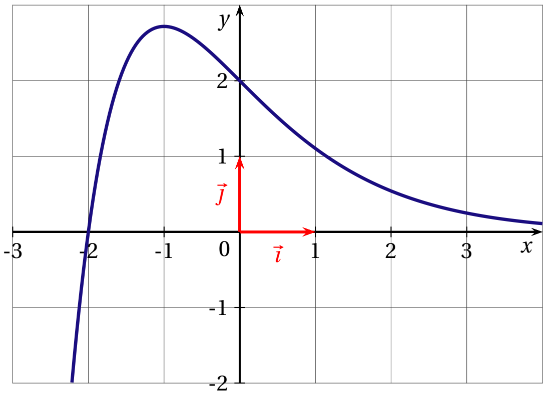
EXERCICE 1

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ vérifie les propriétés suivantes :

— Les points de coordonnées respectives $(-2;0)$ et $(0;2)$ appartiennent à la courbe tracée;

— la tangente au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses;

— la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en $x=2$.



1. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée de f et une autre une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

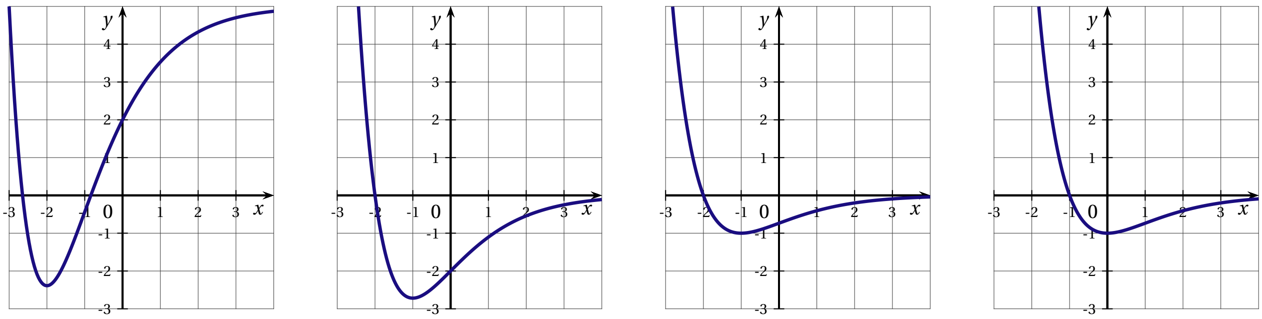


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

3. On admet que la fonction f est définie par une expression de la forme $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.
   a) En utilisant les propriétés de la courbe $\mathscr{C}_f$ données au début de l'exercice, calculer a et b.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
   c) Retrouver par le calcul une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2

(*D'après sujet Bac ES La Réunion 2000*)

Au 1$^{\text{er}}$Janvier 2005, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 400 000 €.
Au bout de t années, chacune se revend en ayant perdu chaque année un pourcentage de sa valeur de l'année précédente;
on désigne par $R(t)$ cette valeur de revente en milliers d'euros.

1. On modélise $R(t)$ par la fonction suivante, définie sur $[0;+\infty[$ par $R(t) = 400\text{e}^{-0,3t}$.
   Quel est le pourcentage de perte si la machine est revendue au 1$^{\text{er}}$Janvier 2006 ?
2. On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 20 000 €, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.
   On désigne par $C(t)$ le coût total d'utilisation d'une machine au bout de t années en milliers d'euros.
   $C(t)$ est donné par : $C(t) = 420 - 400\text{e}^{-0,3t}$.
   a) Calculer la limite de $C(t)$ en $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée de $C(t)$ et étudier son signe.
   c) Étudier les variations de la fonction C pour $t \in [0;+\infty[$.
3. Vérifier qu'au bout de 20 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 1 000 € près.
4. L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 330 000 €.
   a) Résoudre l'inéquation $C(t) > 330$. Donner la réponse en nombre entier d'années.
   b) Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier.
   En quelle année doit-elle le faire ? Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date ?
   (On donnera la meilleure approximation de ce prix en nombre entier de milliers d'euros.)