CG = GD$.
On construit les rectangles $ADEF$ et $DGHI$ comme indiqué sur la figure.
On pose alors $CG = GD = x$ avec $0 < x < 7{,}5$.
Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de x pour lesquelles les aires des rectangles $DGHI$ et $ADEF$ sont égales.

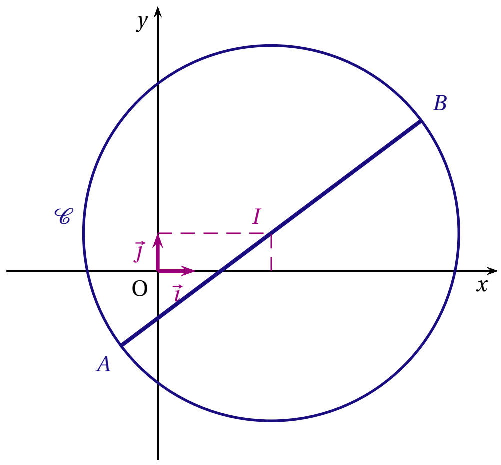


1. a) Exprimer GH en fonction de x. En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $DGHI$ en fonction de x.
   b) Exprimer ED en fonction de x. En déduire l'aire en cm^2 du rectangle $ADEF$ en fonction de x.
2. Résoudre alors le problème.

EXERCICE 10

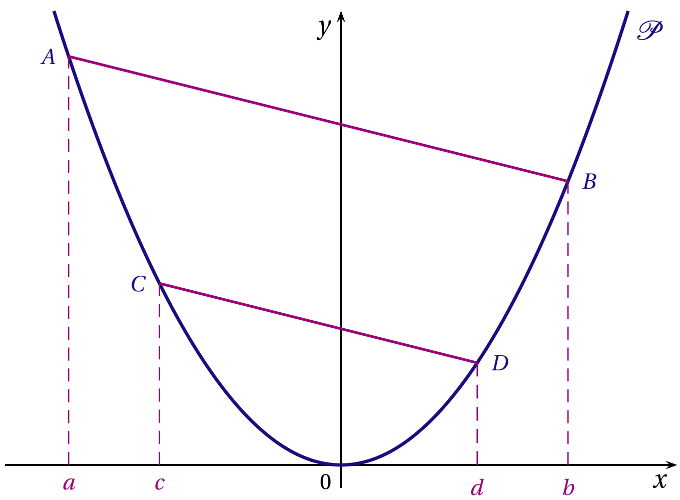
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points $A(-1;-2)$, $B(7;4)$ et le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre AB.

1. Calculer les coordonnées du centre I du cercle $\mathscr{C}$.
2. Calculer le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer les abscisses des points $M(x;5)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$.



EXERCICE 11

A, B, C et D sont quatre points distincts de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



1. On suppose dans cette question que les points A, B et C ont pour abscisses respectives (-6), 5 et (-4).
   Calculer les coordonnées du point D pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.
2. On note a, b, c et d les abscisses respectives des points A, B, C et D de la parabole $\mathscr{P}$.
   Quelle condition les réels a, b, c et d doivent-ils vérifier pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles?