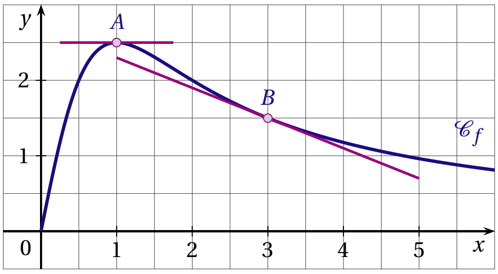
EXERCICE 1

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $[0;+\infty[$.
On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
On sait que :

— L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

— La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B passe par le point de coordonnées $(5{,}5;0{,}5)$.



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
   c) Résoudre $f'(x) \geqslant 0$.
2. On considère la fonction g qui à x associe $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   a) Préciser l'intervalle de définition I de la fonction g.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   c) Calculer $g'(1)$ et $g'(3)$.
   d) Étudier les variations de la fonction g sur I.
3. On considère la fonction h qui à tout réel x strictement positif associe $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. Que peut-on déduire pour la courbe représentative de la fonction h?
   b) Calculer $h'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction f.

EXERCICE 3

Le coût total de fabrication d'un produit est donnée par $C(q) = \dfrac{q^3}{3} - 6q^2 + 40q$ pour $q \in [0;12]$ où q représente le nombre de milliers d'unités fabriquées et $C(q)$ le coût de fabrication en centaines d'euros.
La courbe (F) représentative de la fonction coût total est donnée en annexe ci-dessous.

1. On rappelle que le coût unitaire moyen est donné par $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ pour $q \neq 0$.
   a) Exprimer en fonction de q le coût unitaire moyen.
   b) Calculer le nombre q_0 d'unités à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.
2. On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire. On modélise ce coût marginal par $C_m(q) = C'(q)$ où C' est la dérivée de C.
   a) Exprimer en fonction de q le coût marginal.
   b) Vérifier que pour q_0, le coût marginal est égal au coût moyen.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (F) au point A d'abscisse 9. La tracer sur le graphique joint en annexe.
4. On suppose que l'entreprise vend toute sa production. Pour $q \in]0;12]$ le bénéfice en centaines d'euros, pour la production et la vente de q milliers d'unités est $B(q) = -\dfrac{q^3}{3} + 2q^2 + 21q$.
   a) Calculer le nombre d'unités à produire pour que l'entreprise soit rentable.
   b) Déterminer le nombre d'unités à fabriquer pour obtenir le bénéfice maximum. Que vaut ce bénéfice maximal ?

ANNEXE